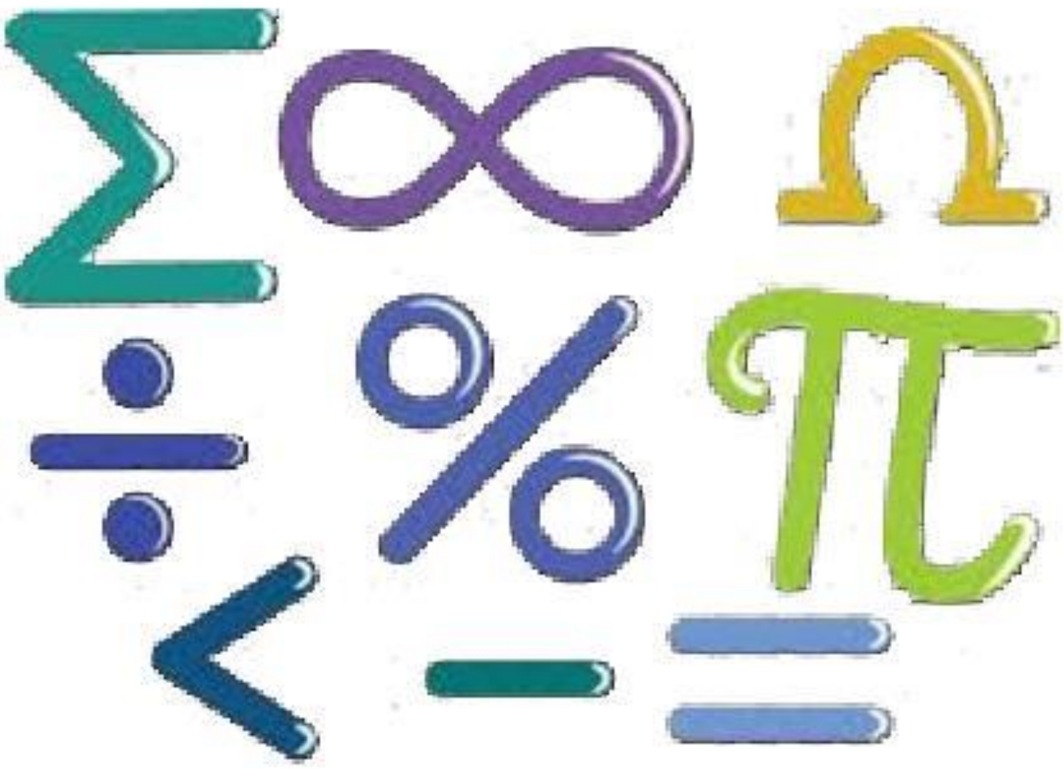
Vivi Suwanti, S. Si, M. Pd

Trija Fayeldi, M. Si

TEORI BILANGAN

Berbasis Penemuan Terbimbing



KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayahnya kami dapat menyelesaikan sesi pertama pengembangan Modul Teori Bilangan ini. Tujuan utama modul teori bilangan ini adalah untuk menanamkan dan membiasakan mahasiswa dengan alur penalaran pembuktian yang seringkali digunakan dalam mata kuliah teori bilangan. Materi yang diusung untuk saat ini adalah 2 yaitu prinsip dasar keterbagian dan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB). Modul ini dikembangkan dengan berdasar pada prinsip penemuan terbimbing. Sebelum mempelajari modul ini, pembaca harus mempelajari terlebih dahulu mengenai konsep dan sifat-sifat dari bilangan bulat. Dalam menggunakan modul ini, pembaca disarankan selalu membaca literatur lain dari teori bilangan. Karena modul ini adalah pengembangan sesi pertama, maka masih diperlukan banyak perbaikan di berbagai aspek. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan demi berlangsungnya sesi kedua dari pengembangan modul ini.

Penyelesaian sesi pertama modul teori bilangan ini tidak lepas dari bantuan banyak pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini perkenankanlah kami mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Kanjuruhan Malang
2. Ketua Program Studi pendidikan matematika beserta jajarannya
3. Segenap dosen dan mahasiswa pendidikan matematika Universitas Kanjuruhan Malang
4. LPPM Universitas Kanjuruhan Malang
5. Serta pihak-pihak yang telah membantu dan menyukseskan pengembangan modul sesi pertama ini.

Kami berharap modul teori bilangan ini dapat bermanfaat untuk praktik perkuliahan program studi pendidikan matematika UNIKAMA, serta masyarakat pada umumnya.

