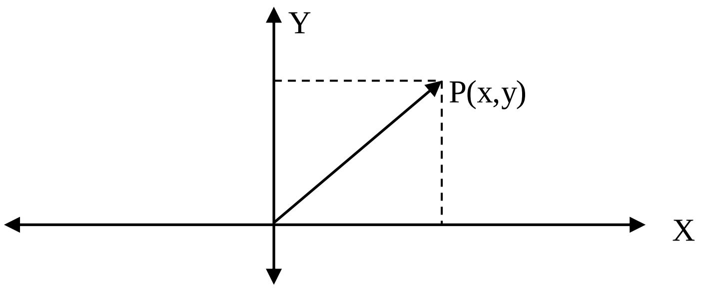
VEKTOR DAN SKALAR

Pada beberapa bidang, kita sudah mengenal istilah waktu, suhu, massa, dan volume yang masing-masing mempunyai besar (panjang atau nilai). Hal itulah yang dikenal dengan skalar yang dinotasikan dengan lower case italic letter, misalnya a, b, c dst. Selain itu, ada juga beberapa besaran yang sudah kita kenal, antara lain kecepatan, percepatan, gaya, momentum, medan magnet, medan listrik dst yang tidak hanya mempunyai besar tetapi juga mempunyai arah. Besaran tersebut yang dikenal dengan besaran vector. Vektor dinotasikan dengan lowercase boldface letter, misalnya u, v, w dst. Ada beberapa buku yang menggunakan notasi vector seperti misalnya u atau . Tetapi pada modul ini, kita sepakati bersama bahwa untuk menotasikan vector dengan lo dwercase boldface letter.

VEKTOR PADA BIDANG (DEMENSI 2)

Cobalah menggambar sepasang garis yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik O, yang selanjutnya disebut titik pusat/origin. Garis yang horizontal disebut sumbu x sedangkan garis yang vertical disebut sumbu y. Sumbu x dan sumbu y bersama-sama disebut sumbu koordinat serta keduanya membentuk system koordinat kartesius. Gambarkan pada lembar jawaban berikut!



Sekarang, kita pilih sebuah titik pada sumbu x yang terletak di kanan titik O dan sebuah titik pada sumbu y di atas titik O untuk menetapkan titik pada sumbu x dan y yang bernilai positip. Setiap titik P pada bidang adalah pasangan berurutan (x,y) dari bilangan real yang selanjutnya disebut dengan koordinat. Titik P dengan koordinat (x,y) dinyatakan dengan P(x,y)atau (x,y)

Misalkan A = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dengan x dan y adalah bilangan real. Sehingga X adalah ruas garis berarah dengan pangkal O dan ujung P(x,y). Garis berarah dari O ke P dinyatakan dengan $\overrightarrow{OP}$; O disebut pangkal dan P disebut ujung.

Definisi 1.1

Sebuah Vektor pada Bidang adalah matriks berukuran 2 × 1,

a = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Dengan x, y ∈ R

Atau vector dapat kita definisikan vector adalah ruas garis berarah yang panjang dan arahnya

tertentu.

Karena vector adalah sebuah matrik maka vector

a = $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, dan b = $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, dikatakan sama (a=b) jika dan hanya jika $x_1 = x_2$, dan $y_1 = y_2$,

Contoh :

Vektor $\begin{bmatrix} a+2 \\ 3b+1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -6 \\ -b \end{bmatrix}$ adalah sama, jika :

a + 2 = -6 ↔ a = -8

3b + 1 = -b ↔ b = -1/4

Jadi dua vektor tersebut sama jika a = -8 dan b = - ¼

OPERSASI VEKTOR

PENJUMLAHAN VEKTOR

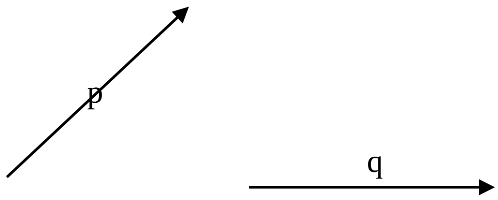
Misal: a = $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, dan b = $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, adalah vektor dalam bidang (R2), maka jumlah a dan b adalah :

a + b = $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ dan jika t adalah sebarang skalar, maka perkalian skalar dan vektor didefisikan : t a = t $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ ty_1 \end{bmatrix}$ atau ta = (tx_1, ty_1)

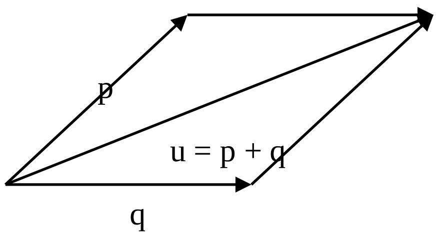
Contoh:

Misalkan p = $\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$, dan q = $\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$, maka p + q = $\begin{bmatrix} 5-1 \\ -7-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -13 \end{bmatrix}$

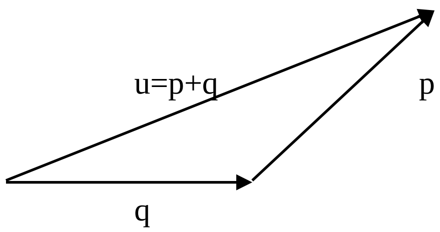
Secara Geometri penjumlahan vektor difambarkan sebagai berikut :



maka p + q, adalah :



atau



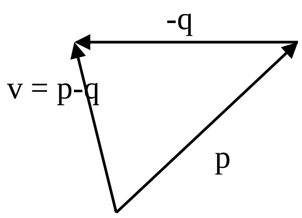
langkahnya adalah sebagai berikut :

Sehingga p+q adalah vector yang diwakili oleh segmen garis berarah yang pangkalnya berimpit

dengan pangkal q dan ujungnya berimpit dengan ujung p yang telah dipindahkan sedemikian

sehingga pangkal p berimpit dengan ujung q.

sedangkan jika vektor p dikurangi vektor q , maka gambarnya sebagai berikut:



PERKALIAN TITIK

Perkalian titik vector a dan b dituliskan a · b (dibaca a dot b) dan didefinisikan sebagai berikut

$a.b = |a||b|\cos\theta$, θ adalah sudut antara a dan b

Berdasarkan definisi perkalian scalar dua vector tersebut, jika i, j ,k berturut-turut adalah vector

satuan dengan arah sumbu x, y, dan z, maka:

$$i.i = j.j = k.k = 1$$
$$i.j = i.k = j.k = 0$$

Teorema berikut akan menguraikan beberapa sifat penting dari hasil kali titik.

Definisi 1.4

Teorema 1.1

Jika u,v dan w adalah vector-vektor di ruang-2 atau ruang-3 dan k adalah scalar, maka

a. u . v = v . u
b. u. (v + w) = u.v + u.w
c. k(u.v) = (ku).v = u. (kv)
d. v.v > 0, jika v $\neq$ 0 dan v.v = 0, jika v = 0

Definisi 1.53

Jika $p = (u_1, u_2, u_3, ...u_n)$ dan $q = (v_1, v_2, v_3, ...v_n)$ adalah vektor dalam demensi n (R^n), maka hasil kali dalam/perkalian titik didefinisikan dengan :

$$p.q = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + ... + u_nv_n$$

PERKALIAN CROSS

Dalam banyak penerapan vector untuk soal-soal geometri, fisika dan teknik, kita perlu

membentuk vector di ruang demensi 3 (R^3) yang tegak lurus terhadap dua vector yang diberikan. Disini akan dijelaskan tentang perkalian vector tersebut

Definisi 1.6

Jika $p = (u_1, u_2, u_3)$ dan $q = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor dalam demensi 3 (R^3), maka hasil perkalian cros didefinisikan dengan :

$$pxq = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Atau dalam bentuk diterminan :

$$pxq = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \right)$$

Atau terdapat pola yang dapat digunakan untuk mempermudah pengerjaan,

yaitu matriks 2 × 3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Dimana entri baris pertama adalah komponen factor pertama p dan entri baris kedua adalah

komponen factor kedua q, maka determinan dalam komponen pertama p x q dapat diperoleh

dengan cara mencoret kolom pertama matriks tersebut, determinan dalam komponen kedua

kita dapatkan dengan cara mencoret kolom kedua dari matriks tersebut, sedangkan determinan

dalam komponen ketiga kita dapatkan dengan cara mencoret kolom ketiga dari matriks tersebut.

Contoh :

Tentukan p x q, jika diketahui p = (-2,4,5) dan q = (2, -9,-1) ?

Jawab :

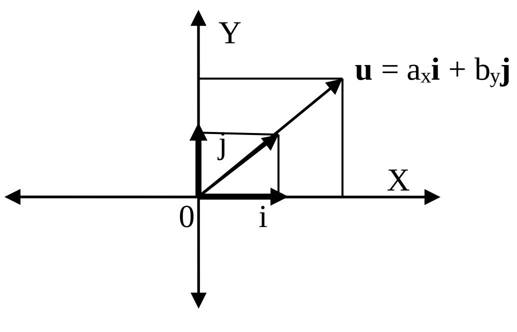
$$p \text{ X } q = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -9 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} \right) = (41, -8 , 10)$$

Sehingga dapat dilihat bahwa hasil kali cross antara dua buah vector adalah vector.

D. Vektor dalam demensi dua (R^2):

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu satuan dan arahnya sesuai dengan sumbu utama, yakni :
i adalah vektor satuan yang searah sumbu ***x*** (absis)
j adalah vektor satuan yang searah sumbu ***y*** (ordinat)



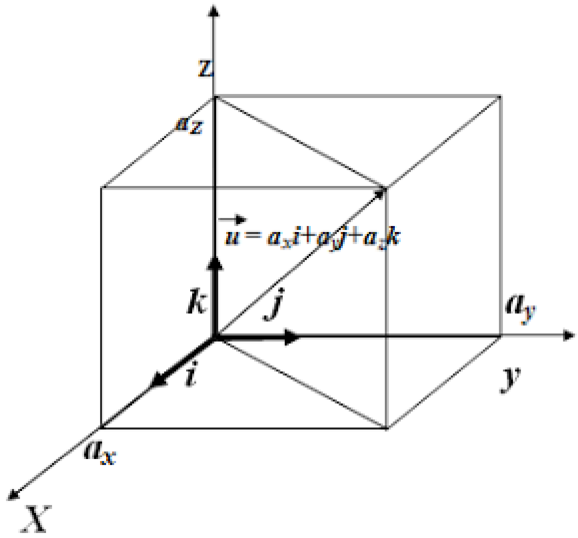
u = a_x**i** + b**j** , dengan a_x sebagai komponen sumbu x , dan a_y komponen arah sumbu dan sering ditulis dengan :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

E. Vektor dalam demensi Tiga (R^3):

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu satuan dan arahnya sesuai dengan sumbu utama, yakni :

i adalah vektor satuan yang searah sumbu ***x*** (absis)
j adalah vektor satuan yang searah sumbu ***y*** (ordinat)
k adalah vektor satuan yang searah sumbu ***z*** (aplikat)



$\mathbf{u} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$,
dengan a_x sebagai komponen arah sumbu x, dan a_y komponen arah sumbu y dan a_z adalah komponen arah sumbu z.

Bentuk tulisan vektor

$\mathbf{u} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

dan lebih sering dituliskan dalam

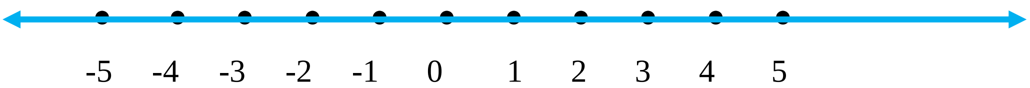
$$u = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

DEMENSI SATU (R^1)

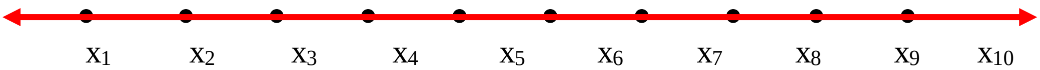
A. Sistem Koordinat Satu Demensi

Kita dapat menghubungkan elemen aljabar yaitu himpunan bilangan Real dengan elemen geometri yaitu titik-titik pada garis lurus. Hubungan itu disebut korespondensi satu-satu, artinya untuk setiap bilangan Real tertentu di hubungkan dengan titik tertentu pada suatu garis lurus .

Bentuk Koordinat satu demensi adalah sebagai berikut :



Jarak titik dalam koordinat satu demensi:



Jarak antara titik x_1 dan x_2 = $x_2 - x_1$, sedangkan jarak x_2 dan

$x_{10} = x_{10} - x_2$,

sedemikian sehingga jarakl tersebut selalu positip.

Sehubungan dengan hal tersebut perlu didefinisikan harga mutlak (absulut) suatu bilangan Real.

Harga mutlak dari sutu bilangan Real x didefinisikan sebagai :

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ jika } x > 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \\ 0, \text{ jika } x = 0 \end{cases}$$

Dengan demikian jarak antara x_1 dan x_2 adalah $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

DEMENSI DUA (R^2)

A. Sistem Koordinat Dua Demensi (R^2)

Salah satu konsep yang penting dalam matematika adalah hubungan atau ketergantungan antara dua himpunan bilangan. Nilai kedua bilangan yang berhungan dapat dipandang sebagai pasangan bilangan. Sistem koordinat dua demensi menggunakan hubungan antara titik dengan pasangan bilangan.

Untuk itu perlu kita perhatikan definisi produk Cartesian dari dua himpunan.

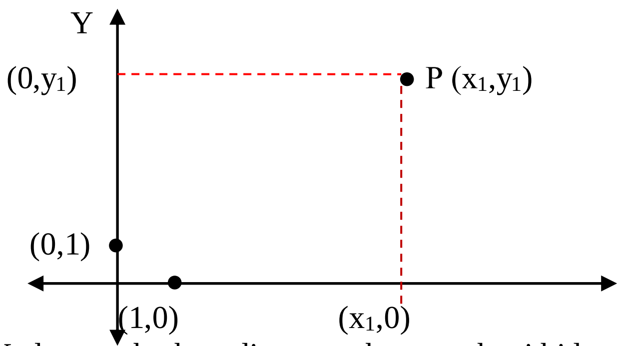
Secara simbolis produk Cartesian ditulis sebagai berikut :

$R \ x \ R = \{ (x,y) / x\varepsilon \ R \text{ dan } y\varepsilon \ R\}$

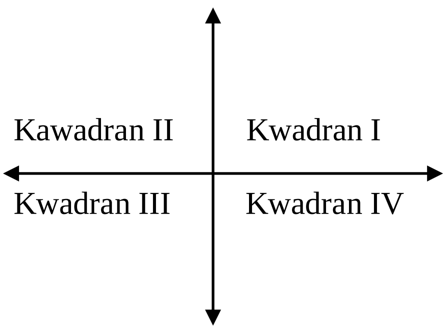
Sistim yang sering digunakan untuk menghubungkan tiap titik pada bidang datar dengan pasangan bilangan Real berurutan adalah Sistem Koordinat Cartesian tegak lurus.

Nama Sistem Koordinat Cartesian sebagai penghargaan kepada penemu sistem tersebut , yaitu Rene Descartes tahun 1637.

Bentuk koordinat Cartesian dua demensi Adela sebagai berikut :



Kedua sumbu koordinat tersebut membagi bidang koordinat menjadi 4 bagian yang disebut dengan Kwadran. Adapu pembagainnya sebagai berikut :



Kwadran	Absis	Ordinat
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Contoh soal :

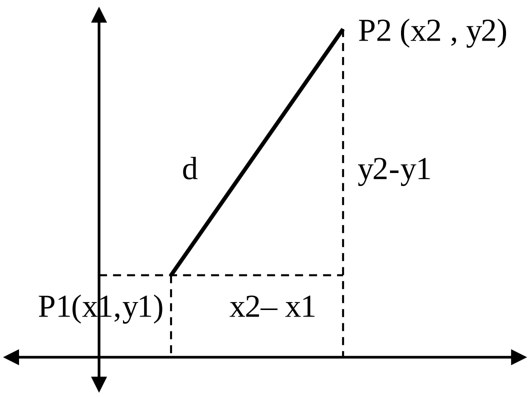
Tentukan titik-tik dibawah ini terletak di kwadran ke barapa ?

1. (-3, 7)   2. (4,-9)   3. (-3,-6)   4. (7,10)

Jawab :

1. (-3 , 7), terletak pada kwadran ke II, karena x < 0 dan y >0
2. (4,-9) , terletak pada kwadran ke VI, karena x >0 dan y <0
3. (-3,-6), terletak pada kwadran ke III, karena x<0 dan y <0
4. (7,10), terletak pada kwadran ke I, karena x >0 dan y >0

B. Jarak Antara Dua Titik Dalam Sistem Demensi Dua (R^2)



Jarak antara dua titik P1 (x1,y1) dan P2(x2,y2) dapat dilihat dari gambar disamping. Dengan menggunakan dali Pythagoras, maka :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

atau

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Contoh :

Tentukan jarah antara dua titik berikut ini :

1. (-2,8) dan (7,-9)
2. (0,-1) dan (-9,8)
3. (-2,-3) dan (-4,-5)

Jawab :

1. (-2,8) dan (7,-9)

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ atau $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$d = \sqrt{(7-(-2))^2 + (-9-8)^2}$ $d = \sqrt{(-2-(7))^2 + (8-(-9))^2}$

$d = \sqrt{81+289} = \sqrt{370} = 19{,}24$ $d = \sqrt{81+289} = \sqrt{370} = 19{,}24$

2. (0,-1) dan (-9,8)

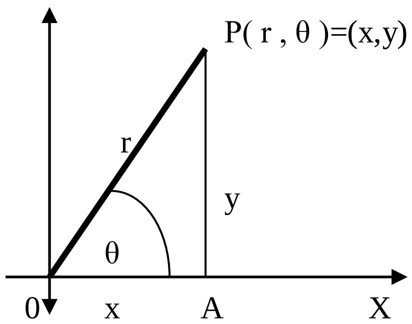
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{atau} \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$d = \sqrt{(-9-(0))^2 + (8-(-1))^2} \qquad d = \sqrt{(0-(-9))^2 + (-1-(8))^2}$$
$$d = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = 12{,}73 \qquad d = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = 12{,}73$$

4. (-2,-3) dan (-4,-5)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{atau} \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$d = \sqrt{(-4-(-2))^2 + (-5-(-3))^2} \qquad d = \sqrt{(-2-(-4))^2 + (-3-(-5))^2}$$
$$d = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2{,}83 \qquad d = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 12{,}73$$

C. Sistem Koordinat Polar (Kutub)

Dalam sistem ini kita mempunyai titik tetap yang disebut sebagai Pole (kutub), dan garis berarah horisontal (0A) yang disebut sebagai Sumbu Polar (sumbu kutub)



Perhatikan gambar disamping:
Koordinat polar dari sembarang titik P pada bidang datar ditulis P(r,θ) dimana r adalah jarak OP dan θ Adela sudut AOP.Sudut θ positip jika diukur dari OA ke OP berlawanan arah jarum jam, dan sudut θ negatip jika diukur dari OA ke OP searah jarum jam

Hungan koordinat cartesian dan koordinat kutub:

Dari gambar diatas terlihat bahwa :

Titik P mempunyaai koordinat (x,y) dalam sistem koordinat Cartesian dan (r,θ) dalam koordinat polar (kutub).

Dari gambar tersebut , kita bisa menentukan :

Sin θ = $\frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r.\sin\theta$ dan Cos θ = $\frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r.\cos\theta$

Sedangkan : r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Contoh :

1. Nyatakan titik berikut ini dalam koordinat kutub :
   a. P (-2 , 2)
   b. Q (-$\sqrt{3}$, -1)

2. Nyatakan dalam koordinat cartesian

   a. R (5, 45^o)

   b. S (9 , 135^o)

Jawab :

1. a. P (-2 , 2)

   x = -2 dan y = 2 (titik berada di kuadran II)

   r = $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   tg α = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{-1} = -2 \Leftrightarrow \alpha = arc.tg\ (-2) = 135^o$

   Jadi P (2$\sqrt{2}$, 135^o)

   b. Q (-$\sqrt{3}$,- 1)

   x = -$\sqrt{3}$ dan y = -1 (titik berada di kuadran III)

   r = $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

   tg α = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = arc.tg\ (\dfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 210^o$

   Jadi P (2,210^o)

2. a. R (5, 45^o)

   r = 5 dan α = 45^o

   maka : x = r Cos α = 5 Cos 45^o = 5 . $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ = $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

   y = r Sin α = 5 Sin 45^o = 5 . $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ = $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

   Jadi R ($\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$, $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$)

   b. S (9 , 135^o)

   r = 9 dan α = 135^o

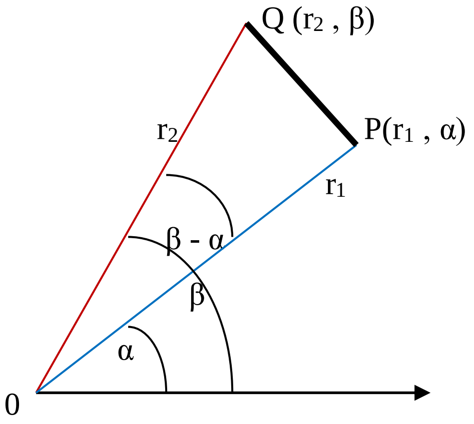
   maka : x = r Cos α = 9 Cos 135^o = 9 . -$\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ = -$\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

   y = r Sin α = 9 Sin 135^o = 9 . $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ = $\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

Jadi R $(-\frac{9}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{2}\sqrt{2})$

D. Jarak Antara Dua Titik Pada Sistem Koordinat Polar

Jarak $P(r_1, \alpha)$ dan $Q(r_2, \beta)$ dapat ditentukan sebagai berikut :



Perhatikan gambar disamping:

Dengan menggunakan Rumus Cosinus:

Jarak PQ = $\sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos(\alpha - \beta)}$

Contoh :

Tentukan jarak titik P(3, 30°) dan titik Q(7,60°) ?

