

PRAKTIKUM MAPLE 4 KALKULUS LANJUTAN

Fungsi Implisit

Pada pembelajaran praktikum 3, diajarkan fungsi eksplisit dalam bentuk $y = f(x)$. Sekarang bagaimana menuliskan fungsi apabila dalam bentuk implisit?

Contohnya:

Gambarlah grafik fungsi $x^2 + y^2 = 81$, pada $x \in [-15, 15]$ dan $y \in [-15, 15]$.

- `with(plots);`
- `implicitplot(x^2+y^2=81, x=-15..15, y=-15..15);`

Pada gambar nilai x dan y terdefinisi pada interval berapa?

Soal. Gambarlah grafik fungsi $4(x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$, untuk x dan $y \in [-5, 5]$

Pada gambar apakah nilai $(0,0)$ dilewati oleh grafik? Jika tidak dilewati, berarti jumlah titik pada grafik kurang banyak (default minimum pada Maple adalah 50 buah). Untuk itu perlu ditambahkan jumlah titik menggunakan option `numpoints`. Sintaksnya:

- `implicitplot(fungsi, batas x, batas y, numpoints= );`

Coba tuliskan perintahnya menggunakan Maple!

Fungsi Genap

Suatu fungsi memenuhi fungsi genap apabila:

1. $f(-x) = f(x)$, untuk semua x
2. Grafik fungsi genap simetris terhadap sumbu y

Diketahui fungsi $f(x) = x^2$. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi genap.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tuliskan $f(x) = x^2$ pada Maple
2. Carilah nilai $f(x)$;
3. Carilah nilai $f(-x)$;
Bagaimana hasil $f(x)$ dibandingkan dengan $f(-x)$?
4. Gambar grafik $f(x) = x^2$

Fungsi Ganjil

Suatu fungsi memenuhi fungsi ganjil apabila:

1. $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x
2. Grafik fungsi ganjil simetris dengan titik asal $(0,0)$

Diketahui fungsi $f(x) = x^3$. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi ganjil.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tuliskan $f(x) = x^3$ pada Maple
2. Carilah nilai $-f(x)$;
3. Carilah nilai $f(-x)$;
Bagaimana hasil $-f(x)$ dibandingkan dengan $f(-x)$?
4. Gambar grafik $f(x) = x^3$

Operasi Aljabar pada Fungsi

Operasi yang berlaku pada fungsi yaitu:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Sintak untuk melakukan operasi aljabar dua buah fungsi adalah:

➤ (fungsi1 operator fungsi2) (variabel);

Soal

Diketahui fungsi $f(x) = 6x + 10$ dan $g(x) = x^2 - 4$. Tentukan hasil operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada kedua fungsi menggunakan Maple!

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Definisikan fungsi g(x)
3. Lakukan operasi penjumlahan fungsi
4. Lakukan operasi pengurangan fungsi
5. Lakukan operasi perkalian fungsi
Untuk menjabarkan hasil perkalian tambahkan perintah
> expand(%);
6. Lakukan operasi pembagian fungsi
Untuk menjabarkan hasil pembagian tambahkan perintah
> expand(%);

Soal. Diketahui fungsi $f(x) = x^3$ dan $g(x) = x^2 + 3x + 2$. Tentukan hasil operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada kedua fungsi menggunakan Maple!

Komposisi Fungsi

Komposisi dua buah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ didefinisikan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, sintaksnya:

➤ (f @g) (x);

Untuk tiga buah fungsi $f(x)$, $g(x)$ dan $h(x)$, sintaksnya:

➤ (f @g@h) (x);

Soal

1. Diketahui $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = x^2$. Dengan menggunakan Maple carilah hasil komposisi $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$! Setelah itu carilah $(f \circ g)(2)$!
2. Untuk nilai $f(x) = 3x^2$, dan $g(x) = 7x - 5$, serta nilai $h(x) = 6x$. Carilah nilai dari $(f \circ g \circ h)(5)$!

Fungsi Invers

Dalam Maple tidak ada perintah khusus untuk mencari fungsi invers. Oleh karena itu untuk mencari fungsi invers $f(x)$ digunakan konsep mencari $g(x)$ sebagai penyelesaian dari persamaan $(f \circ g)(x) = x$.