Tim penulis

KEGIATAN 1
KETERBAGIAN BILANGAN BULAT

Tujuan :

Setelah mempelajari kegiatan 1 ini, anda diharapkan mampu untuk :

1. Memahami konsep keterbagian bilangan bulat
2. Membuktikan teorema, lema, serta akibat dari konsep keterbagian bilangan bulat

Uraian Materi :

Keterbagian bilangan bulat merupakan konsep yang telah kita pelajari sejak sekolah dasar. Tentu anda masih ingat berapa hasil dari 6 dibagi 2. Jika jawaban anda menghasilkan 3 tanpa sisa maka anda benar. Atau dengan kata lain 6 habis dibagi oleh 2. Lantas bagaimana dengan 9 dibagi 2? Hasil dari 9 dibagi 2 adalah 4 dengan sisa 1. Dengan kata lain 9 tidak habis dibagi oleh 2. Keterbagian (divisibility) merupakan dasar pengembangan teori bilangan, sehingga konsep-konsep keterbagian akan banyak digunakan di dalam sebagian besar uraian atau penjelasan matematis tentang pembuktian teorema. Pahami definisi keterbagian bilangan bulat berikut ini.

Definisi 1.1. Keterbagian Bilangan Bulat

Misal q suatu bilangan bulat. q dikatakan habis dibagi p suatu bilangan bulat tak nol jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $q = px$.

Perhatikan dan ingat selalu notasi dari keterbagian bilangan bulat berikut.

$p|q$ dibaca p membagi q, p faktor dari q, q habis dibagi p, atau q kelipatan dari p

p Θ q dibaca p tidak membagi q, p bukan faktor dari q, q tidak habis dibagi p, atau q bukan kelipatan dari p

Beberapa sifat sederhana keterbagian adalah :

1. 1 | p untuk setiap p $\in$ Z
2. p | 0 untuk setiap p $\in$ Z dan p $\neq$ 0
3. p | p untuk setiap p $\in$ Z dan p $\neq$ 0
4. Jika p | q, maka kemungkinan hubungan antara p dan q adalah p < q, p = q, atau p > q (misalnya 3 | 6, 3 | 3, atau 3 | -3)

Untuk selanjutnya, kita akan belajar menggunakan konsep keterbagian yang telah kita baca untuk membuktikan teorema 1.1 berikut ini.

Teorema 1.1

Jika p, q $\in$ Z dan p | q, maka p | qr untuk semua r $\in$ Z

Untuk belajar melakukan pembuktian teorema 1.1, perhatikan langkah-langkah pembuktian berikut ini.

1. Tuliskan poin-poin yang diketahui dari teorema.

Diketahui :

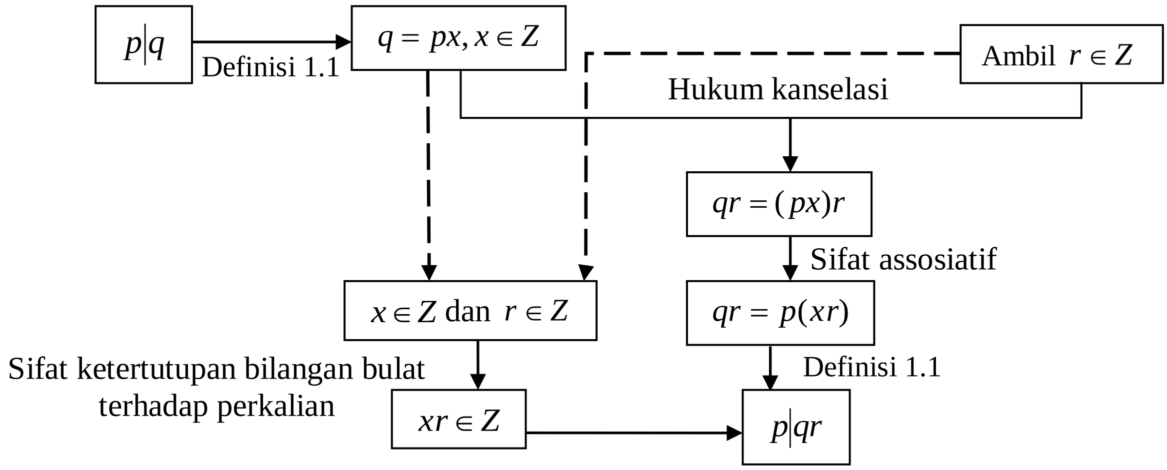
a. $p, q \in Z$

b. $p|q$

2. Tuliskan poin yang akan dibuktikan.

Akan dibuktikan : $p|qr, \forall r \in Z$

3. Rancang bagan alur bukti



4. Dari hasil no 1, 2, dan 3 ubalah ke dalam bentuk narasi pembuktian

Diketahui :

a. $p, q \in Z$

b. $p|q$

Akan dibuktikan : $p|qr, \forall r \in Z$

Bukti:

$p|q$ maka menurut definisi 1.1 $q = px,$ untuk suatu $x \in Z$. Ambil $r \in Z$, maka menurut hukum kanselasi dan sifat assosiatif perkalian bilangan bulat berlaku $qr = (px)r \Leftrightarrow qr = p(xr)$ (1)

Karena $x \in Z$ dan $r \in Z$ maka berdasarkan sifat ketertutupan perkalian bilangan bulat berlaku $xr \in Z$ (2)

Berdasarkan (1) dan (2) serta definisi 1.1 maka $p|qr, \forall r \in Z$.