Jawab :

Jarak PQ = $\sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2.3.7\cos(60-30)^0}$

$= \sqrt{3^2 + 7^2 - 2.3.7\cos(60-30)^0} = \sqrt{9 + 49 - 42Cos30^0}$

$= \sqrt{58 - 21\sqrt{3}} = \sqrt{58 - 36{,}37} = \sqrt{21{,}63} = 4{,}65$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan letak titik-titik : A(3), B(-5), C(6), dan (-3) dalam system koordinat satu demensi ?
2. Tentukan letak titik-titik yang korrrdiantnya memenuhi :
   |x| = 2 , |x- - 1| = 3 , |1 - x| = 2, dan |2 + x| = 2
3. Tentukan lokasi titik-titik yang koordinatnya memenuhi ketidaksamaan dibawah ini :

   a. $x > 2$ b. $x - 3 < 0$ c. x^2-8x+15 ≤ 0 d. $\frac{2-x}{x-1} > 0$
4. Tentukan jarak antara titik-titik dibawah ini :

a. A(-1) dan B(5) c. P(-4) dan Q(-7)

b. R(9) dan S(-6) d.M(7) dan N(4)

5. Selidiki secara geometris letak titik-titik yang koordinatnya memenuhi ketidaksmaan dibawah ini :

   a. $|x| < 1$ b. $|x-5| \leq 1$ c. $|x+3| \geq 2$

6. Teletak di kwadran berapa titik berikut ini :

   a. A(2,3) b. B(2,-5) c. C(-2,4) d.D(-2,-3)

7. Tentukan absis dan ordinat dari titi-titik berikut ini :

   a. A(2,3) b. B(2,-5) c. C(-2,4) d.D(-2,-3)

8. Gambarlah dalam koordinat Cartesian demensi dua, titik dibawah ini :

   a. P(3,45^o) b. Q(5,90^o) ` c. R(4,60^o) d. S(2,330^o)

9. Tentukan jarak antara titik-titik berikut ini :

   a. M(3,45^o) dan Q(5,90^o) b. R(4,60^o) dan S(2,330^o)

   c. Q(5,90^o) dan S(2,330^o) d. P(3,45^o) dan R(4,60^o)

10. Nyatakan dalam koordinat kutub titik berikut ini :

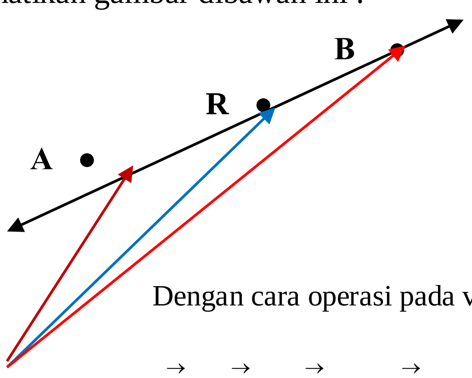
    a. A(2,3) b. B(2,-5) c. C(-2,4) d.D(-2,-3)

11. Nyatakan dalam koordinat Cartesian titik berikut ini :

    a. P(3,45^o) b. Q(5,90^o) ` c. R(4,60^o) d. S(2,330^o)

F. Pembagian Segmen Garis Dalam Perbandingan Tertentu

Perhatikan gambar dibawah ini :



diketahui koordinat titik A (p,q) dan B (r,s), kita bisa mencari koordinat titik R (x,y), jika perbandingan $\frac{AR}{RB} = \frac{m}{n}$

Dengan cara operasi pada vektor ,

$$\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{0R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{0R} - \overrightarrow{0A} \text{ dan } \overrightarrow{0R} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0B} \Leftrightarrow \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0R}$$

$\vec{OA} = (p-0)i + (q-0)j = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\vec{AR} = (x-p)i + (y-q)j = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$,

$\vec{OR} = (x-0)i + (y-0)j = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{RB} = (r-x)i + (s-y)j = \begin{pmatrix} r-x \\ s-y \end{pmatrix}$,

$\vec{OB} = (r-0)i + (s-0)j = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

$\vec{AR} = \vec{0R} - \vec{0A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$ dan $\vec{RB} = \vec{0B} - \vec{0R} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-x \\ s-y \end{pmatrix}$

$\dfrac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow \vec{AR} = \dfrac{m}{n}\vec{RB} \Leftrightarrow$ n $\vec{AR}$ =m $\vec{RB}$

n $\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$ = m$\begin{pmatrix} r-x \\ s-y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} nx-np \\ ny-nq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mr-mx \\ ms-my \end{pmatrix}$

nx – np = mr - mx $\Leftrightarrow$ (n + m)x = np+mr $\Leftrightarrow$ x= $\dfrac{np+mr}{n+m}$

ny – nq = ms - my $\Leftrightarrow$ (n+m)y=nq+ms $\Leftrightarrow$ y = $\dfrac{nq+ms}{n+m}$

Jadi koordinat R = ($\dfrac{np+mr}{n+m}, \dfrac{nq+ms}{n+m}$)

Contoh :

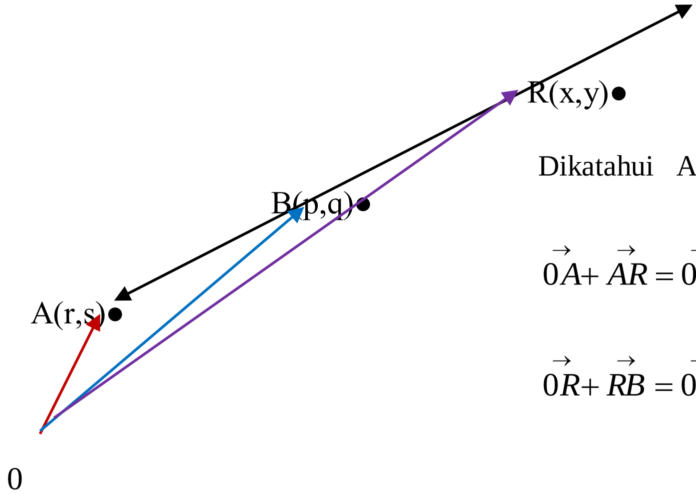
Diketahui titik P(-2,7) dan titik Q(5,2). Titik R terletak diantara titik P dan titik Q sehingga : $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{3}{7}$ Tentukan koordinat titik R ?

Jawab :

Dari soal diketahui : m = 3 , n = 7 , p = -2 , q = 7 , r = 5 , dan s= 2

Jadi koordinat titik R = ($\dfrac{np+mr}{n+m}, \dfrac{nq+ms}{n+m}$)=($\dfrac{7.(-2)+3.2}{7+3}, \dfrac{7.7+3.2}{n+m}$)=($\dfrac{-8}{10}, \dfrac{55}{10}$)

Bagaimana jika m terletak diperpanjangan garis AB atau garis BA ?



Dikatahui AB : RB = m : n

$$\vec{0A} + \vec{AR} = \vec{0R} \Leftrightarrow \vec{AR} = \vec{0R} - \vec{OA}$$

$$\vec{0R} + \vec{RB} = \vec{0B} \Leftrightarrow \vec{RB} = \vec{0B} - \vec{OR}$$

$$\vec{AR} = \vec{0R} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r-0 \\ s-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-r \\ y-s \end{pmatrix}$$

$$\vec{RB} = \vec{0B} - \vec{OR} \Leftrightarrow \vec{RB} = \begin{pmatrix} p-0 \\ q-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-x \\ q-y \end{pmatrix}$$

Karena : $\dfrac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow n\,\vec{AR} = m\,\vec{RB} \Leftrightarrow$ n$\begin{pmatrix} x-r \\ y-s \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} p-x \\ q-y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} nx-nr \\ ny-ns \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mp-mx \\ mq-my \end{pmatrix}$$

Sehingga :

nx – nr = mp - mx $\Leftrightarrow$ (n+m)x = (mp+nr) $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{mp+nr}{n+m}$

ny – ns = mq – my $\Leftrightarrow$ (n+m)y = mq+ns $\Leftrightarrow$ y = $\dfrac{mq+ns}{n+m}$

Jadi Koordinat R = ($\dfrac{mp+nr}{n+m}, \dfrac{mq+ns}{n+m}$)

Contoh :

Diketahui titik A (-2,-3) dan titik B (4,5). Pada perpanjangan AB terdapat titik R sedemikian rupa sehingga AR : RB = 8 : 3. Tentukan koordinat titik R ?

Jawab :

Diketahui : p = -2, q = -3 , r = 4, s = 5 , m = 8 dan n = 3

Tentukan koordinat titik R ?

Koordinat R = $\left(\frac{mp+nr}{n+m}, \frac{mq+ns}{n+m}\right) = \left(\frac{8(-2)+3.4}{3+8}, \frac{8(-3)+3.5}{3+8}\right) = \left(\frac{-4}{11}, \frac{-9}{11}\right)$

SOAL LATIHAN

1. Diketahui titik P (-9,7) dan Q (5,2).

   Tentukan :

   a. Titik tengah ruas garis PQ ?

   b. Titik R di antara PQ sehingga PR : RQ = 7 : 5 ?

   c. Titik R diperpanjangan garis PQ sehingga PR : RQ = 15 : 5 ?

   d. Titik R diperpanjangan garis QP sehingga QR : RP = 11 : 7 ?

2. Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut A (-1,2) , B(2,7), dan C(5,-1)

   Tentukan :

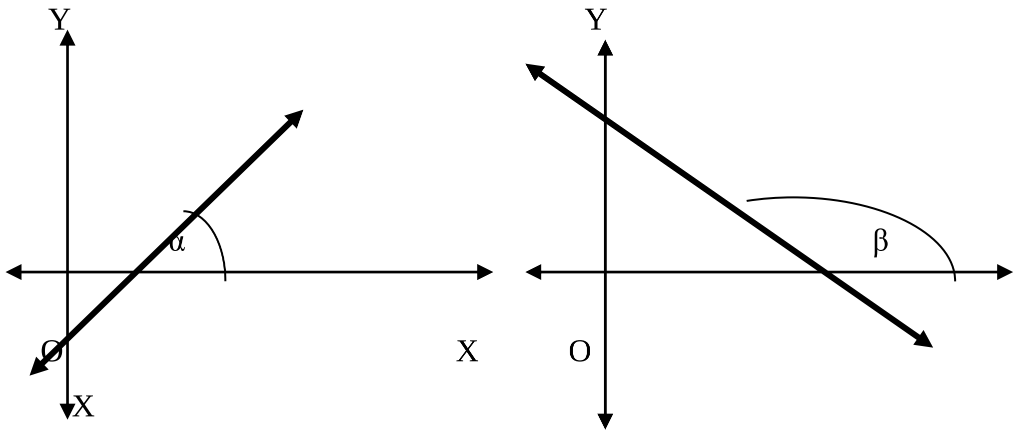
   a. Titik tengah sisi-sisinya ?

   b. Titik pusat segitiga tersebut ?

GRADIEN (KOEFISIEN ARAH) DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

A. Gradien (Koefisien Arah) Garis Lurus

Perhatikan gambar berikut ini :



Sudut α adalah sudut lancip yang dibentuk oleh sumbu x positip dan garis tersebut. A disebut sudut inklinasi garis tersebut.

Besar sudut inklinasi sebuah garis lurus = $\alpha \pm k.\pi$, untuk k = 0 , 1 , 2 , 3 , . . .

Dalam hal garis sejajar dengan sumbu x, sudut inklinasi = 0.

Sudut inklinasi diambil dari sudut yang terkecil dari α.

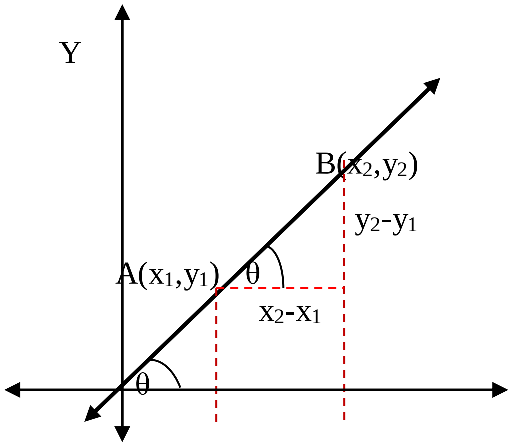
Definisi : Tangen sudut inklinasi suatu garis lurus disebut Koefeisien arah garis lurus tersebut .

Dengan menyatakan koefisien arah dengan huruf m, definisi diatas dapat ditulis secara simbolis :

$m = tg\ \alpha$

Jika $\alpha = 0$,maka $m = 0$, ini berarti koefisien arah garis lurus yang sejajar dengan sumbu X sama dengan nol.

Jika $\alpha = \frac{\pi}{2}$, maka $m = tg\ \alpha$ tidak mempunyai arti aritmatika (tidak diwakili oleh bilangan), artinya koefisien arah garis luirus tersebut gagal adanya .



Koefisien arah garis lurus melalui titik $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ adalah :

tg θ = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ atau tg θ= $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

Contoh :
Tentukan Gradien (koefisien arah) garis lurus yang melalui titik-titik berikut ini:

1. A(-3 , 7) dan B (9 , 0)
2. M(-4 , -8) dan N (10 , -3)

Jawab :

1. $m = \text{tg}\ \theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-7}{9-(-3)} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12}$

   atau :

   $m = \text{tg}\ \theta = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{7-0}{-3-9} = \frac{7}{-12} = -\frac{7}{12}$

2. $m = \text{tg}\ \theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-(-8)}{10-(-4)} = \frac{5}{14}$

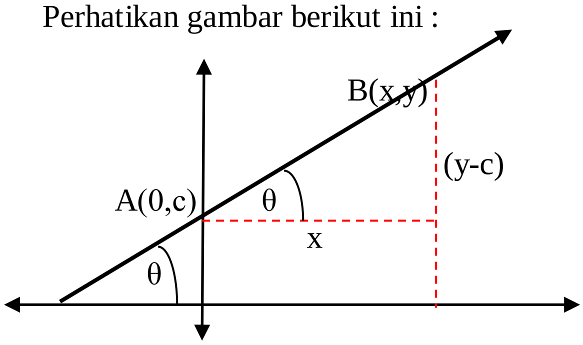
   atau :

   $m = \text{tg}\ \theta = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{-8-(-3)}{-4-10} = \frac{-5}{-14} = \frac{5}{14}$

B. Persamaan Slope/koefisien Ruas Garis Lurus

1. Persamaan Garis Lurus yang melalui titik (x,y) dan mempunyai gradien = m

Perhatikan gambar berikut ini :



Dari gambar disamping :

m = tg θ = $\frac{y-c}{x}$

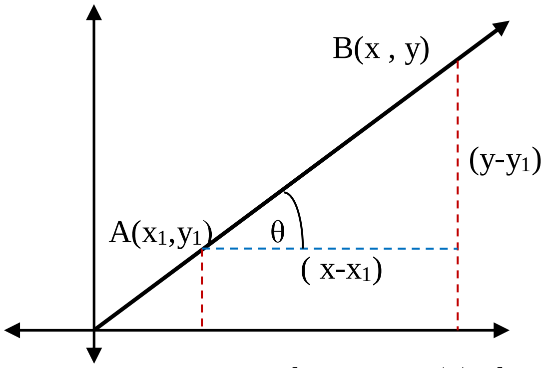
$xm = y - c$

$y = mx - c$................(1)

Inilah persamaan umum garis yang mempunyai gradien = m dan melelui titik (x , y)

Contoh 1 :
Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-9,6) dan memiliki gradien = -7 ?
Jawab :
y = mx + c
karena gradien m = -7, maka persmaan garis ;
y = -7 x + c
dan melalui (-9 , 6), maka :
6 = -7(-9) + c
c =- 63 + 6 =- 57
jadi persaman garis tersebut :
y = -7x - 57

Dapat pula dicari dengan cara berikut :



Dari gambar disamping :

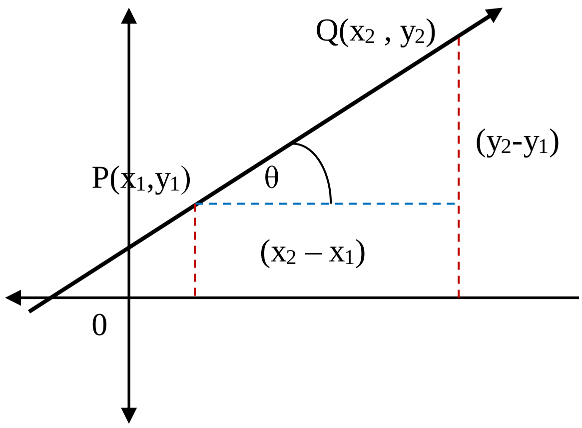
m = $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$.................(2)

Dengan menggunakan rumus (2) , kita dapat menyelesaikan contoh soal diatas.

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 6 = -7(x - (-9))$
$y = -7(x + 9) + 6$
$y = -7x - 63 + 6$
$y = -7x - 57$

2. *Persamaan Garis Yang Melalui Dua Buah Titik*



Gardien garis disamping adalah :

m = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Sehingga rumus (2), menjadi:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ *atau*

$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$...........(3)

Contoh :

Tentukan persmaan garis yang melalui :

a. Titik pusat dan titik (-9, 6) ?

b. Titik (-2,6) dan (7,-5) ?

Jawab :

a. m = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-0}{-9-0} = -\dfrac{6}{9}$

Jadi persamaan garis tersebut :

$$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 0 = -\frac{6}{9}(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{6}{9}x$$

b. m = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-5-6}{7-(-2)} = -\dfrac{11}{9}$

Jadi persamaan garis tersebut :

$$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 6 = -\frac{11}{9}(x - (-2)) -$$

$$\Leftrightarrow y - 6 = -\frac{11}{9}x - \frac{22}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9y - 54 = -11x - 22$$

$$\Leftrightarrow 11x + 9y = -32$$

3. ***Cara mencari persmaan garis lurus yang melalui dua titik dengan deter minan matrik:***

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

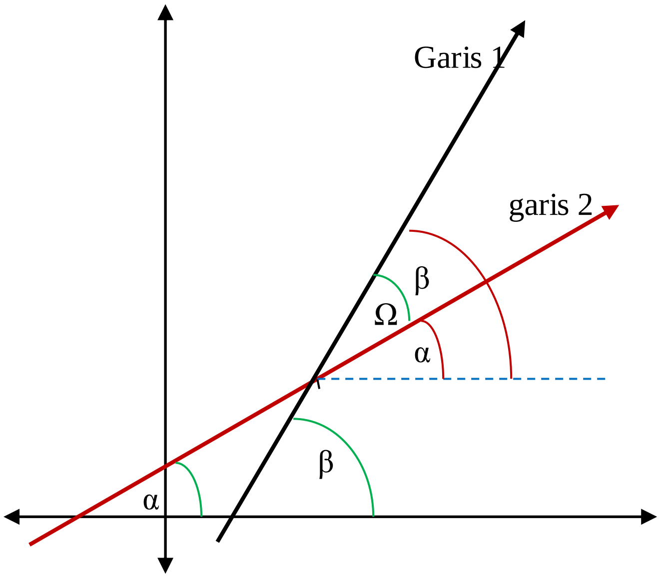
Contoh :

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (-9,7) dan (8,2) ?

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -9 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ -9 & 7 & 1 & -9 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

= 7x + 8y -18 –(56 +2x -9y) = 5x + 17y – 74

C. Sudut Antara Dua Garis Lurus



Dari gambar disamping :

Gradien garis 1 = tg β = m_1

Gradien garis 2 = tgα = m_2

Sudut antara garis 1 dan garis 2= Ω

Ω = β - α

Tg Ω = tg (β - α)= $\dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha.tg\beta}$

Atau

Tg (β-α)= $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}$

Karena yang diambil sudut lancip, maka:

Tg Ω = $\left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}\right|$

Catatan :

1. Jika dua garis sejajar, maka Ω = 0°

   Sehingga :

   $$\text{Tg } \Omega = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}\right| \Leftrightarrow 0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \Leftrightarrow m_2 - m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2 = m_1$$

   Jadi syarat dua garis sejajar :

   $m_2 = m_1$

2. Jika dua garis saling tegak lurus, maka Ω = 90°

   Sehingga :

   $$\text{Tg } \Omega = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}\right| \Leftrightarrow \infty = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

   Hal ini hanya mungkin jika penyebutnya = 0

   1 + m_2. m_1 = 0

   $m_2.m_1$ = -1

   Jadi syarat dua garis saling tegak lurus :

   $m_2.m_1 = -1$

Contoh :

Tentukan sudut antara garis : $y = -\dfrac{1}{7}x + 2 \;\; dan \;\; y = \dfrac{3}{4}x + 3$?

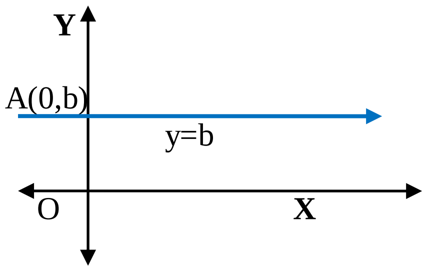
Jawab :

$m_1 = -\dfrac{1}{7}$ dan $m_2 = \dfrac{3}{4}$

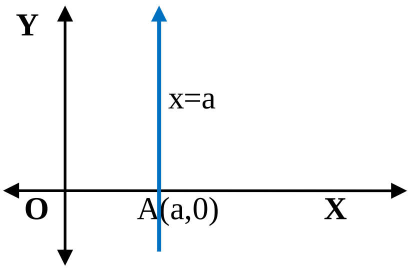
$$tg\ \Omega = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}\right| \Leftrightarrow tg\ \Omega = \left|\frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4}.(-\frac{1}{7})}\right| = \left|\frac{-4-21}{28-3}\right| = 1$$

Tg Ω = 1
Ω = 45°
Jadi sudut antara dua garis tersebut adalah = 45°

D. Garis lurus sebagai kurva derajat satu



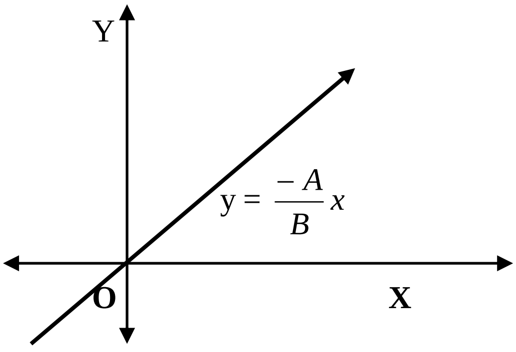
(gambar : 1)



(gmbar : 2)

Bentuk umum garis lurus
Bentuk umum garsi lurus sebagai kurva derejat satu adalah :
Ax + By + C = 0

1. Jika A = 0
   Maka By + C = 0
   $$y = \frac{-C}{B}$$
   Grafik sejajar dengan sumbu x, dan melalui titik (0, -C/B)
   Grafiknya terlihat pada gambar 1 diatas .
2. Jika B = 0
   Maka Ax + C = 0
   $$x = \frac{-C}{A}$$
   Grafiknya sejajar dengan sumbu y, dan melalui titik (-C/A , 0)
   Grafiknya terlihat pada gambar 2 diatas.
3. Jika C = 0
   Maka persamaan garis :
   Ax + By = 0
   $$y = \frac{-A}{B}x$$
   Grafik melalui titik O (0,0)



Catatan :

Jika m = $\frac{-A}{B} > 0$, maka grafik miring ke kanan

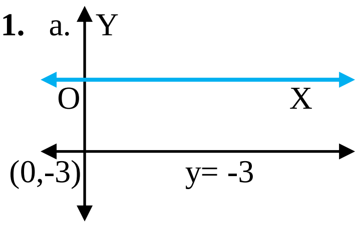
Jika m = $\frac{-A}{B} < 0$, maka grafik miring ke kiri

Contoh :

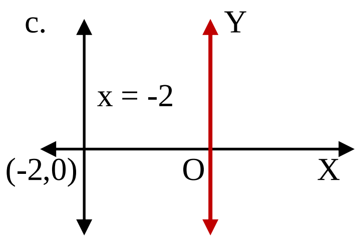
1. Gambarlah grafik dari :
   a. y = -3
   b. y = 4
   c. x = -2
   d. x = 3
   e. y = 2x
   f. x + 3y = -1
2. Tentukan Gradien dari garis soal no. 1 diatas ?

Jawab :

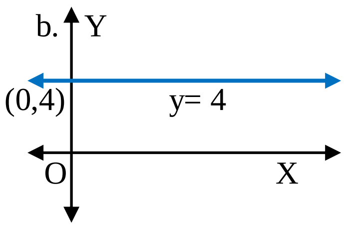
1. a.



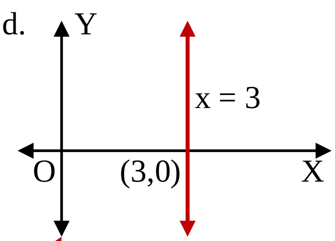
c.



b.

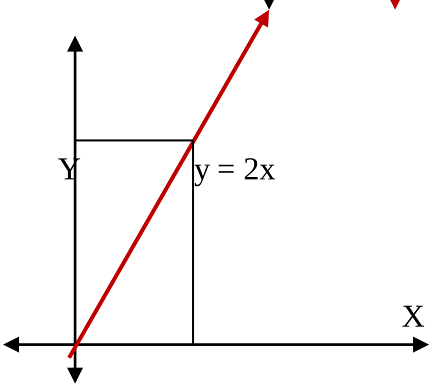


d.