Contoh

$f(x) = \frac{5x+3}{x-1}$, Carilah fungsi invers dari $f(x)$ dengan Maple!

- `f := (x) -> (5*x+3)/(x-1);`
- `finv := (x) -> solve((f @ g)(x) = x, g(x));`
- `finv(x);`

Menggambar Grafik Fungsi Invers

Ada perintah khusus untuk menggambar fungsi Invers, yaitu dalam Calculus1 Student Package.

Sintaksnya:

- `with(Student[Calculus1]);`
- `InversePlot(f(x), x=a..b, option);`

Contoh

Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \cos(x)$ pada interval $[0, 2\pi]$ beserta inversnya.

- `with(Student[Calculus1]);`
- `f := x -> cos(x);`
- `InversePlot(f(x), x=0..2*Pi, title="Grafik y=cos(x) dan inversnya");`

Limit Fungsi

Limit berarti ‘mendekati’, jika dikatakan bahwa x mendekati 3 artinya nilai x hanya mendekati nilai 3, tapi tidak pernah bernilai 3.

Contoh:

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} (3x + 1)$

Cara I

Untuk menentukan limit fungsi dari soal yang diberikan, maka terlebih dahulu dipilih titik-titik secara sebarang di sekitar $x = 3$ baik dari kiri maupun dari kanan. Berikut ini titik-titik x yang dipilih:

$x = 2.9, 2.95, 2.96, 2.99, 2.995, 2.999$ (dari kiri 3 atau $x < 3$)

$x = 3.10, 3.09, 3.05, 3.01, 3.005, 3.001$ (dari kanan 3 atau $x > 3$)

Dengan Maple dapat dituliskan:

- `f := (x) -> 3*x+1;`
- `x1 := Array([2.90, 2.95, 2.96, 2.99, 2.995, 2.999]);`
- `x2 := Array([3.10, 3.09, 3.05, 3.01, 3.005, 3.001]);`
- `n1 := ArrayNumElems(x1);`
- `n2 := ArrayNumElems(x2);`
- `y1 := Array(1..n1);`
- `y2 := Array(1..n2);`

- for i from 1 to n1 do y1[i] := evalf(f(x1[i])): end do;
- for i from 1 to n2 do y2[i] := evalf(f(x2[i])): end do;
- y1;
- y2;

Soal:

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 4} (5x + 1)$, menggunakan cara di atas!

Cara II

Perhitungan limit dengan fungsi

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} (3x + 1)$

Dengan Maple:

- f := (x) -> 3*x+1;
- limit(f(x),x=3,left);
- limit(f(x),x=3,right);

Selanjutnya dicari nilai sebenarnya adalah:

- limit(f(x),x=3);

Soal:

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 4} (3x + 1)$, menggunakan cara limit dengan fungsi!

Cara III

Menggunakan *Calculus1 Student Package* untuk Limit

Dalam Maple terdapat suatu paket untuk komputasi kalkulus yang bernama Calculus1 Student Package. Paket ini membantu kita mempelajari konsep-konsep dasar Kalkulus yang salah satunya adalah tentang limit.

Sintaksnya:

- with(Student:-Calculus1);
- infolevel[Student] := 1;

Aturan Penulisan Limit

Sintaksnya:

- Rule[nama aturan](ekspresi);

Dengan menggunakan Calculus student package, tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} (5 + x - x^2)$

Penyelesaian:

- with(Student:-Calculus1);
- infolevel[Student] := 1;
- f := (x) -> 5+x-x^2;
- Rule[sum](Limit(f(x), x=1));
- Rule[constant](%);
- Rule[identity](%);

- Rule[constantmultiple](%);
- Rule[power](%);
- Rule[identity](%);

Aturan penulisan limit dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Aturan	Keterangan
constant	$\lim_{x \rightarrow a} c = c$
constantmultiple	$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
difference	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
identity	$\lim_{x \rightarrow a} x = a$
power	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n, n \text{ bilangan real}$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
product	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
quotient	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
sum	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$