Setelah memahami alur pembuktian teorema 1.1, sekarang cobalah membuktikan teorema 1.2 berikut ini dengan melengkapi bagian yang belum terisi!

Teorema 1.2

Jika p , q, r ∈ Z, p | q, dan q | r , maka p | r

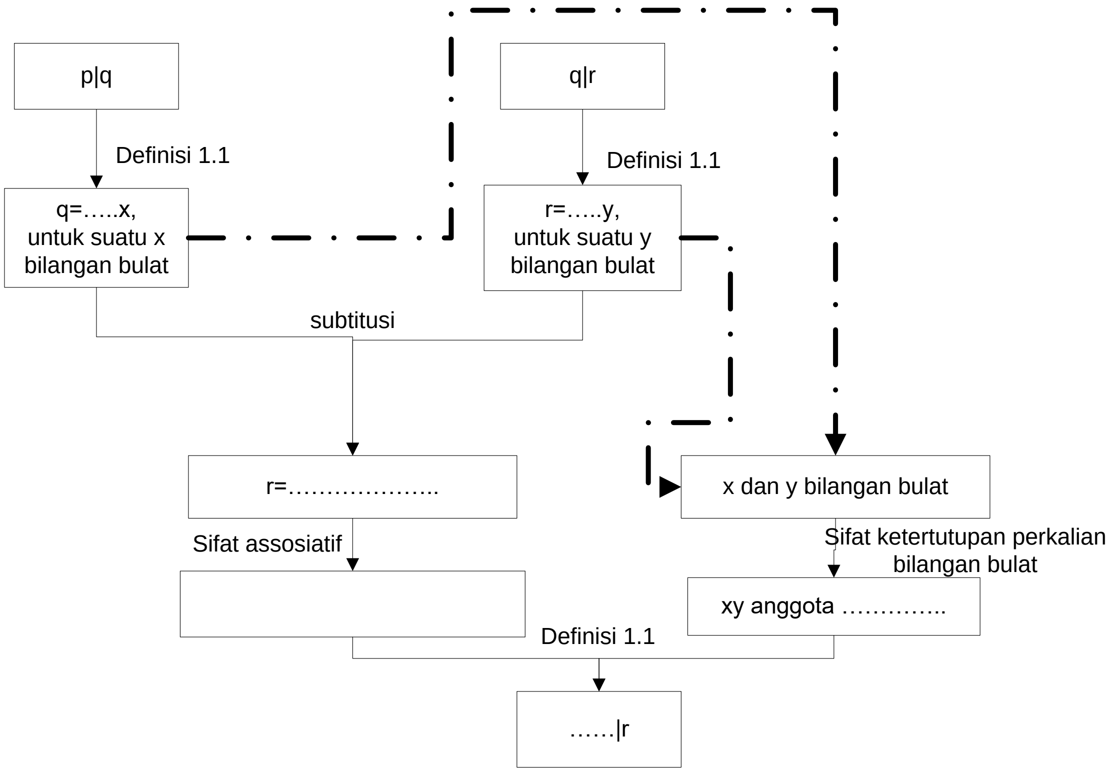
1. Tuliskan poin-poin yang diketahui dari teorema.

Diketahui :
   a. ....
   b. ....
   c. ....

2. Tuliskan poin yang akan dibuktikan.

Akan dibuktikan : ....

3. Rancang bagan alur bukti



Jika anda sudah selesai mengisi bagan, periksalah kebenaran bukti anda dengan langkah nomor 4 yang telah diisi berikut ini!

4. Dari hasil no 1, 2, dan 3 ubalah ke dalam bentuk narasi pembuktian

Diketahui :

a. $p, q, r \in Z$

b. $p|q$

c. $q|r$

Akan dibuktikan : $p|r$

Bukti:

$p|q$ maka menurut definisi 1.1 $q = px$, untuk suatu $x \in Z$ (1)

$q|r$ maka menurut definisi 1.1 $r = qy$, untuk suatu $y \in Z$ (2)

Subtitusikan (1) ke (2) sehingga didapat

$r = qy$

$\Leftrightarrow r = (px)y$

$\Leftrightarrow r = p(xy)$ (sifat assosiatif perkalian bilangan bulat) (3)

Dari (1) dan (2) didapat $x \in Z$ dan $y \in Z$ maka $xy \in Z$ (4)

Dari (3) dan (4) berdasarkan definisi 1.1 didapat $p|r$

Untuk bukti teorema 1.3, mari kita coba menyusun pembuktian tanpa menggunakan bagan pada langkah 3. Lengkapi bagian yang belum terisi dari bukti berikut ini!

Teorema 1.3

Jika p, q $\in$ Z, p | q dan q | p, maka p = $\pm$ q

1. Tuliskan poin-poin yang diketahui dari teorema.

Diketahui :

a. ....

b. ....

c. ....