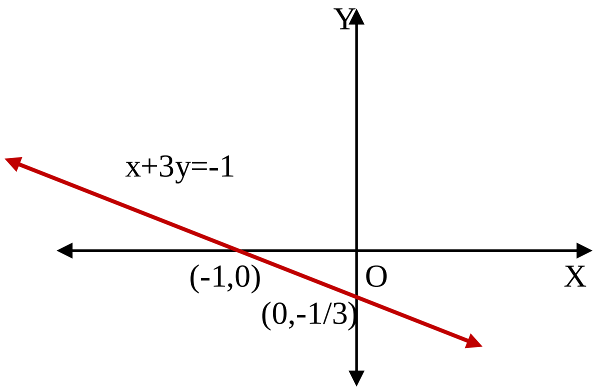
e. y = 2x

x	0	3
y	0	6



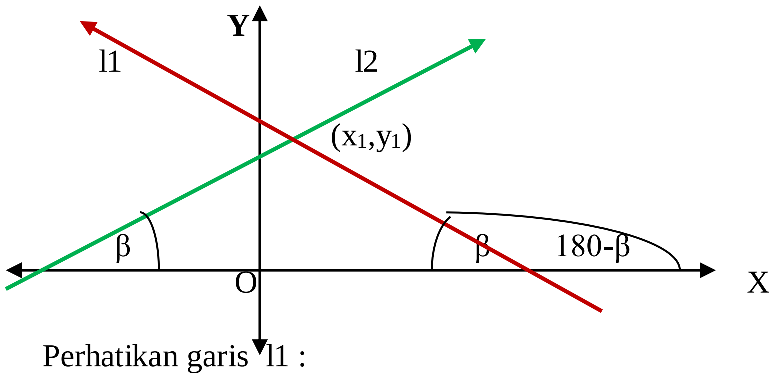
f. $x + 3y = -1$

x	0	-1
y	-1/3	0



E. Persamaan garis yang membentuk sudu β dengan sumbu x dan sumbu y dan melalui titik (x_1, y_1)

1. Yang mebentuk sudut β dengan sumbu x



Perhatikan garis l1 :

m = tg β, dan melalui titik (x_1 , y_1) maka:

persamaan garis l1 :

$y-y_1 = \text{tg } \beta \ (x - x_1)$............(1)

Persaman garis l2 :

m = tg (180-β) = - tg β dan melalui (x_1 , y_1)

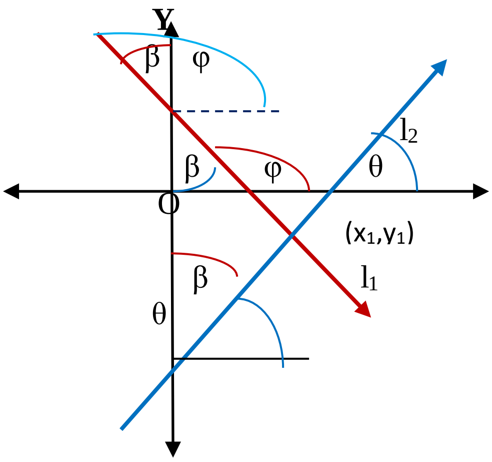
$y-y_1 = -\text{tg } \beta \ (x - x_1)$............(2)

Jika persamaan (1) dan (2) digabung, maka :

Persamaan garis yang membentuk sudut β dan melalui (x_1 , y_1) adalah :

$$\mathbf{y-y_1 = \pm tg\ \beta\ (x - x_1)}$$

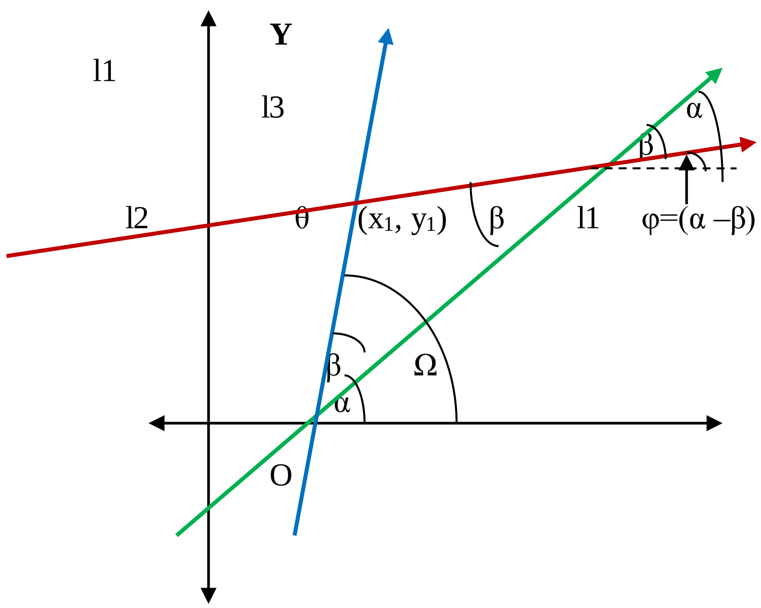
2. **Persamaan garis lurus yang membentuk sudut β terhadap sumbu y**



Persamaan garis l_2 :
m_2 = tg θ = tg(90°-β)= ctg β, dan melalui (x_1,y_1)

$y-y_1$ = ctg β (x – x_1)............(1)
Persamaan garis l_1:
m_1= tg(90°-β) = -ctg β
$y-y_1$ = -ctg β (x – x_1)...........(2)
Jika (1) dan (2) digabung, maka persmaan garis yang membentuk sudut β terhadap sumbu y adalah :
$y-y_1$ = ± ctg β (x – x_1)

3. **Persamaan garis lurus yang membantuk sudut β dengan garis lain yang berpotongan dan melalui titik (x_1 , y_1)**



Persamaan garis l1, misalkan mempunyai gradien m_1= tg α
Gradien garis l3= m3 = tg Ω =tg(α - β)
gradien garis l3 = m3= tg φ = tg (α + β)

Jadi Persamaan garis l3 :
$y-y_1$ = tg(α - β)(x-x_1)

dan persamaan garis l2 :
$y-y_1$ = tg (α + β)(x-x_1)

Contoh 1 :
Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-3 , 4) dan :

a. Sejajar dengan sumbu x ?
b. Sejajar dengan sumbu y ?
c. Mempunyai gradien = -3 ?
d. Membentuk sudut 30° terhadap sumbu x ?
e. Membentuk sudut 45° terhadap sumbu y ?
f. Membentuk sudut 45° terhadap garis 2x – y = 8 ?

Jawab :

a. Absis dari titik (-3 , 4) adalah x = -3.
   Jadi garis yang dimaksud adalah x = -3
b. Ordinat dari titik (-3 , 4) adalah y = 4.
   Jadi garis yang dimaksud adalah y = 4
c. Garis lurus yang melalaui titik (-3 , 4) dan mempunyai gradien = -3:
   $y - y_1 = m(x - x_1)$
   $y - 4 = -3(x - (-3))$
   $y - 4 = -3x - 9$
   $y = -3x - 5$
d. Garis lurus yang membentuk sudut 30^o terhadap sumbu x :
   Gradien = m = tg β = tg 30^o = $\frac{1}{\sqrt{3}}$
   Sehingga garis tersebut adalah :
   $y - y_1 = \pm tg\ \beta\ (x - x_1)$
   $y - 4 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(x - (-3))$
   $\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = \pm(x+3)$
e. Garis lurus yang membentuk sudut 45^o terhadap sumbu y :
   Gradien = m = ctg β = ctg 45^o = 1
   Sehingga garius tersebut adalah :
   $y - y_1 = \pm ctg\ \beta\ (x - x_1)$
   $y - 4 = \pm 1\ (x + 3)$
   $y - 4 = \pm(x + 3)$
f. Garis lurus yang membentuk sudut 45o terhadap garis 2x – y = 8 :
   tg 45^o = 1
   2x – y = 8
   y = 2x -8
   Jadi m_1 = tg α = 2
   Garis l3 :

   $$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha.tg\beta} = \frac{2-1}{1+2.1} = \frac{1}{3}$$

   $y - y_1 = tg(\alpha - \beta)(x - x_1)$
   $y - 4 = \frac{1}{3}(x+3)$
   3y – 12 = x + 3
   x – 3y +15 = 0
   Garis l2

   $$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta} = \frac{2+1}{1-2.1} = \frac{3}{-1} = -3$$

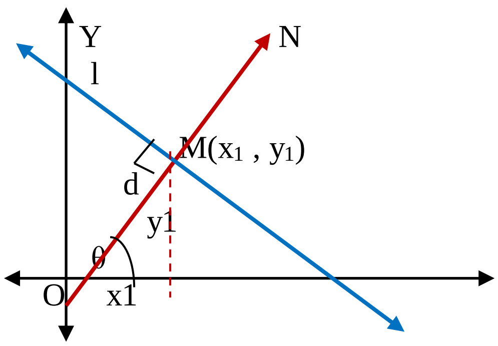
   Jadi persaman l2 :
   y – y1 = tg(α + β) (x – x1)

$y - 4 = -3 (x + 3)$
$3x + y - 5 = 0$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan persmaan garis lurus yang :
   a. Melalui titik (9,-3) dan sejajar sumbu x?
   b. Melalui titik (-8,9) dan sejajar sumbu x ?
   c. Melalui titik (4,-3) dan sejajar sumbu y ?
   d. Melalui tiitk (-3, 5) dan sejajar sumbu y ?
   e. Melalui titik (-9,2) dan mempunyai gradien = 7 ?
   f. Melalui titik (0,0) dan mempunyai gradien = -5 ?
   g. Melalui titik (3,4) dan membentuk sudut 60^o terhadap sumbu x ?
   h. Melalui titik (-4,-2) dan membentuk sudut 30^o terhadap sumbu x ?
   i. Melalui titik (3,4) dan membentuk sudut 60^o terhadap sumbu y ?
   j. Melalui titik (-4,-2) dan membentuk sudut 30^o terhadap sumbu y ?
   k. Melalui titik (0,9) dan membentuk sudut 30^o terhadap garis $-3x-y =3$?
   l. Melalui titik (-1,9) dan membentuk sudut 30^o terhadap garis $y = 5x$?
2. Tentukan persamaan garis lurus yang :
   a. Melalui titik potong garis $x – 2y = 8$ dan $2x + 3y = 23$ dan mempunyai gradien = -4 ?
   b. Melalui titik potong garis $3x – y = 8$ dan sumbu y, dan mempunyai gradien = 2 ?
   c. Melalui titik potong garis $3x – y = 3$ dan sumbu x, dan mempunyai gradien = -2 ?
   d. Melalui titik potong garis $3x – y = 8$ dan $x – 5y = -7$, dan membentuk sudut 30^o terhadap sumbu x ?
   e. Melalui titik potong garis $x + 4y = 9$ dan $5x – 2y = 1$, dan membentuk sudut 60^o terhadap garis $6x + y = -1$?
   f. Melalui titik potong garis $3x - 4y = 2$ dan $5x – 2y = 8$, dan membentuk sejajar dengan garis $6x + y = -1$?
   g. Melalui titik potong garis $4x + 2y = 10$ dan $5x – y = 9$, dan membentuk tegak lurus dengan garis $6x + y = -1$?

F. Persamaan Normal Hesse



Perhatikan gambar disamping :

OM = d adalah jarak titik O ke garis l .

Θ adalah sudut antara OM dan sumbu x positip. Dan OM tegak lurus dengan garis l.

Garis ON disebut dengan garis normal dari garis l tersebut

Koefisien arah garis normal = tg θ.
Karena garis ON tegak lurus dengan garis l , maka koefisien arah dari garis l adalah = - $\frac{1}{tg\theta}$

jadi persamaan garis l adalah : y – y1 = - $\frac{1}{tg\theta}$ (x – x1)...........(1)

Dari gambar diatas:

sin θ = $\frac{y_1}{d} \Leftrightarrow y_1 = d.\sin\ \theta$

cos θ = $\frac{x_1}{d} \Leftrightarrow x_1 = d.\cos\ \theta$

sehingga persamaan (1), manjadi :

y – y1 = - $\frac{1}{tg\theta}$ (x – x1)

y – d.sin θ = - $\frac{\cos\theta}{\sin\ \theta}(x - \cos\theta)$

y.sin θ – d. $\sin^2\theta$ = -x cos θ + $\cos^2\theta$

x cos θ + y sin θ = d(cos2θ + sin2θ)

x cos θ + y sin θ – d = 0 ....(2)

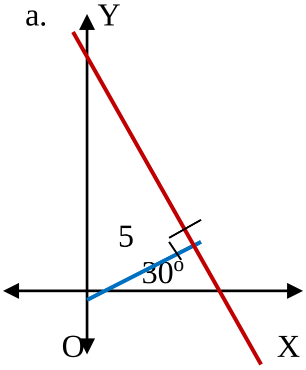
Persamaan (2), disebut dengan persamaan normal Hesse.

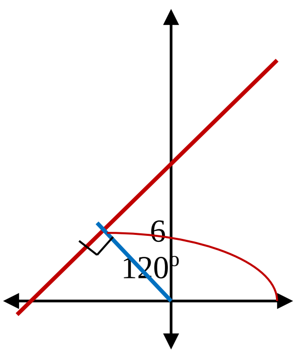
Contoh :

Lukislah garis-garis dan tulis persamaan normal Hesse jika diketahui :

a. d = 5 , dan θ = 30° ?
b. d = 6 , dan θ = 120° ?

Jawab :

a.


b.


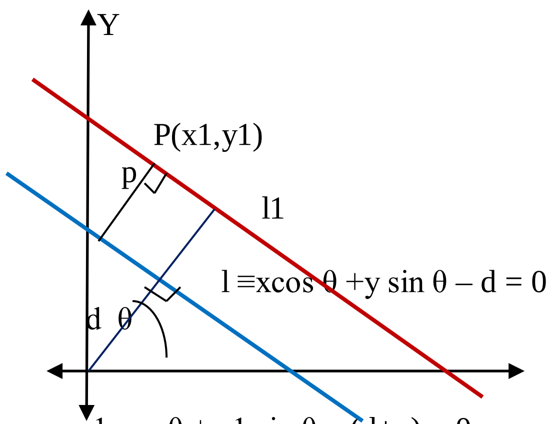
Persamaan normal Hesse garis-garis diatas adalah :

a. x cos 30° + y sin 30° - 5 = 0 atau $\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$

b. x cos 120^o + y sin 120^o - 6 = 0 atau $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 6 = 0$

G. Jarak sebuah titik ke garis lurus

Untuk menemukan jarak antara titik P (x1 , y1) dengan garis l ≡ x cos θ + y sin θ – d = 0 adalah sebagai berikut (lihat gambar dibawah ini) :



Tarik garis l1 melalui titik *P* *(x1,y1)* sejajar *l*. Nyatakan jarak antara garis *l* dan titik *P* dengan *p*.

Maka peresamaan normal dari *l1* *adalah l1* ≡ *x cos* θ + *y sin* θ – *(d+p)* = *0*, karena *l1* // *l*. Titik *P* terletak pada *l1*, maka:

x1 cos θ + y1 sin θ – (d+p) = 0
p = x1 cos θ + y1 sin θ - d ………………………………..(1)
Rumus (1) adalah rumus jaran titip P (x1 , y1) terhadap garis l

H. Pernyataan persamaan umum garis lurus dalam bentuk persamaan normal

Ambilah Ax + By + C = 0 dan x cos θ + y sin θ – d = 0 masing-masing sebagai persamaan umum dan persamaan normal Hesse dari suatu garis lurus sembarang. Karena kedua persamaan ini mewakili satu garis lurus maka keduanya ekwivalen, akibatnya :

$$\frac{\cos\theta}{A} = \frac{\sin\theta}{B} = \frac{-d}{C} = k$$

$$\Leftrightarrow kA = Cos\theta \ , kB = Sin\theta, \ \ dan \ \ kC = -d \text{................................(1)}$$

Untuk memperoleh harga k, kita kwaderatkan dan tambahkan kedua persamaan pertama dari (1), maka :

$$(kA)^2 + (kB)^2 = Cos^2\theta + Sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow k^2(A^2 + B^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Jadi Cos θ = $\frac{A}{k} = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ dan Sin θ = $\frac{B}{k} = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, serta :

-d $= kC = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

Jika Ax + By + C dikalikan k, maka:

k(Ax + By + C) = $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}(Ax+By+C) \equiv x\cos\theta + y\sin\theta - d = 0$

berarti :

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}(Ax+By+C) = 0 \text{ ....(2)}$$

Persamaan ini merupakan persamaan normal garis lurus .

Jarak antara garis (2) dan titik P (x1,y1) adalah :

p = $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}(Ax_1+By_1+C)$

Rumus ini merupakan rumus jarak titik P(x1,y1) dan garis Ax + By + C = 0

Contoh :

Tentukan Jarak titik P(-3 , 9) dengan garis 4x – 7y + 7 = 0

Jawab :

p = $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}(Ax_1+By_1+C) =$

$$\frac{1}{\pm\sqrt{4^2+(-7)^2}}(4.(-3)-7(9)+7 = \frac{-68}{\pm\sqrt{65}}$$

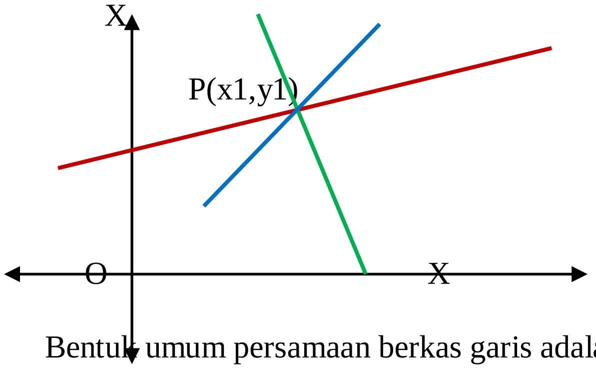
karena jarak selalu positip, maka :

p = $\dfrac{68}{\sqrt{65}}$

I. Berkas Garis

Berkas garis adalah himpunan garis-garis yang melalui satu titik.

Perhatikan gamabar berikut ini :



Pada gambar disamping, terlihat semua garis (selain sumbu koordinat) melalui titik P $(x1,y1)$.

Bentuk umum persamaan berkas garis adalah :

Ax + By + C + λ (Px + Qy + R) = 0

Contoh 1:

Diketahui garis 2x + 3y – 5 =- 0 dan garis 7x + 15y +1 = 0 berpotongan di Titik M. Tentukan persamaan garis yang melalui S dan tegak lurus dengan garis : 12 x – 5y -1 = 0 ?

Jawab:

Untuk menjawab soal tersebut selain dengan yang kita pelajari sebelumnya,
juga bisa dikerjakan dengan rumus berkas garis .

$2x + 3y - 5 + \lambda(7x + 15y + 1) = 0$

$(2 + 7\lambda)x + (3+15\lambda)y\ (-5+\lambda) = 0$……………………………(1)

Garis (1), mempunyai koefisien arah = $\dfrac{-(2+7\lambda)}{3+15\lambda}$

Garis ke tiga mempunyai koefisien arah = $\dfrac{12}{5}$

Kedua garis saling tegak lurus, jika m1. m2 = -1

$$\frac{-(2+7\lambda)}{3+15\lambda} \cdot \frac{12}{5} = -1$$

$-24 - 84\lambda = -15 - 75\lambda$

$-9\lambda = 9$

$\lambda = -1$

Jadi persamaan garis yang dicari adalah :

$(2 + 7\lambda)x + (3+15\lambda)y\ (-5+\lambda) = 0$

$(2 + 7(-1))x + (3+15(-1))y\ (-5+(-1)) = 0$

$-5x - 12y - 6 = 0$

Contoh 2:

Diketahui berkas garis : $\beta(3x + y - 1) + \theta(2x - y - 9) = 0$

Buktikan bahwa garis : x + 3y + 13 =0 adalah salah satu anggota berkas garis tersebut ?

Bukti :

$\beta(3x + y - 1) + \theta(2x - y - 9) = 0$

$(3\beta + 2\theta)x + (\beta-\theta)y + (-\beta - 9\theta) = 0$……………………………………(1)

Jika x + 3y + 13= 0 adalah salah satu anggota berkas, maka kita dapat menentukan perbandingan β dan θ sedemikian sehinga (1) ekwivalen dengan x + 3y + 13 = 0…………………..(2)

Jika (1) ekwivalen dengan (2), maka :

$$\frac{3\beta+2\theta}{1} = \frac{\beta-\theta}{3} = \frac{-(\beta+9\theta}{13} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari persamaan (3)

$$\frac{3\beta+2\theta}{1} = \frac{\beta-\theta}{3} \Leftrightarrow \beta-\theta = 9\beta+6\theta \Leftrightarrow 8\beta = 7\theta \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{8}\theta$$

Kita substitusikan $\beta = \frac{7}{8}\theta$ ke persamaan (1), diperoleh:

(3β + 2θ)x +(β-θ)y + (-β - 9θ) = 0…………………………………(1)

$$(3(\frac{7}{8}\theta) + 2\theta)x + (\frac{7}{8}\theta - \theta)y - \frac{7}{8}\theta - 9\theta = 0$$

$$(\frac{(21+16)\theta}{8})x + (\frac{7\theta - 8\theta}{8})y - \frac{7\theta + 72\theta}{8} = 0$$

$$(37x - y - 79)\theta = 0$$

$$37x - y - 79 = 0$$

Karena

x + 3y + 13 =0 dan 37x – y – 79 tidak ekwivalen, maka x + 3y + 13 =0 bukan

anggota berkas garis tersebut.

SOAL SOAL LATIHAN

1. Tentukan koordinat titik potong garis : 2x – 4y -29 = 0 dan 2x + 5y +19 = 0 ?
2. Persamaan sisi-sisi AB, BC dan AC suatu segitiga berturut-turut : 4x -3y-5=0, x – 3y +10 = 0 dan x – 2 = 0.
   Tentukan koordinat titik-tik sudutnya ?
3. 8x + 3y +1 = 0 dan 2x +y – 1= 0 merupakan dua sisi dari jajaran genjang dan 3x +2y + 3 = 0 merupakan persamaan salah satu diagonalnya .
   Tentukan koordinat ke empat titik-tik sudutnya ?
4. Sisi-sisi suatu segitiga terletak pada garis –garis :
   X + 5y – 7 = 0, 3x – 2y – 4 = 0, dan 7x + y + 19 = 0
   Carilah luas segitiga tersebut ?
5. Luas suatu segitiga ABC = 8 satuan luas. Dua titik sudutnya yaitu : A(2,-3) dan B(3,-2). Titik sudut C terletak pada garis 2x + y -2 = 0. Tentukan koordinat C ?
6. Tentukan koefisien arah dan titik potong dengan sumbu x dan y dari garis berikut ini :
   a. 5x + 3y = 7 c. y – 3 = 0
   b. -6x – 6y = 9 d. 3x = -4
7. Diketahui garis 2x – 4y – 9 = 0. Tentukan koefisien arah garis yang :
   a. sejajar dengan garis tersebut ?
   b. Tegak lurus dengan garis tersebut ?
8. Ditentukan garis 5x – 2y – 8 = 0.
   Tulislah persamaan dari garis lurus yang melalui titik P (-2, -4) yang :
   a. Sejajar dengan garis tersebut ?
   b. tegak lurus pada garis diatas ?
9. Carilah persamaan garis lurus yang melalui titik Q yang tegak lurus
   Pada segmen garis PQ, jika P (-2,4) dan Q (-5, -2) ?
10. Tentukan sudut antara garis – garis berikut ini :
    a. 5x – y + 7 = 0 dan 2x + 2y = 0

b. $-3x - 9y = -4$ dan $x - 2y + 7 = 0$

11. Carilah persamaan garis yang membentuk sudut 45^o dengan sumbu y ?
12. Carilah persamaan garis lurus yang membentuk sudut 75^o dengan sumbu x
13. Carilah persamaan garis yang membuat sudut 60o dengan garis $2x + 3y + 4 = 0$ dan melalui titik M (2 , 1) ?
14. Tentukan harga a dan b sehingga garis :
    $ax - 2y - 1 = 0$ dan $6x - 4y - b = 0$
    a. mempunyai satu titik perseketuan ?
    b. sejajar ?
    c. berimpit ?
15. Tentukan bentuk persamaan normal Hesse dari garis-garis berikut ini
    a. $4x - 3y - 10 = 0$
    b. $12x - 5y + 13 = 0$
    c. $x + 3 = 0$
    d. $2x - 5y = 0$
16. Tentukan jarak titik dan garis dibawah ini :
    a. A(2 , -1) dan $4x + 3y + 10 = 0$
    b. B(0 , -3) dan $5x - 12y - 23 = 0$
    c. Q(-2, -1) dan $x - 7y + 7 = 0$
17. Tentukan anggota berkas garis $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$, yang
    a. melalui titik P (3 , -1) ?
    b. melalaui titik asal ?
    c. sejajar dengan sumbu x ?
    d. sejajar dengan sumbu y ?
    e. sejajar dengan garis $4x + 3y - 5 = 0$?
    f. tegak lurus pada garis $2x + 3y + 7 = 0$?
18. Tentukan persamaan garis melalui titik potong $2x - 7y - 8 = 0$, $3x + 2y + 5 = 0$ dan membentuk sudut 45o dengan garis $2x + 3y - 7 = 0$?

J. Transformasi Geometri

Transformasi geometri digunakan untuk memindahkan suatu titik atau bangun pada suatu bidang. Transformasi geometri adalah bagian dari geometri analit yang membahas tentang perubahan (letak, bentuk, penyajian) yang didasarkan dengan gambar dan matriks.

Transformasi pada bidang terdiri dari 4 macam:

1. Pergeseran (Translasi)
2. Pencerminan (Refleksi)
3. Perputaran (Rotasi)
4. Perkalian (Dilatasi)

1. Pergeseran (Translasi)

Perpindahan ttik-titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu yang diwakili oleh ruas garis berarah (vektor) $\vec{PQ}$ atau dengan suatu pasangan bilangan $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Translasi T = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ memetakan titik A $x_1, y_1)$ ke titik A' = $(x_1 + p, y_1 + q)$ yang dinotasikan dengan :

T = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} : A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x_1 + p, y_1 + q)$

Dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix}$$

Contoh 1:

Tentukan bayangan titik P(-3, 8) oleh translasi $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Jawab :

T = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} : P(x_1, y_1) \rightarrow A'(x_1 + p, y_1 + q)$

= $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} : P(-3,8) \rightarrow A'(-3-4, 8+7)$

= $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} : P(-3,8) \rightarrow A'(-7,15)$

Atau dengan menggunakan matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + (-4) \\ 8 + 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik P (-3 , 8) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ adalah P' (-7 , 15).

Contoh 2:

Tentukan bayangan garis 4x – 7y -5= 0 oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$?

Jawab :

Bayangan titik (x , y) oleh translasi T= $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ adalah :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4 \\ y - 5 \end{pmatrix}$$

x' = x + 4 $\Leftrightarrow x = x' - 4$
y' = y - 5 $\Leftrightarrow y = y' + 5$
Dengan mensubstitusi $x = x' - 4$ dan $y = y' + 5$, kedalam 4x – 7y -5= 0, kita peroleh :
4(x' - 4) – 7 (y'+ 5) – 5 = 0
4x' -7y' - 56 = 0
Jadi bayangan garis 4x – 7y -5= 0 oleh translasi T=$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ adalah :

4x - 7y - 56 = 0

Secara Umum bayangan garis ax + by + c = 0 oleh translasi T=$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, adalah :

x' = x + p $\Leftrightarrow x = x' - p$
y' = y + q $\Leftrightarrow y = y' - q'$
Kita substitusi ke garis ax + by + c = 0, kita peroleh:
a(x ' - p) + b(y' – q) + c = 0
ax' – ap + by' – bq + c = 0
ax' + by' = ap + bq – c.
Jadi bayangan garis ax + by + c = 0 oleh translasi T=$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, adalah :

ax + by = ap + bq – c. . ……………..(1)

Dengan rumus (1) , contoh 2 bisa diselesaikan dengan cepat :
4x – 7y -5= 0 oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$
a = 4 , b = -7 , c = -5 , p = 4 , dan q = -5
Jadi bayangannya adalah :

ax + by = ap + bq – c.
4x – 7y = 4.4 + -7(-5) – (-5)
4x – 7y – 56 = 0

Contoh 3 :
Tentukan bayangan ellips : $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ oleh translasi T=$\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$?
Jawab :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 7 \end{pmatrix}$$

$x' = x - 5 \Leftrightarrow x = x'+5$
$y' = y - 7 \Leftrightarrow y = y'+7'$

$$\frac{(x'+5)^2}{5} + \frac{(y'+7)}{4} = 1$$

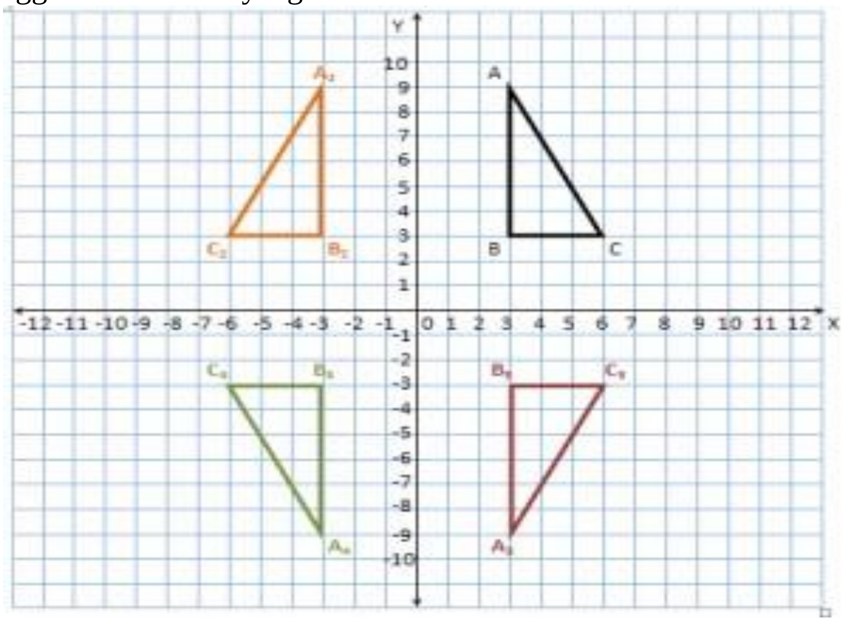
Jadi bayangan $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ oleh translasi T=$\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, adalah

$$\frac{(x'+5)^2}{5} + \frac{(y'+7)}{4} = 1$$

Yang tidak lain adalah ellips dengan pusat (-5 , -7)

2. Pencerminan (Refleksi)

Pencerminan adalah Transformasi yang memindahkan titik-titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin.



Gambar: pencerminan terhadap sumbu x dan sumbu y

a. Pencerminan terhadap sumbu X (dilambangkan dengan M_x)

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(x, -y)$
Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

b. Pencerminan terhadap sumbu Y (dilambangkan My)

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-x, y)$

Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

c. ***Pecencerminan terhadap titim asal O(0,0) (dilambangkan Mo)***

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-x, -y)$

Dalam bentuk metric :

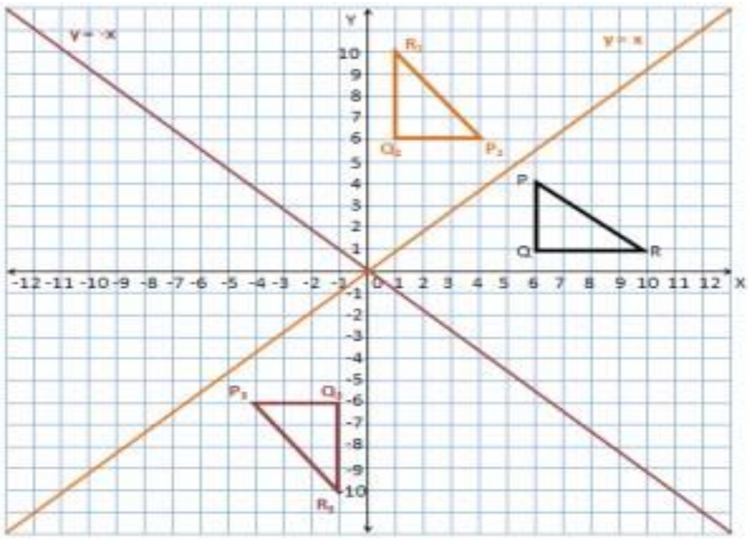
$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

d. ***Pencerminan terhadap garis y = x (dilambangkan $M_{(y=x)}$)***

$M_{(y=x)=}$ $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(y, x)$

Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



Gambar : Pencerminan terhadap garis y = x dan y = -x

e. ***Pencerminan terhadap garis y = -x (dilambangkan $M_{y=-x}$)***

$M_{y=-x\,=}$ $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-y, -x)$

Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

f. Pencerminan terhadap garis x = h (dilambangkan $M_{x=h}$)

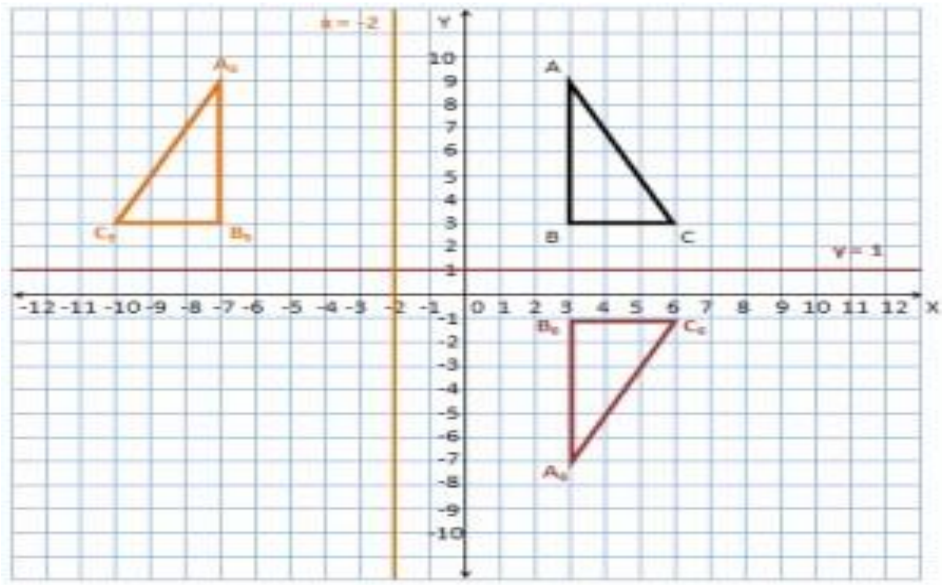
$M_{x=h}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(2h - x, y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h - x \\ y \end{pmatrix}$$

g. Pencerminan terhadap garis y = k (dilambangkan $M_{y=k}$)

$M_{y=k}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(x, 2k - y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2k - y \end{pmatrix}$$



Gambar : Pencerminan terhadap garis x = -2 dan garis y = 1

h. Pencerminan terhadap titik (a , b) (dilambangkan $M_{(a,b)}$)

$M_{(a,b)}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(2a - x, 2b - y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - x \\ 2b - y \end{pmatrix}$$

Contoh 1 :

Tentukan bayangan titik A(-4 , 7) jika dicerminkan terhadap garis y = x, dan dilanjutkan oleh translasi T= $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$?

Jawab :

Dicerminkan terhadap garis y = x, maka :
M$_{y=-x}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-y, -x)$ = A'(-7 , 4)

Dilanjutkan translasi T= $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, maka :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+p \\ y'+q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+5 \\ 4+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Contoh 2 :

Tentukan bayangan garis $5x - 7y = 9$, jika di cerminakn terhadap sumbu x dan dilanjutkan dicerminkan terhadap garis y = -x ?

Jawab :

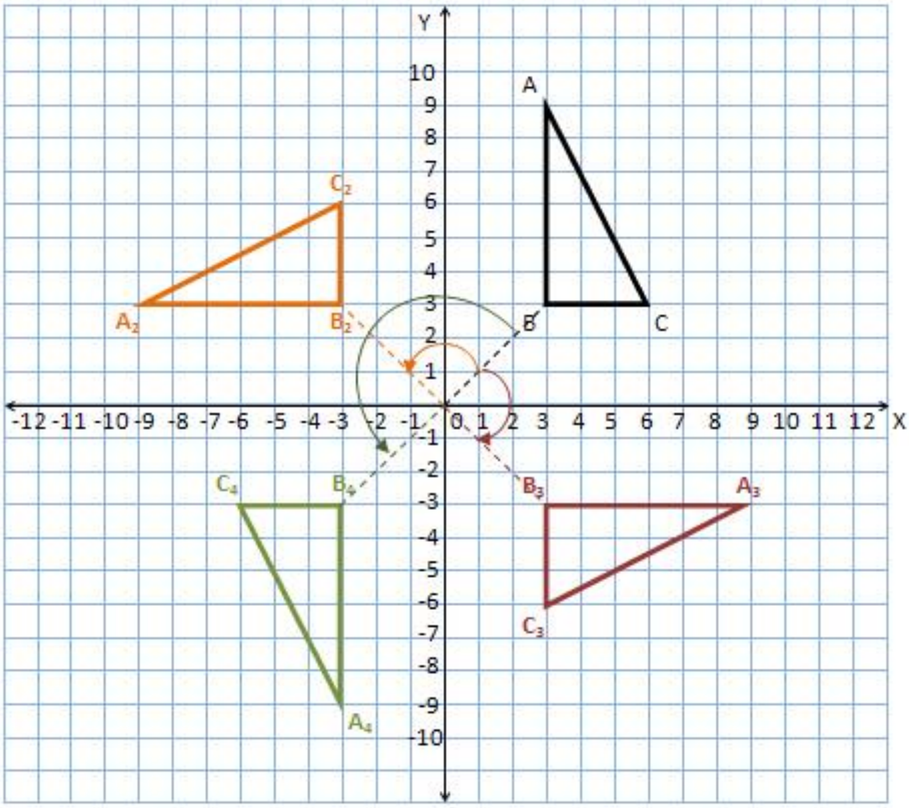
Dicermikan terhadap sumbu x , maka :
Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(x, -y)$
Dilanjutkan dicerminan terhadap garis y = -x maka :
M$_{y=-x}$ = $A'(x', y') \rightarrow A''(x'', y'') = A''(-y', -x') = A''(y, -x)$
Jadi bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, jika di cerminakn terhadap sumbu x dan dilanjutkan dicerminkan terhadap garis y = -x, adalah :

$$5y - 7(-x) = 9 \Leftrightarrow 7x + 5y = 9$$

3. Putaran (Rotasi)

Rotasi adalah memindahkan titik-titik dengan memutar titik-titik tersebut sejauh β terhadap titik pusat Rotasi.

Suatu rotasi dengan pusat A dan sudut Rotasi β dinotasikan :
R(A , β).



Gambar : Rotasi searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam

a. Rotasi terhadap titik pusat O (0,0) (dilambangkan R(O, β)

Jika titik A(x,y) dirotasikan sebesar β berlawanan arah dengan jarus jam terhadap titik pusat O(0,0), maka diperoleh bayangan : A'(x' , y ').

R(O, β) = A(x,y) $\rightarrow$ P'(x',y')= P'(x cos β - y sin β , x sin β + y cos β)

Persmaan matriksnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Untuk β = 90º . -90º, 180º, 270º , -270º dengan memasukkan nilai β tersbut

diperoleh table sebagai berikut :

ROTASI	MATRIK	BAYANGAN
R(O, 90°)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(-y , x)
R(O, -90°)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	(y , -x)
R(O, 180°)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	(-x , -y)
R(O, 270°)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	(y , -x)
R(O, -270°)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(- y , x)

2. Rotasi terhadap titik pusat P (a, b)

Jika suatu titik P(x,y) diputar sejauh β berlawanan arah jarum jam terhadap titik pusat A (a,b) maka bayangan nya adalah P' (x' , y') dengan :
x' – a = (x-a) cos β - (y-b) sin β
y' – b = (x-a) sin β + (y-b) cos β
persamaan matriksnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh :

Titik P (6√2, 10√2) diputar dengan arah berlawanan jarum jam sejauh 45° menghasilkan titik P'. Tentukan koordinat dari titik P'.

Pembahasan
Rotasi sebuah titik dengan sudut sebesar α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^o & -\sin 45^o \\ \sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(6\sqrt{2}) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(10\sqrt{2}) \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(6\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(10\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

4. Perkalian (Dilatasi)

Dilatasi adalah Transfomasi yang mengubah jarak titik-titik dengan factor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu

Perkalian atau dilatasi ini ditentukan oleh factor skala k dan pusat dilatasi .

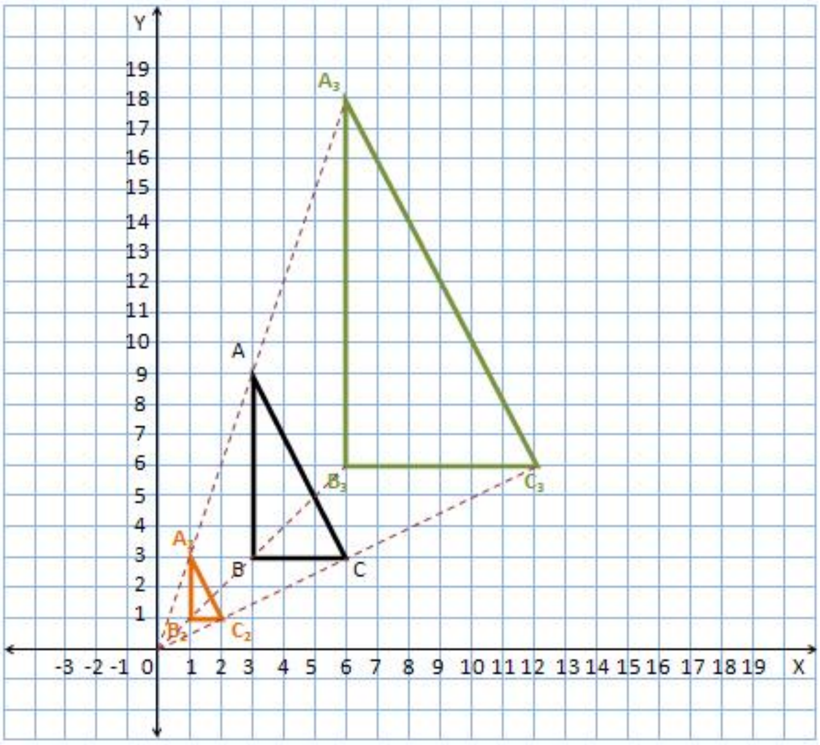
a. Dilatasi terhadap titik pusat O (0,0)

Pemetaaannya :

$$[O.k] = P(x,y) \rightarrow P'(kx,ky)$$

Persmaan matriknya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$



Gambar : Dilatasi terhadap O(0,0)

b. Dilatasi terhadap titik pusat A (a,b)

Titik P(x,y) di dilatasi terhadap titik pusat P(a,b) , dengan factor skala k, diperoleh bayangan :

x' – a = k(x – a) dan y' – b = k (y - b)

Persamaan matriksnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Tentukan bayangan persegi panjang ABCD dengan A(2,2) , B(-2,2) , C(-2,-2) dan D(2,-2) jika dilakukan transformasi Dilatasi pusat O dan skala 3 ?

   jawab :

   Jadi hasilnya A'(6,6) , B'(-6,6) , C'(-6,-6) dan D'(6,-6)
2. Tentukan bayangan garis x - y - 3 = 0 oleh D(O,4) ?

   Jawab :

   Transformasinya adalah Dilatasi dengan pusat O(0,0) dan skala 4

$x = \frac{x'}{4}$ dan $y = \frac{y'}{4}$

Jadi Bayangannya adalah :

$\frac{x'}{4} - \frac{y'}{4} - 3 = 0$

dengan menghilangkan tanda aksen dan mengalikan dengan 4 maka bayangan / peta / hasilnya adalah x - y - 12 = 0

3. Tentukan bayangan garis y = x - 3 karena dilatasi faktor skala 4 dengan pusat A(1,2) adalah .....

   Jawab :

   $4(x-1) = x'-1 \Leftrightarrow 4x - 4 = x'-1$

   $4(y-2) = y'-2 \Leftrightarrow 4y - 8 = y'-2$

   atau dapat ditulis menjadi

   $x = \frac{x'+3}{4}$

   $y = \frac{y'+6}{4}$

   sehingga bayangannya adalah :

   $\frac{y'+6}{4} = \frac{x'+3}{4} - 3 \Leftrightarrow y' = x'+15$

   Jadi bayangannya adalah : y = x + 15 atau x - y + 15 = 0

5. Transformasi oleh suatu matriks

Suatu titik A(x,y) ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ menjadi A'(x' , y')

Hubungan diatas dapat dituliskan dalam persamaan :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan hasil transformasi matriks $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ terhadap titik B(2 , -3) ?

Jawab :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jadi B' (-8 , -9)

6. Komposisi Transformasi

Gabungan dari beberapa trnsformasi disebut komposisi transformasi. Transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2 dapat diwakili oleh transformas tunggal yang ditentukan oleh :
Dalam bentuk bagan urutan transformasi dapat diperhatikan sebagai berikut :

$$P(x,y) \xrightarrow{T_1} P'(x',y') \xrightarrow{T_2} P''(x'',y'')$$

Pengerjaan transformasi ini dapat ditulis :

$$T_2 \circ T_1\ P(x,y) \xrightarrow{T_2 \circ T_1} P''(x'',y'')$$

a. Komposisi dua translasi

Jika translasi $T_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $T_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,

Komposisi translasi T_1 dilanjuitkan T_2 dapat diwakili oleh translasi tunggal yang ditentukan oleh :

$$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat Komposisi translasi :

1). Untuk dua translasi berurutan berlaku :
$T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ (Komutatif)

2). Untuk tiga translasi berurutan berlaku :
$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$ (Asosiatif)

Contoh :

Titik B (2,4) translasikan oleh $T_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kemudian dilanjutkan dengan T_2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bayangan titik adalah …

Jawab :

$$T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

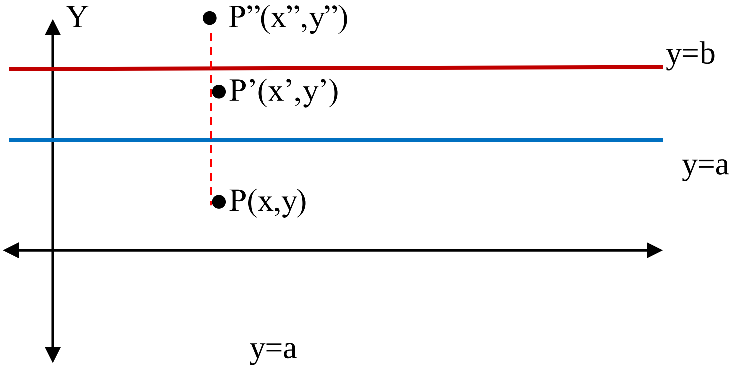
Jadi bayangannya adalah (6,10)

b. Komposisi Refleksi

1). Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu sejajar.

a). Sejajar dengan sumbu x

Jika titik P’(x’,y’) adalah hasil pencerminan terhadap garis y = a dan titik P’(x”,y”) adalah hasil pencerminan titik P’(x’,y’) terhadap garis y = b (lihat gambar):

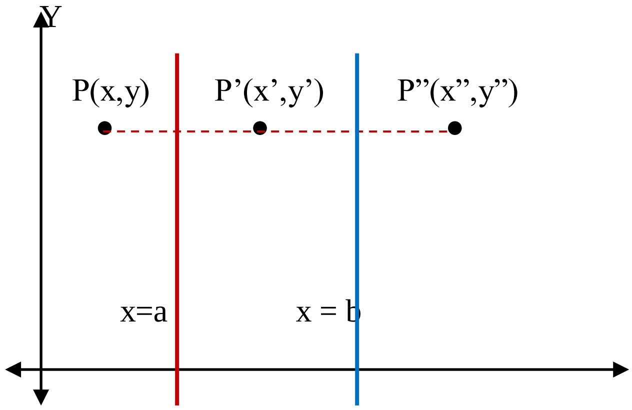


$$P(x,y) \xrightarrow{y=a} P'(x,2a-y)$$

$$P'(x,2a-y) \xrightarrow{y=b} P''(x,\ 2b-(2a-y)) = (x,\ 2(b-a)+y)$$

b). Sejajar terhadap sumbu y

Jika titik P’(x’,y’) adalah hasil pencerminan terhadap garis x = a dan titik P”(x”,y”) adalah hasil pencerminan titik P”(x’,y’) terhadap garis x = b (lihat gambar)

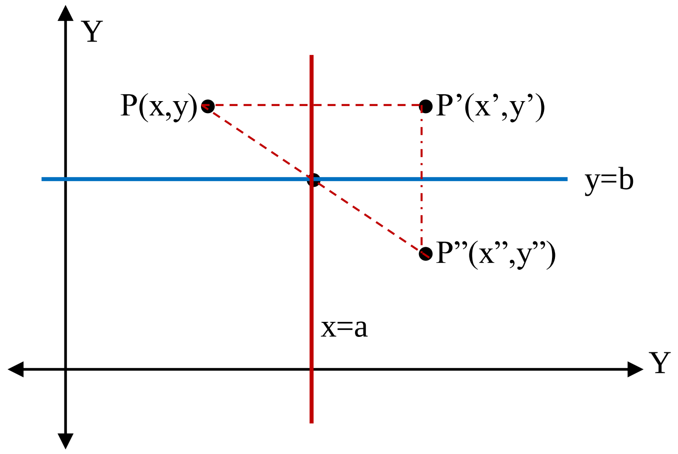


$$P(x,y) \xrightarrow{x=a} P'((2a-x),\ y)$$

$$P'((2a-x),y) \xrightarrow{x=b} P''(2b-(2a-x)\ ,\ \ y)$$

c). Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu saling tegak lurus

Jika titik P’(x’,y’) adalah hasil pencerminan titik P(x,y) terhadap garis x = a dsn titik P”(x”,y”) adalah hasil pencerminan titik P’x’,y’) terhadap garis y=b.