2. Tuliskan poin yang akan dibuktikan.

Akan dibuktikan : ....

3. Tuliskan susunan bukti secara lengkap dalam bentuk narasi!

Diketahui :

a. ....

b. ....

c. ....

Akan dibuktikan : ....

Bukti:

$p|q$ maka menurut definisi 1.1 $q = ...x$, untuk suatu $x \in Z$ (1)

$q|p$ maka menurut definisi 1.1 $p = ...y$, untuk suatu $y \in Z$ (2)

Subtitusikan (1) ke (2)

$p = ...y$

$\Leftrightarrow p = (p......)y$

$\Leftrightarrow p = p(.......y)$ (sifat assosiatif perkalian bilangan bulat)

$\Leftrightarrow p.1 = p(.......y)$ (sifat identitas perkalian)

$\Leftrightarrow 1 = (.......y)$ (hukum kanselasi perkalian bilangan bulat)

Dengan demikian, karena x,y $\in$ Z dan ....y = 1, maka diperoleh ...... = -1 = y atau .... = 1 = y

Jika .... = -1 = y, maka p = -q

Jika ....= 1 = y, maka p = q

Latihan 1

Buktikan teorema-teorema berikut ini dengan menuliskan narasi pembuktiannya secara lengkap!

1. **Teorema 1.4**

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \mid q$ dan $p \mid r$, maka $p \mid q + r$

Teorema 1.4 dapat diperluas tidak hanya berlaku untuk q, r tetapi untuk q, r, s, t,.., artinya jika $p \mid q$, $p \mid r$, $p \mid s$, $p \mid t$, dan…, maka $p \mid q + r + s + t + \ldots$

2. **Teorema 1.5**

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \mid q$ dan $p \mid r$, maka $p \mid qx + ry$ untuk semua $x, y \in Z$ ($qx + ry$ disebut kombinasi linear dari q dan r)

3. **Teorema 1.6.**

   Jika $p, q, r \in Z$, $p > 0$, $q > 0$, dan $p \mid q$, maka $p \leq q$

4. **Teorema 1.7**

   Jika $p, q, r \in Z$, $p > 0$, $q > 0$, $p \mid q$ dan $q \mid p$, maka $p = q$.

5. **Teorema 1.8**

   $p \mid q$ jika dan hanya jika $kp \mid kq$ untuk semua $k \in Z$ dan $k \neq 0$

6. **Teorema 1.9**

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \neq 0$, $p \mid q + r$, dan $p \mid q$, maka $p \mid r$

Cocokkanlah jawaban anda dengan Kunci Jawaban yang terdapat di bagian akhir modul ini. Kemudian perkirakan skor jawaban anda yang menurut anda benar, dan gunakan kriteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan 1.

$$\text{tingkat penguasaan} = \frac{\text{skor jawaban benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan dikelompokkan menjadi :

Baik sekali : 90% - 100%

Baik : 80% - 89%

Cukup : 70% - 79%

Kurang : < 70%

Apabila anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan 2. Bagus! Jika tingkat penguasaan anda kurang dari 80%, maka seharusnya anda mengulangi materi Kegiatan 1 terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

Rangkuman

Dalam Kegiatan 1 ini, beberapa bagian yang perlu diperhatikan adalah definisi keterbagian, teorema-teorema keterbagian, dan langkah pembuktian teorema keterbagian.

1. Definisi keterbagian terkait dengan konsep membagi atau konsep faktor, dan konsep bilangan bulat genap atau bilangan bulat ganjil yang diperoleh sebagai akibat teorema pembagian.
2. Terdapat 9 teorema keterbagian yang dibahas dalam modul ini yaitu

   Jika $p, q \in Z$ dan $p \mid q$, maka $p \mid qr$ untuk semua $p \in Z$

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \mid q$, dan $q \mid r$ maka $p \mid r$

   Jika $p, q \in Z$, $p \mid q$, dan $q \mid p$, maka $p = \pm q$

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \mid q$, dan $p \mid r$, maka $p \mid q + r$

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \mid q$, dan $p \mid r$, maka $p \mid qx + ry$

   Jika $p, q, r \in Z$, $p > 0$, $q > 0$, dan $p \mid q$, maka $p \leq q$

   Jika $p, q, r \in Z$, $p > 0$, $q > 0$, $p \mid q$, dan $q \mid p$, maka $p = q$

   $p \mid q$ jika dan hanya jika $kp \mid kp$ untuk semua $k \in Z$ dan $k \neq 0$

   Jika $p, q, r \in Z$, $p \neq 0$, $p \mid q + r$, dan $p \mid q$, maka $p \mid r$

KEGIATAN 2
FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

Tujuan :

Setelah mempelajari kegiatan 2 ini, anda diharapkan mampu untuk :

3. Memahami konsep Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)
4. Membuktikan teorema, lema, serta akibat dari konsep Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Uraian Materi

Tentunya kita masih ingat mengenai apa yang dimaksud dengan faktor (pembagi) dari suatu bilangan bulat yaitu bilangan yang dapat membagi habis bilangan yang difaktorkan. Sebagai pengingat, coba cari faktor/pembagi dari 6! Jika jawaban anda adalah -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, dan 6, maka anda menjawab dengan benar.