Maka :

$$P(x,y) \xrightarrow{x = a} P'(x',y')$$

$$P'(x',y') \xrightarrow{y=b} P''(2a-x,\ 2b-y)$$

d. Komposisi rotasi

Dua rotasi berurutan yang sepusat ekivalen dengan rotasi sejauh jumlah kedua sudut rotasinya terhadap pusat yang sama

Jadi :

Jika $R_1 = R(O, \theta)$ dan $R_2 = R(O, \beta)$, maka :

$R_2 \text{ o } R_1 = R(O, (\theta + \beta)$

e. Komposisi Transformasi dengan Matriks

Jika T_1 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, maka komposisi transformasi :

1). $T_2 o T_1$ adalah perkalian matrik $M_2 \,.\, M_1$

$$M_2 \,.\, M_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2). $T_1 \text{ o } T_2$ adalah perkalian matriks $M_1 .\ M_2$

$$M_1 .\ M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

f. Luas daerah bangun hasil transformasi

Jika matriks transformasi T = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mentransformasikan bangun A menjadi A', maka :

Luas Bangun A' = $|\det .T|$ x luas bangun A

$|\det .T|$ dinamakan factor pembesaran luas, merupakan nilai mutlak determinan matriks T

RANGKUMAN TRANSFORMASI

NO	TRANSFORMASI	NOTASI	MATRIKS
1	Translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	P(x,y)→P'(x1+a,y1+b)	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2	Pencerminan terhadap sumbu x	**P(x,y) →P'(x,-y)**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu y	**P(x,y) →P'(-x,y)**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap titik asal	**P(x,y) →P'(-x,-y)**	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap garis y=x	**P(x,y) →P'(y,x)**	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	Pencerminan terhadap garis y= -x	**P(x,y) →P'(-y,-x)**	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7	Pencerminan terhadap garis x = h	**P(x,y) →P'(2h-x,y)**	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
8	Pencerminan terhadap garis y= k	**P(x,y) →P'(x, 2k-y)**	
9	Pencerminan terhadap garis titik (a,b)	**P(x,y) →P'2a-x, 2b-y)**	
10	Rotasi terhadap O(0,0) →R(O, θ) berlawanan arah jarum jam	**P(x,y)→P'(xcos θ** - ysin θ , x sin θ + y cos θ)	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
11	**Rotasi terhadap titik pusat P(a,b) →R(P, θ)**	**x'-a =(x-a)cos θ** - (y-b)sin θ y'-b=(x-a)sin θ + (y-b)cos θ	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

	berlawanan arah jarum jam		
12	**Dilatasi terhadap titik pusat O(0,0)**	$[O,k]: P(x,y) \rightarrow P'(kx,ky)$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
13	**Dilatasi terhadap titik pusat A(a,b)**	**x'-a = k(x-a)** **y'-b = k(y-b)**	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

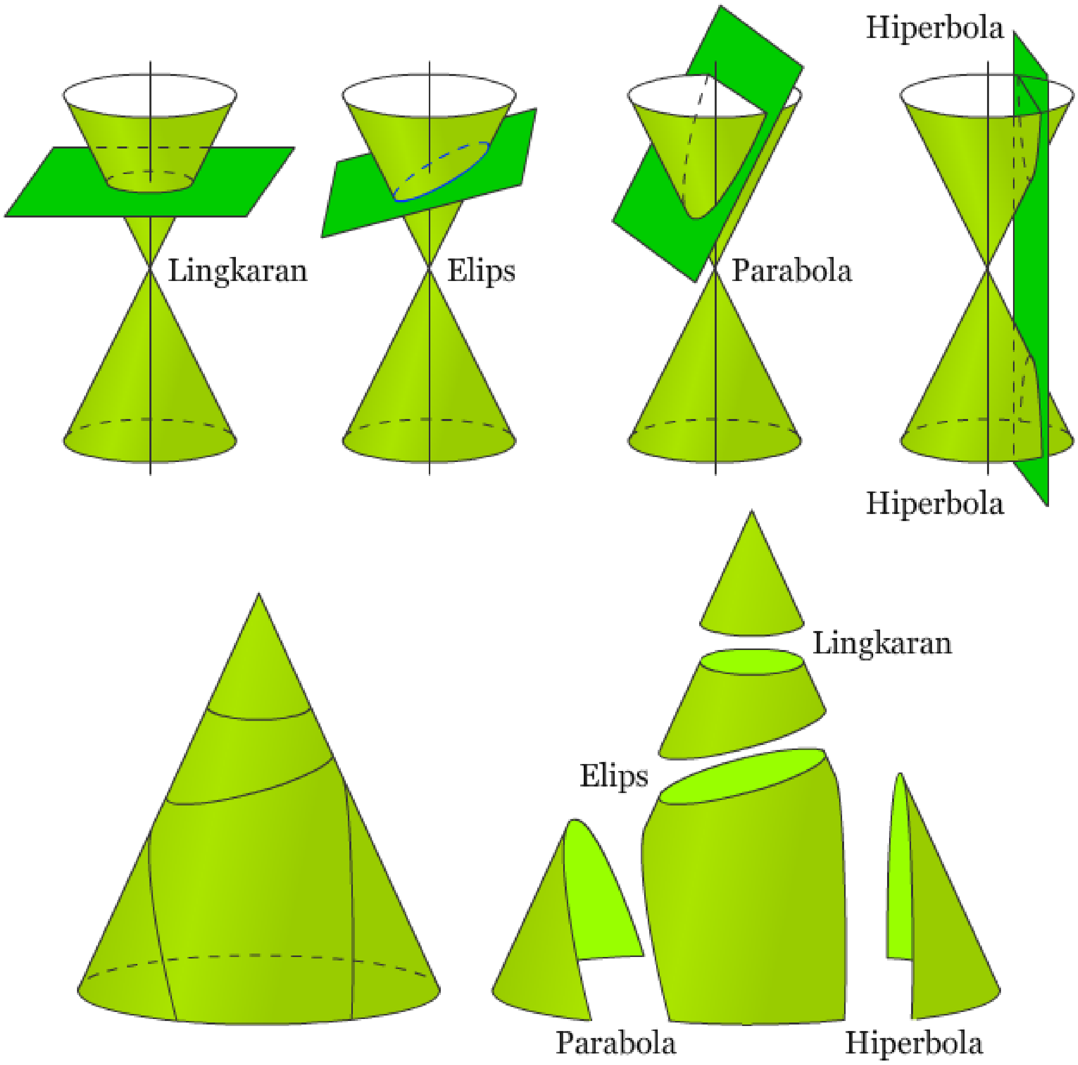
SOAL LATIHAN

1. Tentukan bayangan garis y = -3x + 4 yang dicerminkan terhadap garis y = x ?
2. Tentukan persamaan bayangan kurva $y = x^2 - 2x - 3$ oleh rotasi (O, 180^o), kemudian dilanjutkan pencerminan terhadap y = -x ?
3. Tentukan persamaan bayangan lingkaran : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ oleh transformasi yang berkaitan dengan matrik $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?
4. T_1 dan T2 adalah transformasi yang masing-masing bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ditentukan T = T_1 o T_2, maka treansformasi T bersesuaian dengan matriks ….
5. Ditentukan matriks transformasi $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hasil transformasi titik (2,-1) terhadap T_1 dilanjutkan T_2 adalah …..
6. Persamaan bayangan garis y = -8x +1 karena transformasi oleh matrik $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ kemudian dilanjutkan dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ adalah …..
7. Persamaan bayangan parabola $y = x^2 + 4$ karena rotasi dengan pusat O(0,0) sejauh 180^o adalah ….
8. Titik P(1,2) dan titik Q masing-masing ditransformasikan ke titik P'(2,3) dan ke titik Q"(2,0) oleh matriks A = $\begin{pmatrix} a+2 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Maka koordinat titik Q adalah ………
9. Persamaan bayangan garis 5x – 7y -1 = 0 oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan matriks B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ adalah …..
10. Bayangan kurva $y = x^2 - 3$ jika dicermikan terhadap sumbu x dilanjutkan dengan dilatasin pusat O dan faktor skala 3 adalah …..

11. Pencerminan garis y = -7x – 7 terhadap garis y = -3 menghasilkan garis …..
12. Vektor $\vec{x}$ dicerminkan terhadap garis y =x , kemudian hasilnya diputar terhadap titik asal O sebesar > 0 searah jarum jam menghasilkan vektor $\vec{y}$. Jika $\vec{y}$ = A. $\vec{x}$, maka matriks A = ….
13. Jika M = A^3 dan A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, maka M$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = ...
14. Segitiga ABC dengan A(4,0), B(0,-2), dan C(-2,-4) diputar 60 derajat berlawanan arah dengan jarum jam terhadap titik pusat O(0,0). Hasil transformasi tersebut adalah ….
15. Titik A (2,3) diputar terhadap titik B(-1 , -2) dengan arah berlawanan putaran jarum jam sebesar 45 derajat. Bayangan titik A adalah ….
16. Segitiga ABC dengan A(1,0), B(4,0), dan C(3,4) diputar berlawanan arah jarum jam sebesar 180 derajat dengan pusat P (a,b). Apabila diperoleh bayangan segitiga A'B'C' dengan A'(-1,-2), B'(r,s), C(3,2) , maka koordinat B' adalah …..
17. Bayangan titik A(1,2) oleh pencerminan terhadap y = 2 dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis y = -1 adalah ….
18. Bayangan titik P(-3,4) oleh pencerminan terhadap y = 2 dilanjutkan pencerminan terhadap garis x = -1 adalah…..

IRISAN KERUCUT

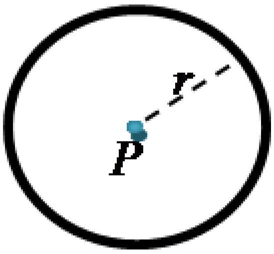
A. BENTUK-BENTUK IRISAN KERUCUT



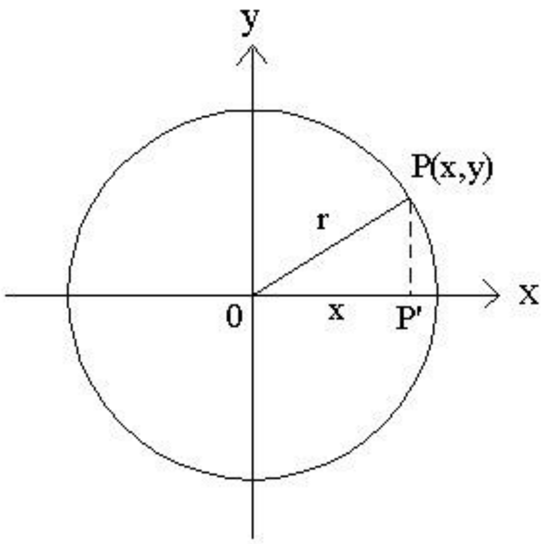
B. PERSAMAAN LINGKARAN

1. *Definisi Lingkaran :*

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut Pusat Lingkaran, sedangkan jarak titik terhadap pusat linkaran disebut jari-jari.
Gambar dibawah ini menunjukkan lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r



2. *Persmaan Lingkaran yang Berpusat di titik O(0,0) dan Berjari-jari = r*



Misalkan titik P(x,y) adalah sebarang titik yang terletak pada keliling lingkaran. TitikP' adalah proyeksi titik P ada sumbu x sehingga $\triangle$ OPP' adalah segitiga siku-siku di P'
Dengan menggunakan dalil Pythagoras pada $\triangle$ OPP', maka :

OP = $\sqrt{(OP')^2 + (PP')^2}$

Substitusi OP = r, OP' = x dan PP'=y

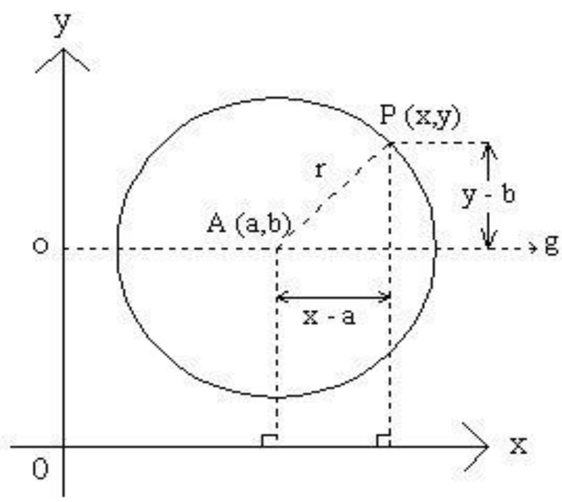
r = $\sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

$r^2 = x^2 + y^2$

Karena titik P(x,y) sebarang, maka persamaan $r^2 = x^2 + y^2$ berlaku untuk semua titik, sehingga persamaan lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r adalah :

$x^2 + y^2 = r^2$ ……………………….(1)

3. *Persamaan Lingkaran yang Berpusat di M(a,b) dan berjari-jari r*



Misalkna titik P(x,y) adalah sebarang titik terletak pada keliling lingkaran. Buat garis g melalui pusat M(a,b) dan sejajar dengan sumbu x. Proyeksi P pada garis g adalah P', sehingga APP' adalah segitiga siku-siku di P' dengan AP'= x-a, PP' = y-b dan AP = r

Dengan menggunakan dalil Pythagoras pada APP' , diproleh :

$$AP = \sqrt{(AP')^2 + (PP')^2}$$
$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Jadi Persamaan lingkaran dengan pusat M(a,b) dan berjari-jari = r adalah :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ …………………..(2)

4. *Bentuk Umum Persamaan Lingkaran*

Bentuk umum persamaan lingkaran dinyatakan dengan :

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, untuk A, B, C anggota bilangan Real

Atau

$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, untuk A, B, C, D anggota bilangan Real, A$\neq$ 0

Menentukan titik pusat dan jari-jari bentuk umum persamaan lingkaran :

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

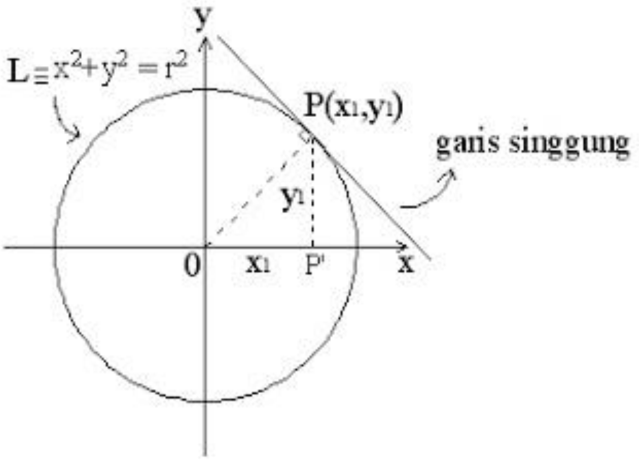
$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$.................................(3)

Berdasarkan persamaan (2), dari persamaan (3), diperoleh :

Pusat lingkaran $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan jari-jari = $\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}$

5. ***Persamaan Garis Singgungg Lingkaran***

a. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang melalui sutu titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran



Garis singgung dapat ditentukan sebagai berikut :

a. Gradien OP = $m_1 = {}^{y_1}\!/_{x_1}$

b. Karena OP $\perp$ garis singgung, maka :

$$m_1 m_2 = -1$$

$${}^{y_1}\!/_{x_1} . m_2 = -1$$

$$m_2 = -{}^{x_1}\!/_{y_1}$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran di titik $P(x_1, y_1)$, pada lingkaran adalah :

$$y - y_1 = m_2 (x - x_1)$$

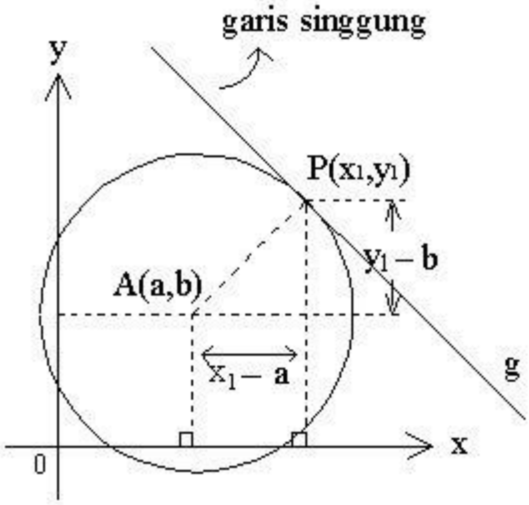
$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y.y_1 - y_1^{\ 2} = -x.x_1 + x_1^{\ 2}$$

$$x.x_1 + y.y_1 + x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} = 0$$

$$x.x_1 + y.y_1 = r^2$$

b. Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran



Garis singgung dapat ditentukan sebagai berikut :

Gradien AP =

$m_1 = {(y_1 - b)} \Big/ {(x_1 - a)}$

Karena OP $\perp$ garis singgung, maka :

$m_1 m_2 = -1$

${(y_1 - b)} \Big/ {(x_1 - a)} . m_2 = -1$

$m_2 = -{(x_1 - a)} \Big/ {(y_1 - b)}$

Persamaan garis singgung yang melalui $P(x_1, y_1)$ dan gradien

$$m_2 = -{(x_1 - a)} \Big/ {(y_1 - b)}$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$y.y_1 - y.b - y_1^2 + y_1 b = -x.x_1 + x_1^2 + ax - ax_1$$

$$x.x_1 - ax - x_1^2 + ax_1 + y.y_1 - y_1^2 - by + by_1 = 0$$

$$x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 = x_1^2 + y_1^2 \text{..............(1)}$$

Karena $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka :

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = r^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 + r^2 \text{...........(2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$$x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 = x_1^2 + y_1^2 \text{..............(1)}$$

$$x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 = 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 + r^2$$

$$(x.x_1 - ax + ax_1 - 2ax_1 + a^2) + (y.y_1 - by + by_1 - 2by_1 - b^2) = r^2$$
$$(x-a)(x_1+a) + (y-b)(y_1-b) = r^2 \text{.............................(3)}$$

Persamaan (3), adalah persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran

c. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Diketahui

1) Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradian m

Persamaan garis lurus dengan gradien m adalah y = mx +n

Substitusi y = mx + n ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

Diperoleh :

$$x^2 + (mx+n)^2 = r^2$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 = r^2$$
$$(1+m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (2mn)^2 - 4(1+m^2)(n^2 - r^2)$$
$$D = 4m^2n^2 - 4(n^2 - r^2 + m^2n^2 - mr^2)$$
$$D = 4m^2n^2 - 4n^2 + 4r^2 - 4m^2n^2 + 4mr^2$$
$$D = 4(m^2r^2 - n^2 + r^2)$$

Karena menyinggung, berarti D= 0

$$4(m^2r^2 - n^2 + r^2) = 0$$
$$m^2r^2 - n^2 + r^2 = 0$$
$$(m^2+1)r^2 = n^2$$
$$n = \pm r\sqrt{m^2+1)}$$

Substitusi $n = \pm r\sqrt{m^2+1)}$ ke persamaan garis y = mx + n diperoleh :

y = mx ± $r\sqrt{m^2+1)}$

Jadi rumus persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah : y = mx ± $r\sqrt{m^2+1)}$

2). **Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dengan gradien m**

Persamaan garis dengan gradien m adalah y = mx +n

Substitusi y = mx +n ke persamaan lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ diperoleh :

$(x-a)^2+(mx+n-b)^2=r^2$

$x^2-2ax+a^2+m^2x^2+n^2+b^2+2mxn-2mxb-2nb-r^2=0$

$(1+m^2)x^2-2(a-mn+bm)x+(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)=0$

Nilai diskriminan :

$D=b^2-4ac$

$D=\{-2(a-mn+bm\}^2-4(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)$

Karena garis menyingung lingkaran , maka :

$D=b^2-4ac=0$

$\Leftrightarrow \{-2(a-mn+bm\}^2-4(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)=0$

$\Leftrightarrow 4(a-mn+bm)^2-4(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)=0$

$\Leftrightarrow (a-mn+bm)^2-(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)=0$

$\Leftrightarrow a^2+m^2n^2+b^2m^2-2amn+2abm-2m^2nb-a^2-n^2-b^2+2bn+r^2-$

$a^2m^2-m^2n^2-m^2b^2+2m^2bn+m^2r^2=0$

$\Leftrightarrow (n^2+a^2m^2+b^2+2amn-2bn-2abm)-r^2(1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow (n+am-b)^2-r^2(1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow (n+am-b)^2=r^2(1+m^2)$

$\Leftrightarrow n+am-b=\pm r\sqrt{1+m^2}$

$\Leftrightarrow n=-am+b\pm r\sqrt{1+m^2}$ ....(1)

Substitusi persmaan (1) kedalam y = mx +n, diperoleh :

$y=mx-am+b\pm r\sqrt{1+m^2}$

$(y-b)=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$

3). Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui sebuah titik diluar lingkaran tersebut .

Cara untuk menentukan persamaan-persamaan garis singgung yang terletak diluar lingkaran dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 :

Persamaan garis melalui P(x_1,y_1) dengan gradian m adalah :

$y-y_1 = m(x-x_1)$

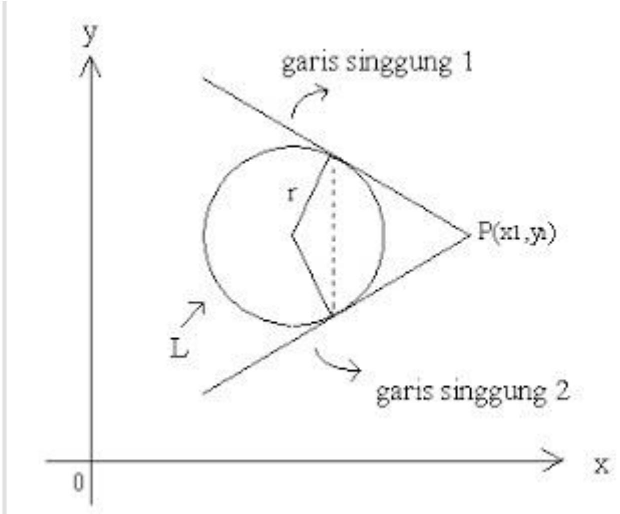
$y=mx-mx_1+y_1$ ....(1)

Langkah 2 :

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh persaman kuadrat gabungan. Kemudian dihitung diskriminan dari persamaan kuadrat tersebut.

Langkah 3:
Karena garis singgung menyinggung lingakarn, maka D= 0.
Dari syarat D = 0 akan diperoleh nilai-nilai dari m. Nilai-nilai dari m ini selanjutnya di substitusikan ke persamaan garis :
$y = mx - mx_1 + y_1$

Perhatikan gambar berikut ini :



Contoh 1 :
Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0,0) dan melalui titik A(-3,5) ?
Jawab :
Lingkaran berpusat di O(0,0) dan melalui A(-3,5) , jari-jari lingkaran
r = $\sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
Persamaan yang dimaksud adalah :
$x^2 + y^2 = r^2$
$x^2 + y^2 = 34$

Contoh 2 :
Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$
Jawab :
A = 4 , B= -10 , C = 13
Pusat lingkaran $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{4}{2}, -\frac{-10}{2})$ = (-2,5)
jari-jari r = $\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \sqrt{\frac{4^2 + (-10)^2 - 4.13}{4}} = \sqrt{16} = 4$

Contoh 3 :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran : $x^2+y^2= 13$ yang melalui titik (-3,2) ?

Jawab :

Titik (-3,2) kita substitusi ke lingkaran tersebut , maka

$x^2 + y^2 = 13 \Leftrightarrow 9 + 4 = 13$

berarti titik (-3,2) terletak pada lingkaran.

Jadi persamaan garis singgung yang melalui titik (-3,2) pada lingkaran adalah :

$$x.x_1 + y.y_1 = r^2$$
$$-3x + 2y = 13$$

Contoh 4 :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ yang melalui titik (7,2) ?

Jawab :

Jika titik (7,2) kita substitusikan ke persamaan lingkaran tersebut :

$(7-3)^2 + (2+1)^2 = 25 \Leftrightarrow 16 + 9 = 25$

Jadi titik (7,2) terletak pada lingkaran, sehingga persamaan garis singgungnya :

$$(x-a)(x_1+a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$$
$$(x-3)(7-3)+(y+1)(2+1)=25$$
$$4x-12+3y+3=25$$
$$4x+3y-34=0$$

Contoh 5 :

Tentukan persmaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 16$, jika diketahui mempunyai gradien = 3 ?

Jawab :

Rumus persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah : $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1)}$

Jadi persmaan garis singgung tersebut adalah :

$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1)} \Leftrightarrow y = 3x \pm 16\sqrt{3^2+1)} \Leftrightarrow y = 3x \pm 16\sqrt{10}$

$y = 3x +16\sqrt{10}$ dan $y = 3x -16\sqrt{10}$

Contoh 6:

Tentukan persmaan garis singgung lingkaran $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ yang mempunyai gradien m = 5/12

Jawab :

Persamaan garis singgung nya :

$$(y-b)=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$(y+2)=\frac{5}{12}(x-1)\pm 9\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}$$

$$5x-12y-29\pm 39=0$$

Jadi persmaan garis singgungnya adalah :

5x – 12y +10 = 0 dan 5x -12y -68 = 0

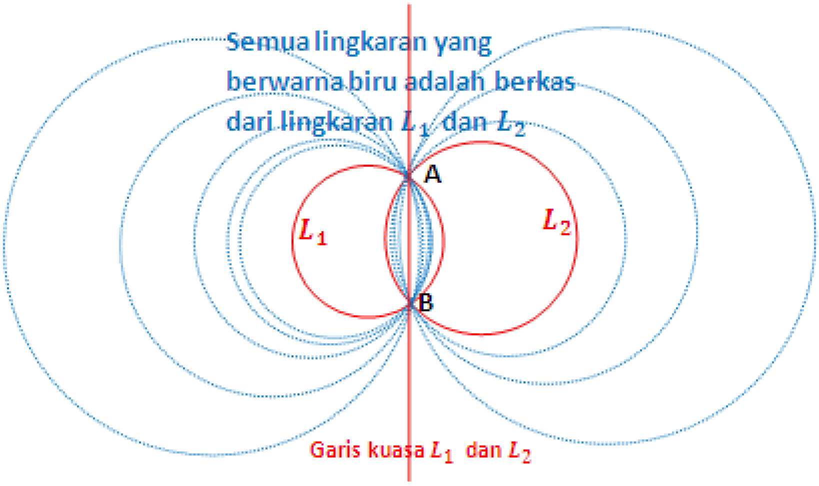
6. Berkas Lingkaran

Definisi Berkas Lingkaran

Berkas lingkaran adalah sembarang lingkaran yang dibuat melalui dua buah titik potong dari dua lingkaran.

Misalnya lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di titik A dan B , maka persamaan berkas lingkaran yang melalui titik A dan B adalah $L_1+\lambda L_2=0$ atau

$L_1+\lambda h = 0$ atau $L_2+\lambda h = 0$ dimana garis h adalah garis potong L_1 dan L_2



Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui kedua titik potong $L_1 \equiv x^2+y^2 = 25$ dan $L_2 \equiv x^2+y^2 = 31$, serta melalui titik (7,6) ?

Jawab :

Persamaan berkas lingkaran adalah :

$L_1+\lambda L_2=0$

$x^2+y^2-25 + \lambda(x^2+y^2-31) = 0$……….(1)

karena melalui titik (7,6), maka :

$x^2+y^2-25 + \lambda(x^2+y^2-31) = 0$

$7^2+6^2-25 + \lambda(7^2+6^2-31) = 0$

$60 + \lambda .54 = 0$

$\lambda = \frac{-60}{54}$

Kita substitusikan λ kedalam persamaan (1), kita peroleh :

$x^2+y^2-25 + \frac{-60}{54}(x^2+y^2-31) = 0$ (kita kalikan 54)

$54x^2+54y^2-1350 - 60x^2 - 60y^2 + 1860 = 0$

$-4x^2 - 4y^2 + 510 = 0$

$x^2+y^2 = 127{,}5$

Contoh 2 :

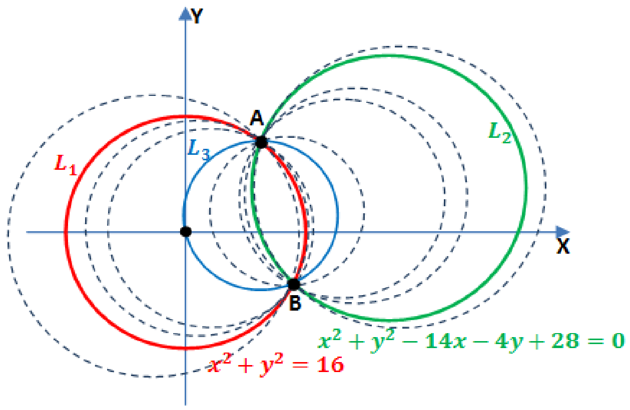
Pada gambar di bawah ini lingkaran berwarna merah $L_1 \equiv x^2+y^2 = 16$, Lingkaran berwarna hijau $L_2 \equiv x^2+y^2-14x-4y+28=0$, dan lingkaran yang berwarna biru semuanya berpotongan di titik A dan B .

a. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B

b. Tentukan persamaan dari semua lingkaran yang berwarna biru

c. Salah satu lingkaran biru L_3 melalui titik asal, tentukan persamaannya

Jawab :



a. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B

Titik A dan B adalah titik potong kedua lingkaran merah L_1 dan lingkaran hijau L_2

Persamaan garis melalui kedua titik potong lingkaran adalah garis potong.

Langkah pertama kita cari garis potong dari L_1 dan L_2 :

$L_1 - L_2 = 0$

$x^2+y^2 - 16 - (x^2+y^2-14x-4y+28) = 0$

$-16 + 14x + 4y - 28 = 0$

$7x+2y-22=0$, yang merupakan garis potong h

b. Tentukan persamaan dari semua lingkaran yang berwarna biru

Persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran adalah berkas lingkaran dari kedua lingkaran itu.

Persamaan berkas lingkarannya adalah :

$L_1 + \lambda h = 0 \leftrightarrow (x^2 + y^2 - 16) + \lambda(7x+2y-22) = 0$
$x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16 = 0$

c. Salah satu lingkaran biru L_3 melalui titik asal, tentukan persamaannya
Lingkaran biru L_3 adalah salah satu berkas lingkaran, jadi persamaannya :
$x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16 = 0$

Untuk mencari nilai λ kita substitusikan titik asal (0,0) ke berkas lingkaran :

$(0,0) \rightarrow x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16 = 0$
$0^2+0^2+7\lambda(0)+2\lambda(0)-22\lambda-16=0$
$-22\lambda=16$
$\lambda=-\frac{8}{11}$

Jadi persamaan lingkarannya adalah :

$x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16 = 0$
$x^2 + y^2 + 7(-\frac{8}{11})x + 2(-\frac{8}{11})y - 22(-\frac{8}{11}) - 16 = 0$
$x^2 + y^2 - 56x - 16y = 0$

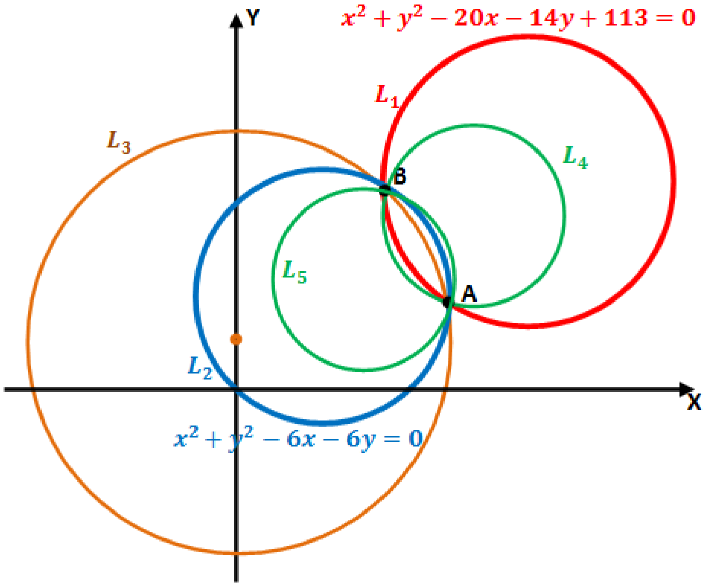
Contoh 3 :

Pada gambar di bawah ini lingkaran merah $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 20x - 14y + 113 = 0$, lingkaran biru $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$, lingkaran coklat L_3, dan lingkaran hijau L_4 dan L_5 semuanya berpotongan di titik A dan B
Tentukan:

a. Persamaan L_3 , L_4 dan L_5 dalam parameter λ
b. Jika lingkaran L_3 berpusat di sumbu Y , maka tentukan Persamaannya ?

c. Jika lingkaran L_4 dan L_5 berjari-jari $\frac{1}{2}\sqrt{43}$, maka tentukan persamaannya ?

Jawab :



a. Persamaan L_3 , L_4 dan L_5 dalam parameter λ

L_3 , L_4 dan L_5 adalah anggota berkas lingkaran:

$L_1 \equiv x^2 + y^2 - 20x - 14y + 113 = 0$

$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$

Persamaan garis potong kedua lingkaran

$L_1 - L_2 = 0$

$(x^2 + y^2 - 20x - 14y + 113) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y) = 0$

$14x + 8y - 113 = 0$

(persamaan garis melalui A dan B)

Persamaan berkas lingkaran nya :

$L_2 + \lambda h = 0$

$(x^2 + y^2 - 6x - 6y) + \lambda(14x + 8y - 113) = 0$

$(x^2 + y^2 - 6x - 6y) + 14\lambda x + 8\lambda y - 113\lambda) = 0$

(persamaan berkas lingkaran melalui L_1 dan L_2)

b. Jika lingkaran L_3 berpusat di sumbu Y , maka tentukan persamaannya.

L_3 adalah salah satu berkas lingkaran yang mempunyai persamaan :

$(x^2 + y^2 - 6x - 6y) + 14\lambda x + 8\lambda y - 113\lambda) = 0$

$x^2 + y^2 + (14\lambda - 6)x + (8\lambda - 6)y - 113\lambda) = 0$.........(1)

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ pusatnya $(-A/2, -B/2)$, sehingga pusat dari lingkaran (1) adalah

Pusat lingkarannya $\left(-\frac{14\lambda - 6}{2}, -\frac{8\lambda - 6}{2}\right)$

Karena pusatnya pada sumbu , maka absisnya x = 0

$$-\frac{14\lambda-6}{2}=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{7}$$

Substitusikan $\lambda=\frac{3}{7}$, maka persamaan (1) menjadi :

$x^2 + y^2 + (14\lambda - 6)x + (8\lambda - 6)y - 113\lambda = 0$

$x^2 + y^2 + (14(\frac{3}{7}) - 6)x + (8(\frac{3}{7}) - 6)y - 113(\frac{3}{7}) = 0$

$x^2 + y^2 + 0x + (-\frac{18}{7})y - 113(\frac{3}{7}) = 0$

$7x^2 + 7y^2 - 18x - 339 = 0$

c. Jika lingkar an L_4 dan L_5 berjari-jari $\frac{1}{2}\sqrt{43}$, maka tentukan persamaannya L_4 dan L_5 adalah salah satu berkas lingkaran yang mempunyai persamaan :

$x^2 + y^2 + (14\lambda - 6)x + (8\lambda - 6)y - 113\lambda) = 0$

$x^2 - 6x + 14\lambda x + y^2 - 6y + 8\lambda y = 113\lambda$

$(x - 3 + 7\lambda)^2 - (-3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 - (-3 + 4\lambda)^2 = 113\lambda$

$(x - 3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 = (-3 + 7\lambda)^2 + (-3 + 4\lambda)^2 + 113\lambda$

$(x - 3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 = \underbrace{65\lambda^2 + 47\lambda + 18}_{r^2}$

Karena jari-jarinya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{43}$, maka :

$65\lambda^2 + 47\lambda + 18 = (\frac{1}{2}\sqrt{43})^2$

$65\lambda^2 + 47\lambda + 18 = \frac{43}{4}$

$160\lambda^2 + 118\lambda + 29 = 0$

$(2\lambda + 1)(130\lambda + 29) = 0$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ atau $\lambda = \frac{-29}{30}$

Substitusikan nilai dari λ yang didapat ke persamaan lingkaran terakhir :

$(x - 3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 = 65\lambda^2 + 47\lambda + 18$

$\lambda = -\frac{1}{2}$, maka $(x - \frac{13}{2})^2 + (y - 5)^2 = \frac{43}{4}$ (persamaan L_4)

$\lambda = \frac{-29}{30}$, maka $(x - \frac{593}{130})^2 + (y - \frac{506}{130})^2 = \frac{43}{4}$ (persamaan L_5)

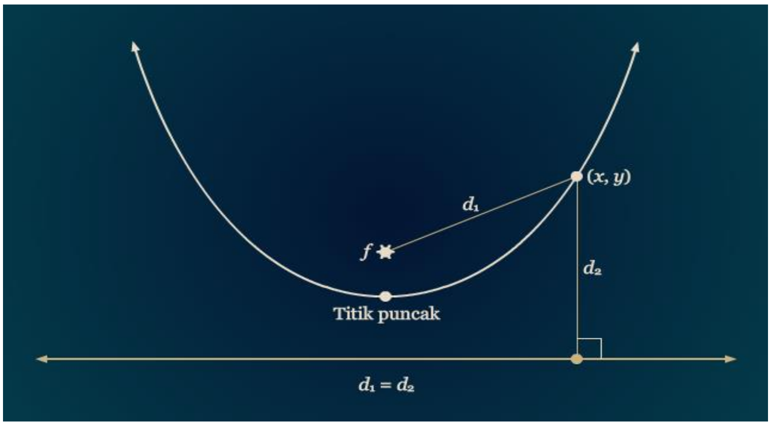
SOAL LATIHAN

1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran $x^2+ y^2=25$ dan $x^2+y^2+6x+2y-55=00$ serta melalui titik A(10,10) ?
2. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui dua titik potong lingkaran $x^2+ y^2-2x =35$ dan $x^2+ y^2 -2y = 24$ serta melalui titik (4,-3) ?
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat pada garis x + y = 10 dan melalui titik potong kedua lingkaran $x^2+ y^2-2x-2y=34$ dan $x^2+ y^2 + 8x - 2y -100=0$?
4. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung lingkaran $x^2+ y^2-12x-20y+102 = 0$ di titik (3,5) serta melalui (-5,3) ?!
5. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui kedua titik potong lingkaran $x^2+ y^2-100=0$x2+y2-100=0 dan $x^2+ y^2-12x+88=0$x2+y2-12x+88=0 , serta berjari-jari 20
6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran $x^2+ y^2 -6x-6y=7$ dan $x^2+ y^2 +2x+4y-7=0$ serta menyinggung garis x= 234 ?
7. Lingkaran $L1 \equiv x^2+ y^2 - 3x-5y-7=0$, dan $L_2\equiv x^2+ y^2 +x+2y-3=0$ berpotongan di titik A dan B . Tentukan persamaan lingkaran yang berdiameter ruas garis B?

C. PARABOLA

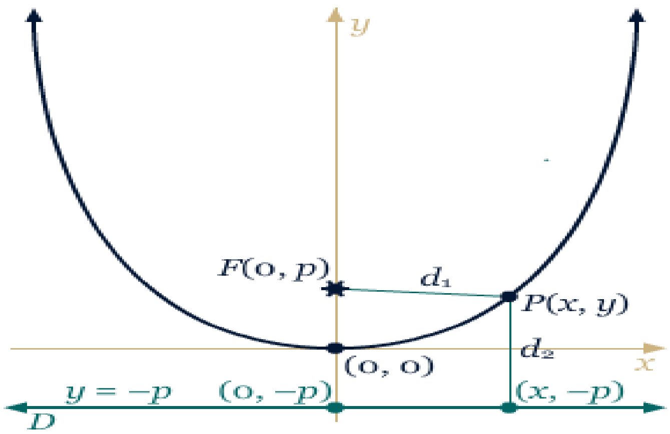
1. Definisi Parabola

Diberikan suatu titik tertentu f dan garis tertentu d dalam bidang. Suatu parabola adalah himpunan semua titik (x, y) sedemikian sehingga jarak antara f dan (x, y) sama dengan jarak antara d dan (x, y). Titik f disebut sebagai fokus parabola dan garis d disebut sebagai direktriks.



2. Parabola Dengan Puncak O(0,0)

Persamaan umum dari suatu parabola dapat diperoleh dengan mengkombinasikan definisi di atas dan rumus jarak. Dengan tidak mengurangi keumuman, kita dapat menganggap parabola yang ditunjukkan pada gambar di atas memiliki titik puncak di (0, 0) dan memiliki titik fokus di $(0, p)$. Seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah, parabola yang dimaksud memiliki direktriks dengan persamaan $y = -p$, sehingga semua titik pada d dapat dituliskan sebagai $(x, -p)$.

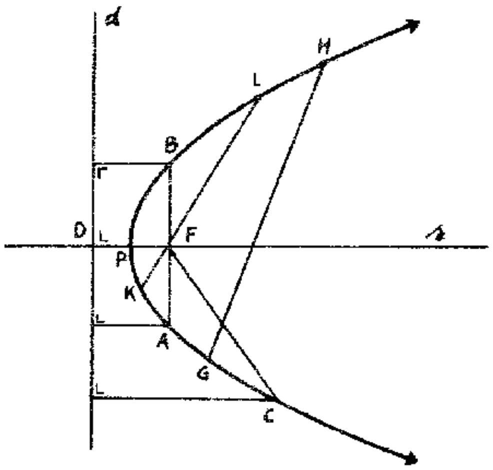


Dengan menggunakan rumus jarak dan menerapkan definisi bahwa $d_1 = d_2$, kita mendapatkan,

	$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$	$=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$	definisi
$\Leftrightarrow$	$(x-0)^2+(y-p)^2$	$=(x-x)^2+(y+p)^2$	kedua ruas dikuadratkan
$\Leftrightarrow$	$x^2+y^2-2py+p^2$	$=0+y^2+2py+p^2$	sederhanakan
$\Leftrightarrow$	x^2-2py	$=2py$	kurangi dengan p^2 dan y^2
$\Leftrightarrow$	x^2	$=4py$	pisahkan x^2

Persamaan terakhir di atas disebut *persamaan bentuk fokus-direktriks* dari suatu parabola vertikal dengan titik puncak di (0, 0). Jika parabola di atas diputar sehingga terbuka ke kanan, maka kita akan mendapatkan suatu parabola horizontal dengan titik puncak di (0, 0), dan persamaannya adalah $y^2 = 4px$.

Istilah-istilah yang berhubungan dengan parabola:



s = FD = sumbu simetri

P = Puncak Parabola

F = Fokus (titik api)

d = direktriks

GH = talibusur

KL = Talibusur fokus

AB = Latus rectum

|FC| = Jari-jari fokus

Sifat parabola dengan persamaan $y^2 = 4px$. adalah:

a. Fokus F(p, 0)
b. Direktriks d: x = -p
c. Sumbu simetri - y = o (sumbu x)
d. Puncak o (0, 0) (titik pangkal)
e. Jika p pos itif. parabola membuka ke kanan dan jika p negatif parabola membuka ke kiri.

Contoh 1

Carilah persamaan sederhana parabola yang mempunyai fokus (0, -2) dan puncaknya o (0, 0). Kemudian sebutkan semua sifat tentang parabola ini?

Jawab :

Fokus F(0, -2) dan puncak o (0, 0) berarti p = -2 sehingga persamaan parabola yang dicari adalah $x^2 = 4(-2)x \Leftrightarrow x^2 = -8y$.

Contoh 2 :

Ditentukan parabola dengan persamaan $4y^2 - 25x = 0$

a. Carilah persamaan latus rectum dan koordinat titik ujung dari latus rectum ini!
b. Bicarakan dam sketsa grafiknya!

Penyelesaiannya:

a. Latus reectum ialah talibusur fokus tegak lurus sumbu simetri. Jadi latus rectum ini melalui fokus F dan tegak lurus sumbu simetri. Persamaannya kita cari sebagai berikut:

$$4y^2 - 25x = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{25}{4}x$$

Kalau kita bandingkan dengan parabola $y^2 = 4px$, maka $4p = \frac{25}{4}$ atau $p = \frac{25}{16}$ Jadi fokus F ($\frac{25}{16}$, 0) dan sumbu x sebagai sumbu simetrinya.

Untuk mencari koordinat titik-titik ujung latus rectum maka kita harus ingat bahwa titik-titik ujung ini terletak pada parabola. dengan kata lain koordinatnya memenuhi persamaan parabola. Kita cari sebagai berikut:

$$y^2 = 4\left(\frac{25}{16}\right)x$$

$$x = \frac{25}{16}$$

$$y^2 = 4\left(\frac{25}{16}\right)^2 = \left(\frac{50}{16}\right)^2$$

$$y = \pm\frac{50}{16} = \pm\frac{25}{8}$$

Jadi titik titik ujung latus rectum adalah:

$(\frac{25}{16}, \frac{25}{8})$ dan $(\frac{25}{16}, -\frac{25}{8})$

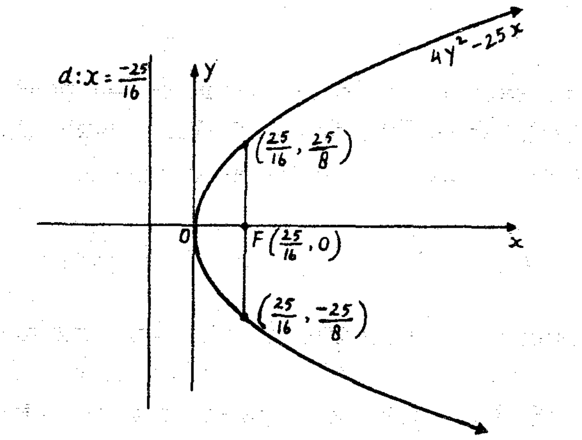
b. Maksud "bicarakan" dalam hal ini ialah menentukan sifat-sifat dari parabola yaitu mencari fokus direktriks sumbu, simetri puncak latus rectum dan titik-titik ujung latus rectum.

Dari persamaan $y^2 = 4\,(\frac{25}{16})x$ dan dari hasil a maka kita peroleh:

1) Fokus F ($\frac{25}{16}$. 0)
2) Direktriks d: $x = -\frac{25}{16}$
3) Sumbu simetri y = o (sumbu x)
4) Puncak o (0, 0)
5) Persamaan latus rectum $x = \frac{25}{16}$ dan titik-titik ujungnya: $(\frac{25}{16}, \frac{25}{8})$

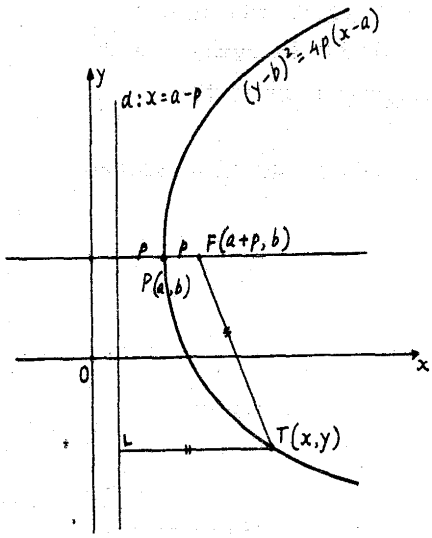
dan $\left(\frac{25}{16}, -\frac{25}{8}\right)$

6) Parabola membuka ke - kanan
7) Grafiknya (lihat gambar 2.4).



2. Parabola dengan Puncak (a, b) dan sumbu simetri sejajar sumbu koordinat

Bagaimanakah persamaan parabola yang berpuncak pada titik P(a, b). sumbu simetrinya sejajar sumbu x dan jarak dari fokus ke direktriksnya adalah 2/p/? Berarti fokusnya adalah F(a + p. b) dan direktriksnya adalah d: x = a - p. Agar lebih jelas baiklah kita gambar dulu sketsanya! (Lihat gambar 2.5).



Misalkan T(x, y) pada parabola, maka jarak (T, d) = /TF/

$$\left|\frac{x-a+p}{1}\right| = \sqrt{(x-a-p)^2 + (y-b)^2}$$

(x - a + P)^2 = (x - a - p)^2 + (y - b)^2

(y - b)^2 = 4p(x - a)

Jadi, parabola yang berpuncak di P(a, b) dan berfokus F(a + p. b) memiliki persamaan:

(y - b)^2 = 4p(x - a)

Cara yang sama seperti di atas untuk puncak di P(a, b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu y, maka akan kita peroleh persamaan parabola:
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$.
Kalau kita perhatikan parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$.,

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{2a}{4p} x + \frac{a^2 + 2pb}{4p}$$

dan mengingat fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (secara aljabar), maka jelaslah bahwa grafik fungsi kuadrat adalah berupa parabola dengan sifat-sifatnya dapat ditentukan (fokus. puncak. latus rectum dan sebagainya).