Perhatikan dua bilangan a = 6 dan b = 8.

Jika A adalah himpunan semua faktor dari a, dan B adalah himpunan semua faktor dari b, serta C adalah himpunan semua faktor persekutuan dari a dan b, maka:

$A = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

$B = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

$C = A \cap B = \{-2, -1, 1, 2\}$

Unsur (anggota, elemen) dari C yang terbesar adalah 2

2 merupakan faktor persekutuan yang terbesar dari a = 6 dan b = 8

2 juga merupakan bilangan bulat positif terbesar yang membagi a = 6 dan b = 8

Sekarang bagaimana kalau diambil a = -6 dan b = 8

$A = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

$B = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

$C = A \cap B = \{-2, -1, 1, 2\}$

Unsur dari C yang terbesar adalah 2.

2 merupakan faktor persekutuan yang terbesar dari a = -6 dan b = 8

2 juga merupakan bilangan bulat positif terbesar yang membagi a = -6 dan b = 8

Dengan jalan yang sama, jika diambil a = -6 dan b = -8, maka juga akan diperoleh faktor persekutuan terbesar dari a dan b adalah 2.

Misal a = 0 dan b = 6

A = himpunan semua faktor a = 0

$= \{ \ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

B = himpunan semua faktor b = 6

= {-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6}

C = A $\cap$ B

= {-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6}

Unsur yang terbesar dari C adalah 6, berarti (a, b) = (0, 6) = 6

Untuk a = 0 dan b = 0, perhatikan bahwa:

A = {…, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, …}

B = {…, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, …}

C = {…, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, …}

Sehingga tidak mungkin menentukan unsur yang terbesar dari C, atau faktor persekutuan terbesar dari a = 0 dan b = 0 tidak ada.

Definisi 2.1

Ditentukan x, y $\in$ Z, x dan y keduanya bersama-sama bernilai 0.

p $\in$ Z disebut pembagi (faktor) persekutuan (common divisor, common factor) dari x dan y jika $p \mid x$ dan $p \mid y$.

p $\in$ Z disebut pembagi (faktor) persekutuan terbesar (FPB) dari x dan y jika p adalah bilangan bulat positif terbesar yang sedemikian hingga $p \mid x$ dan $p \mid y$.

Notasi:

d = (x, y) dibaca d adalah faktor (pembagi) pesekutuan terbesar dari x dan y

d = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dibaca d adalah faktor (pembagi) persekutuan terbesar dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$

setelah ini kita akan mempelajari teorema pertama yang sering digunakan dalam pembuktian FPB. Perhatihan teorema 2.1 yang memuat tentang kombinasi linier dari FPB serta lengkapi titik yang rumpang!

Teorema 2.1

Jika d = (x, y), maka d adalah bilangan bulat posisitif terkecil yang mempunyai bentuk px + qy untuk suatu m, n $\in$ Z, yaitu d dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari x dan y.

Diketahui :
....

Akan dibuktikan :
....

Bukti :

1. Dibentuk kombinasi linear $(px + qy)$ dengan $p, q \in Z$
   Barisan bilangan $(px + qy)$ memuat bilangan-bilangan yang bernilai negatif, bilangan nol (untuk $p = 0$ dan $q = 0$), dan bilangan-bilangan yang yang bernilai positif.
2. Ambil $S = \{px + qy \mid px + qy > 0 \text{ dan } p,q \in Z \}$, maka dapat ditentukan bahwa $S \subset N$. Karena $S \subset N$ dan N merupakan himpunan yang terurut rapi, maka S mempunyai unsur terkecil, sebutlah dengan t.
3. Karena $t \in S$, maka tentu ada $p = m$ dan $q = n$ sehingga $t = mx + ny$. Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa $t \mid x$ dan $t \mid y$.
4. Untuk membuktikan $t \mid x$ digunakan bukti tidak langsung. Misalkan $t \,\Theta\, x$, maka menurut teorema 1.9 pada kegiatan 1, ada $r, s \in Z$ sehingga
   $x = tr + s,\ 0 < s < t$
   $x = tr + s$
   $s = x – tr$
   $s = x – (mx + ny)\, r$
   $s = (1 – mr)x + (-ny)r$
   $s = ix + jy$ dengan $i = 1 – mr \in Z$ dan $j = -nq \in Z$
   Jadi: $s = ix + jy \in S$ dengan $s < t$
5. Dengan anggapan $t \,\Theta\, x$ ternyata menghasilkan kontradiksi karena t adalah unsure terkecil S, dengan demikian anggapan $t \,\Theta\, x$ adalah salah, berarti $t \mid x$
6. Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa $t \mid y$
7. Dari $t \mid x$ dan $t \mid y$ berarti t adalah faktor persekutuan dari x dan y. Karena t adalah faktor persekutuan dari x dan y, dan d adalah faktor persekutuan terbesar dari x dan y, maka $t \leq d$
8. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $d \leq t$
9. $d = (x, y)$, maka menurut definisi 2.3, $d \mid x$ dan $d \mid y$
   $d \mid x$ dan $d \mid y$, maka menurut definisi 2.1, $x = dv$ untuk suatu $v \in Z$ dan $y = dw$ untuk suatu $w \in Z$.
10. $t = mx + ny$
    $t = m(dv) + n(dw)$
    $t = d(mv + nw)$, berarti $d \mid t$
11. Karena $d \mid t$, $d > 0$, dan $t > 0$, maka sesuai dengan teorema 2.6, $d \leq t$
12. Karena $t \leq d$ dan $d \leq t$, maka $d = t$
13. Jadi: d adalah bilangan bulat positif terkecil yang mempunyai bentuk $mx + ny$ dengan $m, n \in Z$.