Contoh 1

Carilah persamaan parabola yang berpuncak di titik P(2, 3) dan fokus F(4, 3)!
Jawab :
Puncak P(2, 3), maka a = 2 dan b = 3.
Fokus F(4, 3) = F(2 + 2, 3) berarti p = 2 dan sumbu simetri sejajar sumbu x dan direktriks d: x = 2 - 2 = 0. Kita tahu bahwa. jika puncak P(a, b) dan fokus F(a + p, b) maka persamaan parabolanya: $(y - b)^2 = 4p(x - a)$.
Jadi persamaan parabola yang dicari adalah:
$(y - 3)^2 = 4.2(x - 2) \Leftrightarrow (y - 3)\ 2 = 8(x - 2)$.

Catatan:
Cara lain untuk persamaan parabola dengan fokus dan direktriksnya diketahui ialah dengan menggunakan konsep tempat kedudukan.

Contoh 2

Bicarakanlah parabola $x^2 + 2x - y - 3 = 0$.
Jawab:

$x^2 + 2x – y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = y + 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4¼\ (y + 4)$.
Kalau kita bandingkan dengan persaman parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ maka :
a = - 1. b = -4 dan p = ¼.
Sifat-sifat dari parabola: $(x -1)^2 = 4.\ ¼\ (y + 4)$ adalah

a. Puncak P(-1, -4)
b. Fokus F(-1, -4 + , 1) = F(-1, -3¾)
c. Direktriks d: y - 4 - ¼ = -4¼
d. Sumbu simetri x = -1
e. Latus rectum, y = -3¾ dan titik-titik ujungnya adalah (-1, -3¾) dan (-1½, -3¾)
f. Titik potong dengan sumbu x di (-3, 0) dan (1, 0) Titik potong dengan sumbu y di (0, -3).
g. Parabola membuka ke atas

3. Garis singgung terhadap Parabola

Kita akan mencari persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola $y^2 = 4px$.

Misalkan garis dengan gradien s memiliki persamaan g: $y = sx + k$. Perpotongan g dengan parabola $y^2 = 4px$ dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} y^2 = px \\ y = sx + k \end{cases}$$

Maka :

$(sx + k)^2 = 4px \Leftrightarrow s^2x^2 + (2ks - 4p)x + k^2 = 0$

dengan deskriminan:

$D = (2ks - 4p^2 - 4k^2s^2$

Jika $D < 0$ garis g tidak memotong parabola,

Jika $D > 0$ garis g memotong parabola pada dua titik

Jika $D = 0$ garis g memotong parabola pada satu titik. berarti g menyinggung parabola.

Jadi, syarat agar garis g menyinggung parabola adalah:

$(2ks - 4p)^2 - 4k^2s^2 = 0 \Leftrightarrow 4k^2s^2 - 16ksp^2 + 16p^2 - 4k^2s^2 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{p}{s}$

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola:

$y^2 = 4px$, adalah $\quad y = sx + \dfrac{p}{s}$

Bagaimana jika persamaan parabolanya $x^2 = 4px$?

Dengan cara seperti di atas maka akan kita peroeh bahwa persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola $x^2 = 4px$ adalah:

$y = sx - ps^2$ Silakan anda buktikan!

Jika parabolanya $(y - b)^2 = 4p(x, a)$, maka persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola ini adalah:

$y - b = s(x - a) + \dfrac{p}{s}$,dan jika parabolanya

Dan jika parabolanya :

$(x - a)^2 = 4p(y - b)$, maka :

persamaan garis singgungnya adalah:

$y - b = s\,(x - a) - ps^2$

Contoh 1

Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap parabola $y^2 = 8x$ dan terhadap parabola $(x - 3)^2 = -6\,(y + 1)$. Kemudian carilah titik singgungnya dan sketsa grafikya

Jawab :

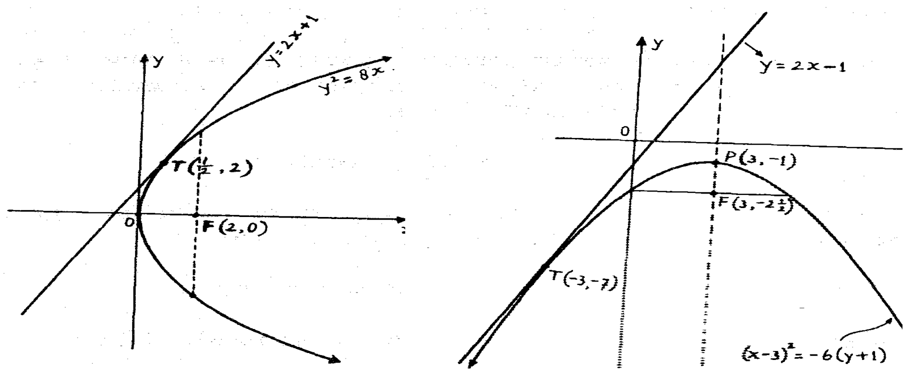
Persamaan garis singgung dengan gradien garis s terhadap parabola $y^2 = 4px$ adalah $y = sx + \frac{p}{s}$. Dengan mengunakan rumus ini, maka persamaan garis singgung dengan gradien 2 (s = 2) terhadap parabola $y^2 = 8x$ adalah $y = 2x + \frac{2}{2} \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

Dengan menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola $(x- a)^2 = 4p(y - b)$. yaitu: $y - b = s(x - a) – ps^2$, maka:
persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap parabola:
$(x - 3)^2 = -6(y + 1)$ atau $(x - 3)^2 = 4(-\frac{3}{2}) + (y + 1)$ adalah:
$y + 1 = 2(x - 3) - (-\frac{3}{2})\ 2^2 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

Titik singgung garis $y = 2x + 1$ terhadap parabola $y^2 = 8x$ dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Maka: $(2x + 1)^2 = 8x \Leftrightarrow x = ½$.
Jadi titik singgungnya adalah T(½, 2).
Dengan cara yang sama seperti di atas maka titik singgung garis $y = 2x - 1$ terhadap parabola $(x - 3)^2 = -6(y + 1)$ adalah T (-3. -7)
sketsa grafiknya :



Contoh 2

Buktikan bahwa garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 4px$ adalah $y_1y = 2p(x + x_1)$. Kemudian carilah persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $x^2 = 4py$.

a. **Bukti:**

Garis singgung melalui titik (x_1, y_1) dan misalkan gradiennya s maka persamaannya dapat ditulis g: $y – y_1 = s(x - x_1)$. Perpotongan garis g dengan parabola y = 4px adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} y - y_1 = s(x - x_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{y - y_1 + sx_1}{s} \\ y^2 = 4px \end{cases}$$

Maka $y^2 = 4p(\dfrac{y - y_1 + sx_1}{s}) \Leftrightarrow sy^2 - 4py + (4py_1 - 4psx_1) = 0$

Agar garis g menyinggung maka:

$D = 16p^2 - 4s(4py_l - 4psx_1) = 0 \Leftrightarrow p^2 - py_ls + px_ls^2 = 0.$

$x_1s^2 - y_1s + p = 0$

$$s = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}, \text{ yang mana } y_1^{\ 2} - 4px_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = \frac{y_1^{\ 2}}{2p}$$

$$s = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{y_1}{\frac{y_1^{\ 2}}{2p}} = y_1 . \frac{2p}{y_1^{\ 2}} = \frac{2p}{y1}$$

Demikian, karena (x_1, y_1) pada parabola sehingga $y_1^2 - 4px_1 = 0$ dan $x_l = \dfrac{y_1^2}{2P}$

Substitusi $s = \dfrac{2p}{y_1}$ pada persamaan g: $y - y_l = s(x - x_1)$, maka kita peroleh persamaan garis singgung g: $y_ly = 2p(x + x_1)$.

b. Misalkan gradien singgung adalah s maka persamaan garis singgung dapat ditulis $y - y_1 = s(x - x_1) \Leftrightarrow y = y_1 + sx - sx_1$. Perpotongan parabola $x^2 = 4py$ dengan garis $y = y_l + sx - sx_1$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} x^2 = 4py \\ y = y_1 + sx - sx_1 \end{cases}$$

Maka:

$$x^2 = 4p(y_1 + sx - sx_1) \Leftrightarrow x^2 - 4psx - 4py_1 + 4psx_1 = 0$$

Agar - garis menyinggung parabola adalah:

$D = 16p^2s^2 - 4(4psx_1 - 4py_1) = 0$

$p^2s^2 - psx_1 + py_1 = 0$

$ps^2 - x_1s + y_1 = 0$

$$s = \frac{\sqrt{x_1^2 - py_1}}{2p}$$

$$= \frac{x_1}{2p}$$

Catatan:

Karena (x_1, y_1) pada parabola maka $x_1^2 = 4py_1$, atau $x_1^2 - 4py_1 = 0$

Substitusi s = $\frac{x_1}{2p}$ pada persamaan garis y - y_1 = s(x - x_1), maka kita peroleh persamaan garis singgung terhadap parabola x^2 = 4py di titik (x_1, y_1), yaitu x_1x = 2p(y + y_1).

Rangkuman

1) Parabola dengan persamaan sederhana y^2 = 4px memiliki sifat:
   a. Fokus F(p, 0)
   b. Direktriks d: x = -p
   c. Sumbu simetri s: y = 0 (sumbu x)
   d. Puncak O(0,0)
   e. Jika p positif parabola membuka ke kanan dan jika p negatif parabola membuka ke kiri.
2) Parabola dengan persamaan sederhana x^2 = 4px memiliki sifat:
   a. Fokus F(0, p)
   b. Direktriks d: y = -p
   c. Sumbu simetri s : x= 0 (sumbu y)
   d. Puncak O (0, 0)
   e. Jika p positif parabola membuka ke atas dan jika p negatif parabola membuka ke bawah.
3) Parabola dengan persamaan $(y - b)^2$ = 4p(x - a) memiliki sifat:
   a. Puncak P(a, b)
   b. Fokus F(a + p, b)
   c. Sumbu s imetri s: y = b
   d. Direktriks d: x = a - p
   e. Latus rectum : x = a + p
4) Parabola dengan persamaan $(x - a)^2$ = 4p(y - b) memiliki sifat:
   a. Puncak P(a, b)
   b. Fokus F(a + b, p)
   c. Sumbu simetri s: x = a
   d. Direktriks d: y = b – p
   e. Latus rectum : y = b + p
5) Garis singgung dengan gradien s terhadap parabola:
   a. y^2 = 4px memiliki persamaan y = sx + $\frac{p}{s}$
   b. x^2 = 4py memiliki y = sx - ps^2
   c. $(y - b)^2$ = 4p(x - a) memiliki persamaan y - b = s(x - a) + $\frac{p}{s}$
   d. $(x - a)^2$ = 4p(y - b) memiliki persamaan y - b = s(x - a) - ps^2
6) Garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola:
   a. y^2 = 4px memiliki persamaan y_ly = 2p(x + x_1)
   b. x = 4px memiliki persamaan x_1x = 2p(y + y_1)

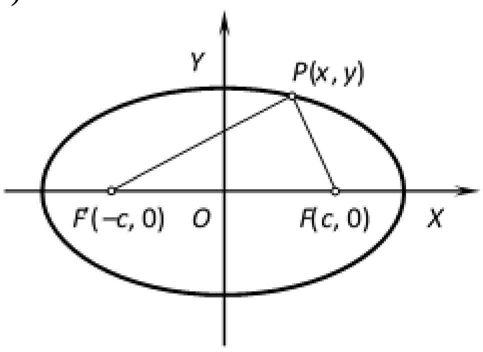
SOAL LATIHAN

1) Carilah persamaan, sederhana parabola yang memenuhi syarat-syarat:
   a. Fokus (0, 3) dan, Puncak O
   b. Fokus (-2, 0) dan Puncak O
   c. Fokus terletak pada sumbu y dan kurvanya melalui (8, -3).
2) Carilah persamaan latus rectum dan koordinat titik ujungnya untuk parabola:
   a. $y^2 - 36 = 0$
   b. $x + 6y = 0$
   c. $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$
   d. $(y + 4)^2 = 4(x - 1)$
3) Bicarakan dan sketsa grafiknya:
   a. $4y^2 - 25x = 0$
   b. $y = x^2 - x - 6$
   c. $(y - 2) = 6(x - 3)$
4) Carilah persamaan parabola dalam bentuk $(x - a)^2 = 4p(y -- b)$ atau. $(y - b) = 4p(x - a)$ yang memenuhi syarat-syarat:
   a. P(-2, 3) sebagai puncak dan F(0, 3) sebagai fokusnya.
   b. Puncak (-2, 4) dan direktriks y = 7.
5) Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap pasabola $x^2 = 8y$ dan terhadap parabola $(y - 3)^2 = -6(x + 1)$. Kemudian carilah koordinat titik singgungnya dan sketsa grafiknya?

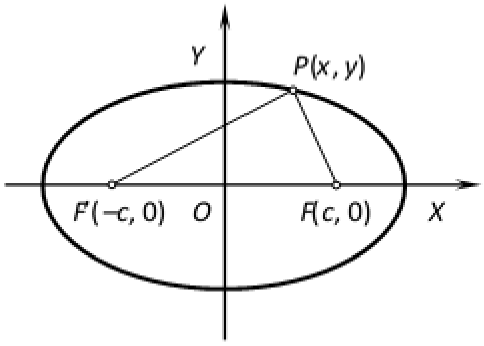
C. ELLIPS

1. <u>Definisi</u> <u>Ellips</u>

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik sedemikian hingga jumlah jaraknya dari pasangan dua titik tertentu yang berbeda adalah konstan. Dua titik tertentu di atas disebut titik fokus (*foci*).



Untuk menurunkan persamaan kurva ellips, dimisalkan kedua fokus berada pada sumbu-*x* dan sumbu-*y* menjadi bisektor tegak lurus segmen yang menghubungkan kedua fokus. Misalkan jarak antara kedua fokus adalah 2*c*, sehingga titik fokusnya adalah *F*(*c*, 0) dan *F*'(–*c*, 0) (perhatikan gambar di bawah ini).



Jika *P*(*x*, *y*) adalah sembarang titik yang berada pada ellips, maka menurut definisi akan berlaku

$$PF + PF' = \text{konstan} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Pada saat titik P (x,y) berada di sumbu x, maka PF + PF' = a + c + a – c = 2a

Sehingga konstanta tertentu itu adalah 2*a*, maka dengan menggunakan rumus jarak untuk menyatakan *PF* dan *PF*' diperoleh:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\tfrac{cx}{a}$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\tfrac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\tfrac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Pada saat titik P(x,y) berada di sumbu y, maka Segitiga *F*'*PF* merupakan segitiga sama kaki, sehingga PF = PF'.

PF = PF’ dan PF + PF’ = 2a, maka : PF = PF’ = a

Sedangkan dalam segitiga OPF , yang mana titik P(x,y) berada di sumbu Y, maka berlaku dalail Pythagoras :

$PF^2 = OP^2 + OF^2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2$, dengan syarat b < a………………….(3)

Dari persamaan (2) dan (3) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

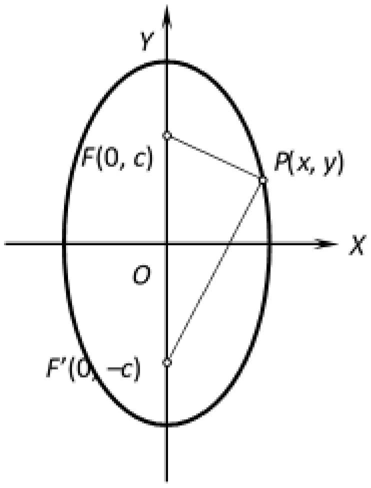
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ....(4)}$$

dimana b < a

Persamaan (4) di atas disebut ***persamaan ellips bentuk baku.***

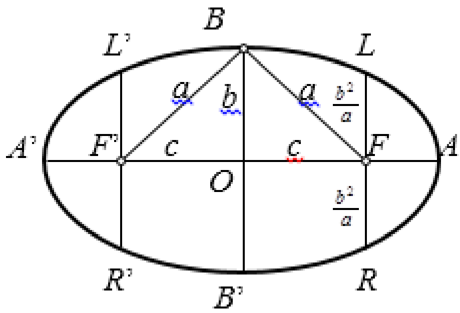
Jika fokus ellips adalah titik-titik (0, *c*) dan (0, –*c*) yang berada di sumbu-*y* (gambar di bawah) maka persamaan ellips bentuk baku adalah

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad \text{, diamana a > b……………………….. (5)}$$



Dalam hal ini bilangan yang lebih besar adalah berada di bawah suku y^2.

Karakteristik utama suatu ellips persamaan (4) ditunjukkan pada gambar di bawah.



Perhatikan Gambar Ellips diatas :

a. Ellips simetris dengan sumbu-x dan sumbu-y.
b. Ellips memotong sumbu-x di titik (a, 0) dan (–a, 0), dan memotong sumbu-y di titik (0, b) dan (0, –b).
c. Garis yang melalui kedua fokus dinamakan **sumbu utama** ellips.
d. Karakteristik ellips dengan persamaan berbentuk (4):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{, dimana a > b}$$

1) sumbu-x menjadi sumbu utama ellips.
2) Titik potong ellips dengan sumbu utamanya disebut **puncak**. Jadi untuk ellips dalam persamaan (4) puncaknya adalah A(a, 0) dan A'(–a, 0).
3) Titik pada sumbu utama yang terletak di tengah-tengah kedua puncak ellips dinamakan **pusat** ellips. Pusat ellips dengan bentuk persamaan (4) adalah berimpit dengan titik asal.
4) Segmen garis yang menghubungkan kedua puncak disebut **sumbu mayor (sumbu panjang)** ellips dengan panjang 2a satuan, dan kita katakan bahwa a adalah satuan panjang setengah panjang sumbu mayor.
5) Pada ellips ini segmen garis yang menghubungkan titik potong ellips dengan sumbu-y yaitu titik (0, b) dan (0, –b) disebut **sumbu minor (sumbu pendek)** ellips. Panjang sumbu minor adalah 2b satuan, sehingga b adalah satuan panjang setengan sumbu minor.
6) Titik-titik tetap F dan F' terletak pada sumbu mayor dan disebut **fokus**, sebagaimana telah disebutkan pada definisi, adalah berjarak c dari pusat ellips.

e. Karakteristik dari ellips dengan persamaan (5) secara essensial adalah sama. Pada kenyataannya ellips dengan bentuk persamaan (4) dan (5) adalah identik dalam bentuk dan ukuran, hanya berbeda dalam posisi.

Contoh 1:

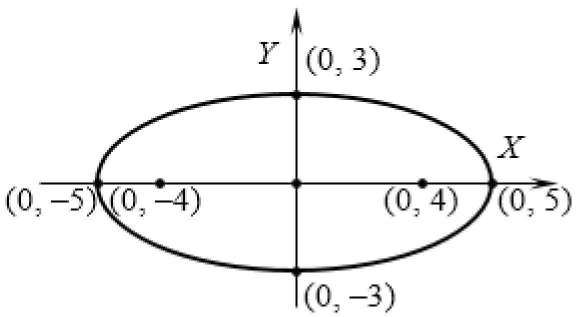
Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $9x^2 + 25y^2 = 225$

Jawab:

Pertama nyatakan persamaan yang diberikan ke dalam bentuk baku dengan membagi masing-masing ruas dengan 225 dan diperoleh bentuk baku:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dalam hal ini $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, dan $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, atau a = 5, b = 3, c = 4. Jadi persamaan di atas adalah ellips yang berpusat di (0, 0), puncak (± 5, 0) dan titik fokus (± 4, 0). Sumbu mayor sejajar dengan sumbu-x dan panjangnya 10 satuan, dan sumbu minor panjangnya 6 satuan. Sketsa grafik dapat dilihat di gambar di bawah.



Contoh 2:

Tentukan persamaan ellips dengan pusat (0, 0), salah satu puncak (0, –13), dan salah satu titik fokus (0, 12).

Jawab:

Puncak (0, –13) berarti sumbu mayor sejajar dengan sumbu-y dengan a = 13, panjang sumbu mayor = 26 dan karena fokus di (0, 12) berarti c = 12.
panjang sumbu minor dapat dicari dengan rumus

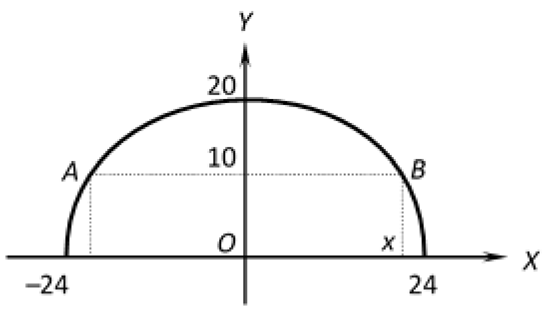
$$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

Jadi b = 5.
Bentuk baku dari persamaan ellips yang dicari adalah

$$\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Contoh 3:
Suatu kelengkungan berbentuk setengah ellips dengan lebar alas 48 meter dan tinggi 20 meter. Berapa lebar kelengkungan itu pada ketinggian 10 meter dari alas ?

Jawab:



Gambar di atas memperlihatkan sketsa lengkungan dan sumbu-sumbu koordinat dapat dipilih sedemikian hingga sumbu-x terletak pada alas dan titik asal adalah titik tengah alas. Maka sumbu utama ellips terletak sepanjang sumbu-x, pusatnya di titik asal, a = ½48 = 24, b = 20. Persamaan ellips berbentuk $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$

Pada ketinggian 10 meter, berarti untuk nilai y = 10 akan diperoleh x yang menyatakan lebar setengah lengkungan pada ketinggian 10 meter. Jadi

$$\frac{x^2}{576} + \frac{10^2}{400} = 1$$

sehingga diperoleh:
$x^2 = 432$, $x = 12\sqrt{3}$

Dengan demikian pada ketinggian 10 meter dari alas, lebar kelengkungan adalah AB = $24\sqrt{3}$ meter.

3. Persamaan Umum Ellips

a. Bentuk umum persamaan Ellips adalah :

$Ax^{2} + By^{2} + C = 0$

Kita akan menyelidiki persamaan $Ax^{2} + By^{2} + C = 0$ dengan A dan B bertanda sama dan tidak nol.

1). Jika C $\neq$ 0 dan berlainan tanda dengan A dan B

$Ax^2 + By^2 + C = 0 \Leftrightarrow Ax^2 + By^2 = -C \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \dfrac{x^2}{\frac{-C}{B}} = 1$

Karena C berlainan tanda dengan A dan B, maka A dan B positif dan kita misalkan $\dfrac{-C}{A} = a^2$ dan $\dfrac{-C}{B} = b^2$ dengan a dan b positif. Kita peroleh: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Ini adalah persamaan sederhana elips yang berpusat di O (0, 0) dan memiliki fokus pada salah satu sumbu koordinat. tergantung pada nila a dan b. Jika a > b maka fokus pada sumbu x. sumbu x adalah sumbu panjang dan jika a < b maka fokus pada sumbu y (sumbu y adalah sumbu panjang). Selanjutnya

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$

x real untuk $|y| \leq b$

da n $\quad y = \pm \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$

y real untuk $|x| \leq b$

Elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ dapat dibuat grafiknya dan disebut elips real.

2). *Jika A = B dan C $\neq$ 0 berlainan tanda dengan A dan B*

Ax^2 + By ^{2} + C = 0. menjadi Ax^2 + Ay ^{2} = -C

$$\frac{x^2}{\frac{-C}{A}}+\frac{x^2}{\frac{-C}{A}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$\Leftrightarrow$ x^2 + y^2 = a^2

Bentuk ini adalah, persamaan stardar lingkaran dengan pusat O (o, o) dan jari-jari r = a.

3). *Jika C = 0*

Persamaan Ax^2 + By^2 + C = 0 menjadi Ax^2 + By^2 = 0. Grafiknya hanya terdiri dari satu titik real yaitu O (0, 0). Persamaan ini disebut elips titik atau lingkaran titik (dengan r = 0). Kadang-kadang disebut juga elips tidak benar atau lingkaran tidak benar.