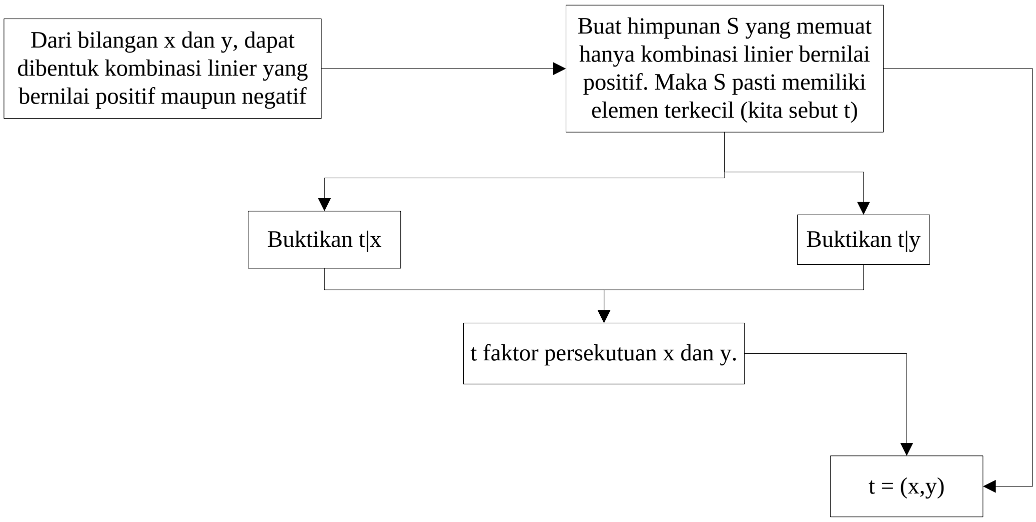
Berdasarkan bukti dari teorema 2.1, coba buatlah bagan alur berpikir secara sederhana dari bukti tersebut pada tempat yang disediakan berikut.

Box 1 :

1. Perhatikan bentuk dari kombinasi linier yang bisa bernilai positif maupun negatif
2. Bentuk himpunan yang memuat hanya kombinasi linier bernilai positif untuk menunjukkan bahwa ada anggota dengan nilai paling kecil
3. ....
   ....
   (lanjutkan dengan menjelaskan tujuan dari setiap poin langkah yang ada pada bukti)

Setelah anda menyelesaikan box 1, periksalah apakah apa yang anda tuliskan sesuai dengan bagan berikut pada box 2 ini?

Box 2 :



Jika anda tidak memahami makna dari bagan 1 maka cobalah bertanya pada dosen mata kuliah anda. Untuk teorema selanjutnya, coba buatlah garis besar langkah-langkah pembuktiannya pada box 3 seperti pada box 1 atau box 2.

Teorema 2.2

Jika $k \in N$, maka $k(x, y) = (kx, ky)$

Diketahui : ....

Akan dibuktikan : ....

Box 3 :

Jika garis besar bukti yang anda tulis benar, maka akan merumuskan pemikiran alur bukti box 4.

Box 4

Bukti:

1. Misalkan $d = (x, y)$ dan $e = (kx, ky)$, maka menurut teorema 2.11, $d = rx + sy$ dan $e = mkx + nky$ untuk suatu $r, s, m, n \in Z$.
2. $d = rx + sy$, maka $kd = krx + ksy$
3. Karena $d = (x, y)$, maka menurut definisi 2.1, $d \mid x$ dan $d \mid y$, dan menurut teorema 1.8, $kd \mid kx$ dan $kd \mid ky$
4. Menurut teorema 1.1, $kd \mid kx$ dan $kd \mid ky$ berakibat $kd \mid mkx$ dan $kd \mid nky$, dan menurut teorema 1.4, $kd \mid mkx + nky$, atau $kd \mid e$. Jadi: $k(x, y) \mid (kx, ky)$.
5. Selanjutnya, karena $e = (kx, ky)$, maka menurut difinisi 1.3, $e \mid kx$ dan $e \mid ky$, dan menurut teorema 1.8, $e \mid krx$ dan $e \mid ksy$.
6. Menurut teorema 1.4, $e \mid krx$ dan $e \mid kry$ berakibat $e \mid krx + ksy$, atau $e \mid khd$. Jadi: $(kx, ky) \mid k(x, y)$
7. Karena $k(x,y) > 0$, $(kx,ky) > 0$, $k(x, y) \mid (kx, ky)$, dan $(kx, ky) \mid k(x, y)$, maka menurut teorema 1.7, $k(x, y) = (kx, ky)$

Latihan 2

Buktikan teorema-teorema berikut ini dengan menuliskan garis besar ide bukti dan narasikan pembuktiannya secara lengkap!

1. **Teorema 2.3**

   Jika x, y $\in$ Z dan d = (x, y), maka $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) = 1$

2. **Teorema 2.4**

   Jika p, q, r $\in$ Z, $p \mid qr$, dan (p, q) = 1, maka $p \mid r$

3. **Teorema 2.5**

   Jika (x, t) = 1 dan (y, t) = 1, maka (xy, t) = 1

4. **Teorema 2.6**

   Ditentukan x, y $\in$ Z

   d = (x, y) jika dan hanya jika d > 0, $d \mid x$, $d \mid y$, dan $f \mid d$ untuk setiap pembagi persekutuan f dari x dan y

5. **Teorema 2.7**

   (x, y) = (y, x) = (x, -y) = (-x , y) = (-x, -y) untuk sebarang x, y $\in$ Z.

6. **Teorema 2.8**

   a. (x, y) = (x, y + ax) untuk sebarang a $\in$ Z

   b. (x, y) = (x + yb, y) untuk sebarang b $\in$ Z

Cocokkanlah jawaban anda dengan Kunci Jawaban yang terdapat di bagian akhir modul ini. Kemudian perkirakan skor jawaban anda yang menurut anda benar, dan gunakan kriteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan 2.

$$\text{tingkat penguasaan} = \frac{\text{skor jawaban benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan dikelompokkan menjadi :

Baik sekali : 90% - 100%

Baik : 80% - 89%

Cukup : 70% - 79%

Kurang : < 70%

Apabila anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan 3. Bagus! Jika tingkat penguasaan anda kurang dari 80%, maka seharusnya anda mengulangi materi Kegiatan 2 terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

Rangkuman

Dalam Kegiatan Belajar 2 ini, secara keseluruhan materi pembahasan terkait dengan konsep FPB, di dalamnya banyak berbicara tentang definisi dan teorema serta pembuktiannya.

1. (x,y) adalah notasi untuk menyatakan fpb dari x dan y

   (x,y) adalah suatu bilangan bulat positif terbesar yang membagi x dan membagi y

3. Terdapat 8 teorema tentang fpb dan kpk

   2.1 $d = (x,y)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil yang merupakan kombinasi linier dari x dan y

   2.2 Jika $k \in N$, maka $k(x,y) = (kx,ky)$

   2,3 Jika $d = (x,y)$, maka $(x/d , y/d) = 1$

   2.4 Jika $p \mid qr$ dan $(p,q) = 1$, maka $p \mid r$

   2.5 Jika $(x,t) = 1$ dan $(y,t) = 1$, maka $(xy,t) = 1$

   2.6 Jika f adalah suatu factor persekutuan dari x dan y , maka $f \mid (x,y)$

   2.7 $(x,y) = (y,x) = (x,-y) = (-x,y) = (-x,-y)$

   2.8 $(x,y) = (x, y + ax) = (x + by , y)$ untuk sebarang $a,b \in Z$

KUNCI JAWABAN

LATIHAN 1

1. Karena p | q dan p | r, maka menurut definisi 2.1, ada $x,y \in Z$ sehingga q = px dan r = py. Dengan demikian q + r = px + py = p(x + y) Kerena $x,y \in Z$, maka sesuai dengan sifat tertutup penjumlahan bilangan bulat, $x + y \in Z$ Jadi : p | q + r
2. p|q ➔ p|qx (teorema)
   p|r ➔ p|ry (teorema) p|qx+ry (teorema)
3. Karena p | q, maka menurut definisi 2.1, ada $x \in Z$ sehingga q = px. Karena p > 0, q > 0, dan q = px, maka x > 0. Karena $x \in Z$ dan x > 0, maka kemungkinan nilai-nilai x adalah 1, 2, 3, …, yaitu x = 1 atau x > 1.
   Jika x = 1, maka q = px = p(1) = p.
   Jika x > 1, dan q = px, maka p < q
   Jadi $p \leq q$
4. p|q dan p,q > 0 ➔ $p \leq q$
   q|p dan p,q >0 ➔ $q \leq p$ p=q (sifat trikotomi bilangan bulat)
5. p|q ➔ q=px (definisi) ➔ kq=(kp)x (hukum kanselasi dan sifat asosiatif perkalian bilangan bulat) ➔ kp|kq. (bukti ini dapat berjalan sebaliknya)
6. p|q ➔ q = py (definisi)
   p|q+r ➔ q+r = px (definisi) py+r=px (substitusi)➔ r =px-py (hukum kanselasi penjumlahan bilangan bulat ➔ r=p (x-y) (sifat distributif) ➔p|r (definisi)

LATIHAN 2

1. Misalkan $x, y \in Z$ dan (x, y) = d. Kita akan tunjukkan bahwa $\frac{x}{d}$ dan $\frac{y}{d}$ tidak mempunyai pembagi persekutuan yang positif kecuali 1. Misalkan e adalah suatu bilangan bulat positif yang membagi $\frac{x}{d}$ dan membagi $\frac{y}{d}$, yaitu e $\mid \frac{y}{d}$ dan e $\mid \frac{y}{d}$, Maka, menurut difinisi 2.1, $\frac{x}{d}$ = ke dan $\frac{y}{d}$ = te untuk suatu $k, t \in Z$. Dengan demikian x = dek dan y = det, berarti de adalah faktor pesekutuan dari x dan y. Karena de adalah faktor persekutuan dari x dan y, dan d adalah faktor persekutuan

terbesar dari x dan y, maka de $\leq$ d. Akibatnya e haruslah sama dengan 1. Jadi: $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) = 1$

2. Diketahui (p, q) = 1, maka menurut teorema 2.11, 1 adalah bilangan bulat positif terkecil yang dapat dinyatakan sebagai px + qy dengan x, y $\in$ Z , yaitu px + qy = 1 Karena px + qy = 1, maka rpx + rqy = r, atau prx + qry = r. Menurut teorema 2.1, karena p $\mid$ qr, maka p $\mid$ qry untuk semua y $\in$ Z. Selanjutnya, karena p $\mid$ prx dan p $\mid$ qry, maka menurut teorema 2.4, p $\mid$ prx + qry. Jadi: p $\mid$ r.
3. Diketahui (x, t) = 1 dan (y, t) = 1, maka menurut teorema 2.11, ada p, q, r, s $\in$ Z sehingga px + qt = 1 dan ry + st = 1. Dari 1 = px + qt dan 1 = ry + st dapat ditentukan bahwa

$$\begin{aligned} 1.1 &= (px + qt)(ry + st) \\ 1 &= prxy + pstx + qrty + qst^2 \\ 1 &= (pr)(xy) + (psx + qry + qst)t \end{aligned}$$

Dengan demikian, sesuai teorema 2.11, karena 1 merupakan bilangan bulat positif terkecil yang merupakan kombinasi linear dari xy dan t, maka: (xy, t) = 1
4. Kita buktikan jika d = (x, y), maka d > 0, d $\mid$ x, d $\mid$ y, dan f $\mid$ d

d = (x, y), maka menurut definisi 2.3, d adalah bilangan bulat positif (d > 0) terbesar yang membagi x (d $\mid$ x) dan membagi y (d $\mid$ y)

Selanjutnya, menurut teorema 2.11, jika d = (x, y), maka d = mx + ny untuk suatu m, n $\in$ Z

Misalkan f adalah sebarang pembagi persekutuan dari x dan y, maka f $\mid$ x dan f $\mid$ y, dan menurut teorema 2.1, f $\mid$ mx dan f $\mid$ ny untuk sebarang m, n $\in$ Z

Menurut teorema 2.4, f $\mid$ mx dan f $\mid$ ny berakibat f $\mid$ mx + ny.

Karena f $\mid$ mx + ny dan d = mx + ny, maka f $\mid$ d.

Kita buktikan jika d > 0, d $\mid$ x, d $\mid$ y, dan f $\mid$ d untuk sebarang pembagi persekutuan f dari x dan y, maka d = (x, y)

Karena d > 0 , d $\mid$ x dan d $\mid$ y, maka d adalah faktor persekutuan dari x dan y.

Selanjutnya, karena f adalah sebarang faktor persekutuan dari x dan y dan f $\mid$ d, maka f $\leq$ d, d dan f adalah faktor-faktor persekutuan dari x dan y, f adalah sebarang faktor persekutuan dari x dan y, dan f $\leq$ d, maka d adalah faktor persekutuan yang terbesar dari x dan y.

Jadi: d = (x, y).

DAFTAR PUSTAKA

Muhsetyo, Gatot. 1995. *Dasar-dasar Teori Bilangan (diktat)*. Malang: FMIPA IKIP Malang.

Zuckerman, Niven. 1989. *An Introduction to The Theory Numbers*. New York: Addison Wesley.

Rosen, Kenneth H. 2005. *Elementary Number Theory and Its Application Fifth Edition.* New York: Addison Wesley.