4). *Jika A, B dan C bertanda sama*

Persamaan Ax^2 + By^2 + C = 0 $\Leftrightarrow$ $\frac{x^2}{\frac{-C}{A}}+\frac{x^2}{\frac{-C}{B}}=1$

$$\frac{x^2}{\frac{-C}{A}}+\frac{x^2}{\frac{-C}{B}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\Leftrightarrow$ x = $\pm\frac{a}{b}\sqrt{-b^2-y^2}$ (x imajiner)

$\Leftrightarrow$ x = $\pm\frac{b}{a}\sqrt{-a^2-x^2}$ (y imajiner)

Ternyata tidak ada pasangan (x, y) yang real yang memenuhi persamaan elips di atas maka persamaan ini disebut persamaan elips imajiner (el ips khayal) atau jika A = B disebut lingkaran khayal dengan pusat nyata (titik pangkal 0).

4. Garis Singgung Terhadap Elips

Kedudukan sebuah garis terhadap elips dapat diselidiki sebagai berikut:

Misalkan garis itu adalah g: y = sx + k dan elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ = 1 Absis titik potong antara g dan elips diperoleh dari:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(sx+k)^2}{b^2}=1$ $\Leftrightarrow (a^2s^2 + b^2)\ x^2 + 2a^2skx + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$

dengan diskriminan D = $4a^2b^2\ (a^2s^2 + b^2 - k^2)$

Jika D < 0, maka g tidak memotong elips

jika D > 0, maka g memotong elips pada dua titik yang nyata dan berlainan

Jika D = 0, maka g menyinggung elips

Jadi, syarat agar g menyinggung elips ialah

D = $4a^2b^2\ (a^2s^2 + b^2 - k^2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2s^2 + b^2 - k^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ k = $\pm\sqrt{a^2s^2+b^2}$

Substitusi k = $\pm\sqrt{a^2s^2+b^2}$ ke persamaan garis g : y = sx + k, maka kita peroleh persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap elips

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ yakni: y = sx $\pm\sqrt{a^2s^2+b^2}$

Jika titik (x_1, y_1) pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, maka persamaan garis singgung di titik

(x_1, y_1) pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ adalah:

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1}$$

.

Contoh 1

Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap elips

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

Jawab :

Langsung saja kita gunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Dalam hal ini s = ½, a^2 = 4 dan b^2 = 3, maka persamaan garis singgung yang dicari adalah: y = ½ x ± $\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+3}$ ⇔ y = ½ x ± 2

Jadi ada dua garis singgung, yakni
y = ½ x + 2, dan y = ½ x - 2

Contoh 2

Garis y = $x\sqrt{6}$ memotong elips $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ pada dua titik. Carilah persamaan garis singgung di titik-titik potong ini pada elips.

Jawab :

Koordinat titik potong garis dengan elips dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \\ y = x\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} &x^2 + 4(x\sqrt{6})^2 - 16 = 0 \\ &x^2 + 24x^2 = 16 \\ &x^2 = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

⇔ x = $\frac{4}{5}$ dan y = $\frac{4}{5}$ √6

atau x = -$\frac{4}{5}$ dan y = -$\frac{4}{5}$ √6

Jadi titik potong antara garis = dengan elips adaaah di titik ($\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$√6) dan di titik
(-$\frac{4}{5}$, -$\frac{4}{5}$√6). Persamaan garis singgung di titik ($\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$√6) pada elips $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ atau $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ adalah $\frac{\frac{4}{5}x}{16}+\frac{\frac{4}{5}\sqrt{6}y}{4}=1$ ⇔ x + 4√6 y = 20, dan persamaan garis singgung di titik (-$\frac{4}{5}$ = $\frac{4}{5}$ √6) adalah x + 4 √6 y = -20

Contoh 3

Dari titik P (5, 4) ditarik garis-garis singgung terhadap elips $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.
Carilah persamaan garis-garis singgung tersebut.

Jawab :

Misalkan garis singgung yang dicari adalah g : y = sx + k. Karena g garis singgung maka g: y = sx ± $\sqrt{4s^2+16}$

g melalui titik P(5, 4), maka 4 = 5s ± $\sqrt{4s^2+16}$

⇔ 4 - 5s = ± $\sqrt{4s^2+16}$

⇔ 16 - 40 s + 25s^2 = 4s^2 + 16

⇔ 21s^2 - 40s = 0

s(21s - 40) = 0

s_1 = 0, dan s_2 = $\frac{40}{21}$

Untuk s_l = 0, maka g: y = 4

(y = -A tidak diambi karena tidak memenuhi/ tidak melalui P)

Untuk s_2 = $\frac{40}{21}$, maka g: $\frac{40}{21}$ - $\frac{116}{21}$

(Tanda ⊕ tidak diambil karena tidak memenuhi/ tidak melalui P)

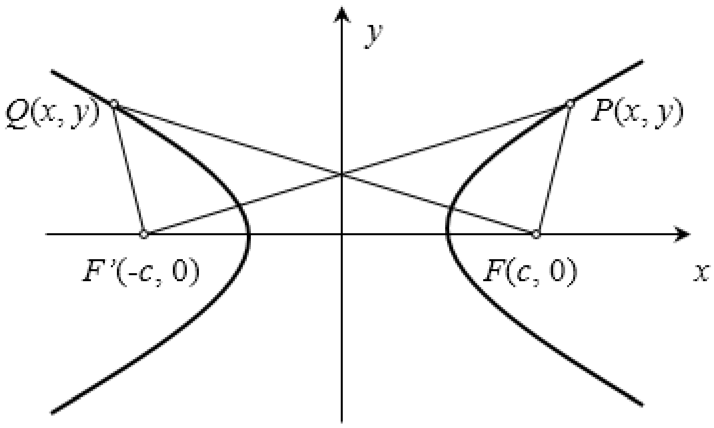
D. HIPERBOLA

1. Pengertian Hiperbola

Hiperbola adalah himpunan semua titik (x, y) pada bidang sedemikian hingga selisih positif jarak titik (x, y) terhadap pasangan dua titik tertentu yang disebut titik *fokus* (*foci*) adalah tetap.

Untuk menentukan persamaan hiperbola, misalkan kita pilih titik-titik fokus F dan F' terletak pada sumbu-x. Sedangkan sumbu-y diletakkan di tengah-tengah segmen garis FF'.

Misalkan kita tentukan titik fokusnya adalah $F'(-c, 0)$ dan $F(c, 0)$ sedangkan selisih jarak konstan tertentu adalah 2a. (lihat gambar di bawah ini).



Gambar 1

Jika (x, y) merepresentasikan titik pada hiperbola, maka dari definisi diperoleh

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$-4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$-a + \tfrac{cx}{a} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -a + \tfrac{cx}{a}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} \quad x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Pada saat titik P(x,y) berada pada sumbu x, maka :

Dalam segitiga *PFF*' terlihat bahwa

$$\overline{PF'} < \overline{PF} + \overline{FF'}$$

$$\overline{PF'} - \overline{PF} < \overline{FF'}$$

$$2a < 2c$$

$$a < c$$

$$c^2 - a^2 > 0$$

Karena $c^2 - a^2$ adalah positif, maka bisa diganti dengan bilangan positif lain, sebut b^2 sehingga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dimana $b^2 = c^2 - a^2$. Ini merupakan bentuk baku persamaan hiperbola.

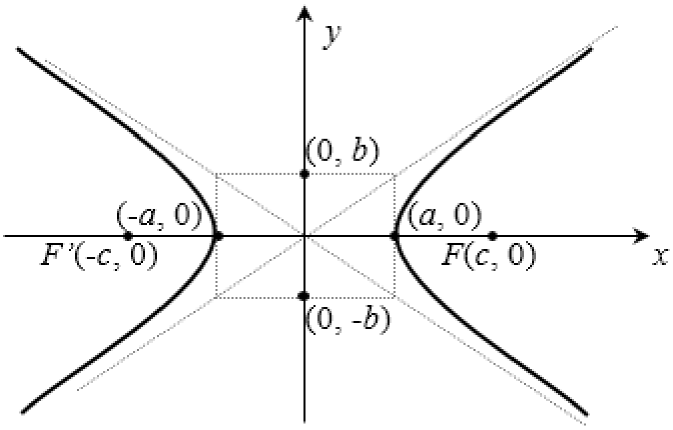
Kedua sumbu koordinat sumbu-x dan sumbu-y adalah sumbu simetri pada hiperbola dan $(\pm a, 0)$ adalah titik-titik potong dengan sumbu-x. Dalam hal ini tidak memotong sumbu-y, sebab untuk $x = 0$ diperoleh

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

yang mana tidak ada bilangan real y yang memenuhi persamaan di atas.

Sumbu-x (yang memuat dua titik dari hiperbola) disebut *sumbu tranversal* (*transverse axis*) dan sumbu-y disebut *sumbu sekawan* (*conjugate axes*). Titik potong hiperbola dengan sumbu trasversal disebut *titik ujung* (dalam hal ini $(\pm a, 0)$) dan perpotongan kedua sumbu simetri disebut *pusat* hiperbola. Jarak antara kedua titik ujung adalah $2a$ dan disebut *sumbu mayor* dan besaran $2b$ disebut *sumbu minor*. Dalam hal ini panjang sumbu mayor **tidak harus lebih besar** dari sumbu minor. Hal ini berbeda pada persamaan ellips.

Sketsa grafik persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$ dan posisi titik-titik $(\pm a, 0)$, $(\pm c, 0)$, dan $(0, \pm b)$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2

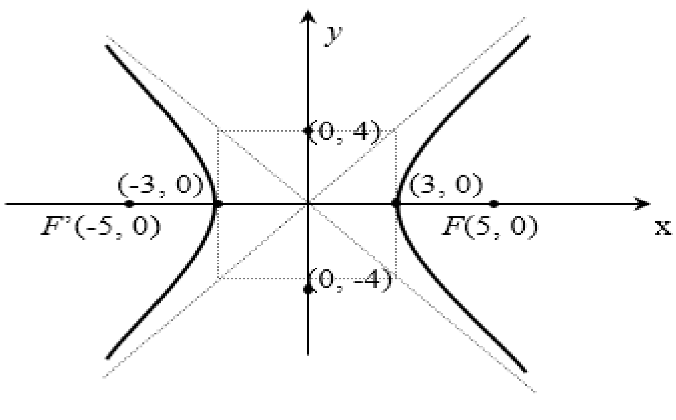
Garis $ax \pm by = 0$ disebut persamaan garis asimtot dari hiperbola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Contoh 1:

Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Jawab:

Jika kita perhatikan terlihat bahwa $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, dan $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Hiperbola ini mempunyai pusat (0, 0), titik-titik ujung (± 3, 0), dan titik fokus (± 5, 0). Persamaan garis asimtotik hiperbola di atas adalah $3x \pm 4y = 0$. Panjang sumbu mayor = 6 sejajar sumbu-x dan panjang sumbu minor = 8. Sketsa grafik dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 3

Contoh 2:

Selidiki dan buat sketsa grafik persamaan $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

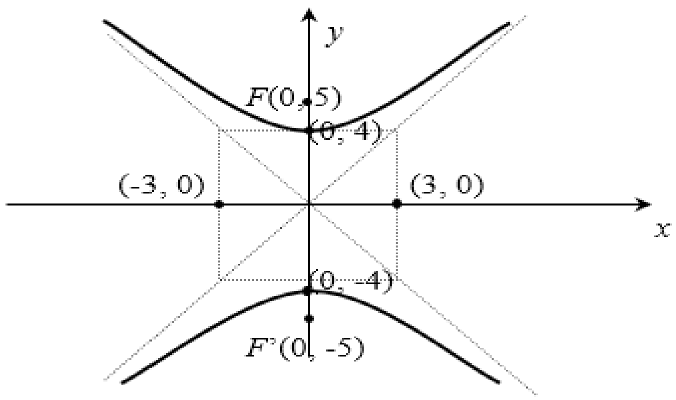
Jawab:

Kita ubah persamaan $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ ke dalam bentuk baku, yaitu

$$16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$$

$$9y^2 - 16x^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Dari persamaan terakhir terlihat bahwa $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, dan $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Hiperbola ini mempunyai pusat (0, 0), titik-titik ujung (0, 4), dan titik fokus (0, 5). Persamaan garis asimtotik hiperbola di atas adalah $4x\ 3y = 0$. Panjang sumbu mayor = 8 sejajar sumbu-x dan panjang sumbu minor = 6. Sketsa grafik dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 4

Contoh 3:

Tentukan persamaan hiperbola yang fokus ($\pm$4, 0) dan titik-titik ujung

($\pm$2, 0).

Jawab:

Karena fokus yang diberikan terletak pada sumbu-x maka bentuk baku dari persamaan hiperbola yang dicari seperti pada teorema 1.

Dari titik fokus yang diberikan maka diperoleh c = 4, titik ujung diperoleh a = 2 dan $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$.
Jadi persamaan yang dicari adalah

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

Untuk memperoleh persamaan hiperbola yang lebih umum, misalkan diadakan translasi pusat sumbu koordinat ke titik (h, k), maka diperoleh persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ menjadi

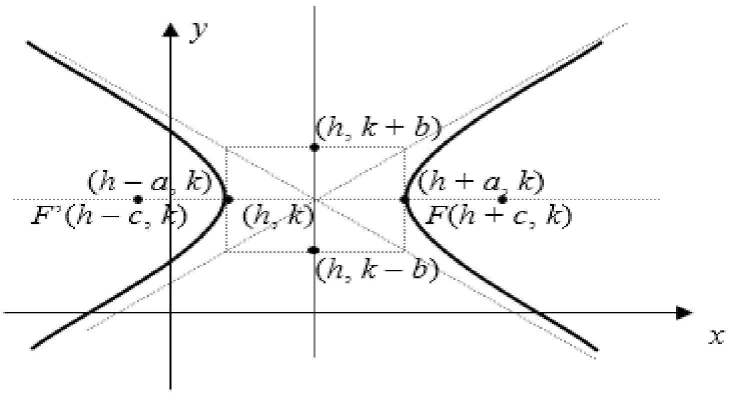
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Untuk $c^2 = a^2 + b^2$, persamaan di atas adalah persamaan hiperbola dengan pusat di (h, k), titik-titik fokus $(h \pm c, k)$ dan titik-titik ujung $(h \pm a, k)$
Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1:
Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai pusat (h, k), fokus $(h \pm c, k)$ dan titik-titik ujung $(h \pm a, k)$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

dengan $b^2 = c^2 - a^2$ (lihat gambar di bawah ini).



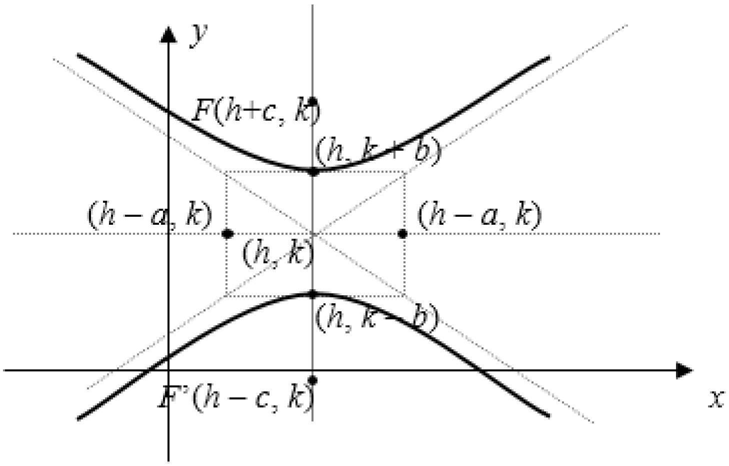
Gambar 5

Teorema 2:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai pusat (h, k), fokus (h, k $\pm$ c) dan titik-titik ujung (h, k $\pm$ a) jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

dengan $b^2 = c^2 - a^2$ (lihat gambar di bawah ini).



Gambar 6

Contoh 4:

Sebuah hiperbola mempunyai persamaan

$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y + 68 = 0$

Tentukan pusat, titik ujung, titik fokus dan gambar grafik hiperbola tersebut.

Jawab:

Kita ubah bentuk persamaan di atas ke dalam bentuk baku seperti pada teorema 3 atau teorema 4.

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y + 68 = 0$$
$$9x^2 - 36x - 4y^2 - 8y = -68$$
$$9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) = -68 + 36 - 4$$
$$9(x - 2)^2 - 4(y + 1)^2 = -36$$

$$4(y + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = 36$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

Dari persamaan terakhir diperoleh informasi h = 2, k = –1, a^2 = 9, dan b^2 = 4. Dengan demikian $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$.

Menurut teorema 4 dapatlah disimpulkan bahwa hiperbola yang terjadi berpusat di (2, –1), titik-titik ujungnya (2, –1 + 3) = (2, 2) dan (2, –1 – 3) = (2, –4), titik fokusnya adalah $(2, -1 + \sqrt{13})$ dan $(2, -1 - \sqrt{13})$.

Contoh 3

Carilah persamaan sederhana hiperbola yang-salah satu puncaknya (0, 2√6) dan direktriksnya y = -4. Kemudian tentukan sifat-sifatnya dan sketsa grafiknya.

Jawab:

Puncak pada sumbu y yaitu v_1 (0, 2√6) = v_1 (0, b) maka b = 2√6. Direktriks y = -4 berarti direktriks yang satu lagi adalah d_1 : y = 4 (sumbu y sebagai sumbu nyata). Dari direktriks y = $\frac{b}{e}$ = 4 dan b = 2 √6 maka eksentrisitas e = ½√6.

Fokus F_1 (0, c) = F_1 (0, be), maka F_1 (0, 6).

Jadi hiperbola yang harus kita cari persamaarmya memiliki salah satu fokus F_1 (0, 6) direktriks d_1 : y = 4 dan eksentrisitas e = ½√6. Misalkan titik P(x, 4) pada hiperbola. Maka

$$\frac{|P_2F_1|}{jarak(P.d_2)} = e \Leftrightarrow |PF_1| = e \text{ kali jarak } (p, d_1)$$

$$\sqrt{(0-x)^2+(6-y)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,|\,y-4\,|$$

$$x^2+36-12y+y^2 = \frac{3}{2}y^2-12y+24$$

$$x^2-\frac{1}{2}y^2=-12$$

$$\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$$

Jadi persamaan sederhana hiperbola yang dicari adalah

$$\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$$

Kalau langsung kita gunakan rumus atau bentuk persamaan sederhana hiperbola dengan sumbu y sebagai sumbu nyata. yakni:

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$ dan dalam hal ini b = 2 √6,

c = be = (2√6)(½√6) = 6

dan a = $\sqrt{c^2-b^2}$ = 2√3

maka persamaan hiperbola tersebut adalah

$$\frac{y^2}{(2\sqrt{6})^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$$

Sifat-sifat parabola $\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$ adalah:

1). Pusat o (0, 0)
2). Fokus F1 (0, c) = F1 (0, 6) dan F2 (0, -c) = F2 (0 -6)
3). Eksentrisitas e = $\frac{c}{b}$ = $\frac{6}{2\sqrt{6}}$ = ½√6
4) Direktriks d_1 : y = $\frac{b}{e}$ = 4 dan d_2 : y = - $\frac{6}{e}$ = -4
5) Sumbu x sebagai sumbu imaginer dengan ukuran 2a = 4 √3 dan sumbu y sebagai sumbu nyata dengan ukuran 2b = 4 $\sqrt{6}$.
6). Puncak v_1 (0, b) = v_1 (0, 2√6) dan v_2 (0, -b) = v_2 (0,-2√6)
7). Latus rectum y = 6 dan y = -6 dengan titik-titik ujung (√6, 6), (√6, -6), (-√6, 6) dan (-√6, -6)

Rangkuman

1) Hiperbola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik. sehingga perbandingan j arak dari titik ini ke titik tertentu (fokus) dengan jarak ke garis tertentu (direktriks) adalah tetap sama dengan e dan e > 1 (e = eksentrisitas). Atau hiperbola dapat pula didef inisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu (fokus-fokusnya) adalah tetap sama dengan ukuran sumbu nyata.

2) Hiperbola dengan persamaan sederhananya $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$ = 1, memiliki sifat

   (a) Pusat o (0, 0)
   (b) Fokus F_1 (c, 0) dan F_2(-c, 0)
   (c) Terdapat hubungan $c^2 = a^2 + b^2$
   (d) Eksentrisitas $\frac{c}{a}$ dengan c > a Jelas c = ae
   (e) Direktriks d_1 : x = $\frac{a}{e}$ dan d_2 : x = -$\frac{a}{e}$
   (f) Sumbu x sebagai sumbu nyata dengan ukuran 2a dan sumbu y sebagai sumbu imagines dengan ukuran 2b.
   (g) Puncak v_1 (a, 0) dan v_2 (-a, 0)
   (h) Latus rectum x = c dan x = -c
   (i) Asimtot bx + ay = 0 dan bx - ay = 0

SOAL LATIHAN

1) Titik F dan garis d tertentu. Sedangkan titik P bergerak pada bidang dengan syarat:

$$\frac{|PF|}{jarak(P,d)} = k$$

   Lintasan atau tempat kedudukan titik P akan berupa sebuah hiperbola, jika k sama dengan …..

2) Jika ukuran sumbu nyata 2p, ukuran sumbu imagine -q dan jarak kedua fokus hiperbola 4r, maka antara p, q dan r terdapat hubungan . . . . . .
3) Hiperbola dengan fokus (4, 0) dan ukuran sumbu nyata 6 memiliki persamaan . . . . .
4) Hiperbola dengan eksentrisitas e = $\frac{3}{2}$ dan salah satu fokusnya (0, 4) memiliki persamaan . . . . .
5) Salah satu asimtot hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ memiliki persamaan . . . . . .
6) Jika sebuah hiperbola memiliki puncak (0. 5) dan ukuran sumbu khayal 2 √11 maka direktriks dari hiperbola ini-memiliki persamaan . . . . .

7) Persamaan latus rectum $\frac{y^2}{4}$ - $\frac{x^2}{1}$ = 1 adalah . . . . .

8) Selisih panjang jari-jari fokus dari titik (2, 1) pada hiperbola $\frac{x^2}{5}$ - $\frac{y^2}{4}$ = 1 adalah . . . . .

9) Salah satu asimtot adalah y = $\frac{4}{3}$ x dan salah satu puncaknya (0, 5), maka persamaan sederhana hiperbola ini adalah . . . . .

2. Hiperbola Sekawan dan Hiperbola Sama sisi

Tinjau persamaan $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$ = -1. Persamaan ini dapat ditulis $\frac{x^2}{b^2}$ - $\frac{y^2}{a^2}$ = 1. Sebagaimana telah kita ketahui bahwa ini juga adalah persamaan hiperbola dengan sumbu y sebagai sumbu nyata sumbu x sebagai sumbu imaginer dan asimtotnya y = ± $\frac{b}{a}$ x serta sifat-sifat lainnya yang dimiliki oleh hiperbola ini. Silahkan Anda perinci!

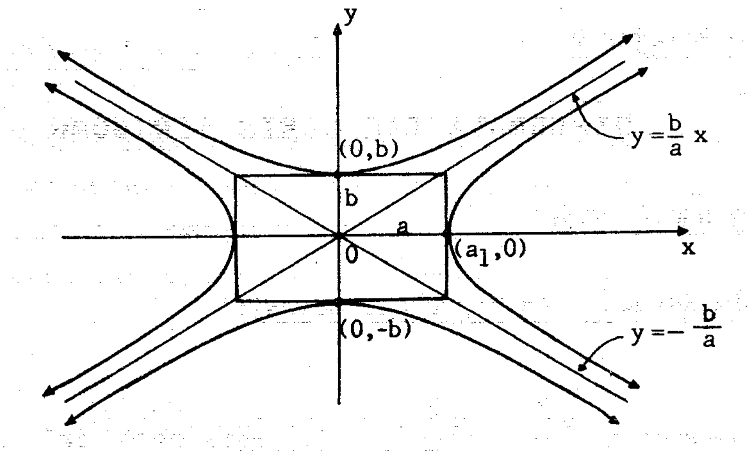
Hiperbola ini didapat dengan jalan saling menukar $\frac{x}{a}$ dan $\frac{y}{b}$ dari hiperbola: $\frac{x^2}{b^2}$ - $\frac{y^2}{a^2}$ = 1. Hiperbola $\frac{x^2}{b^2}$ - $\frac{y^2}{a^2}$ = 1 dan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$ = 1 dinamakan ***dua hiperbola sekawan.***

Asimtot kedua hiperbola sekawan adalah sama yaitu y = ± $\frac{b}{a}$ x. Oleh karena keempat puncak dari kedua hiperbola ini adalah (±a, 0) dan (0, ± b) maka keempat garis singgung di puncak-puncak ini membentuk suatu persegi panjang yang sisinya sejajar dengan kedua sumbu koordinat, sedangkan titik-titik sudutnya terletak pada kedua asimtot. Lihat gambar 2.1

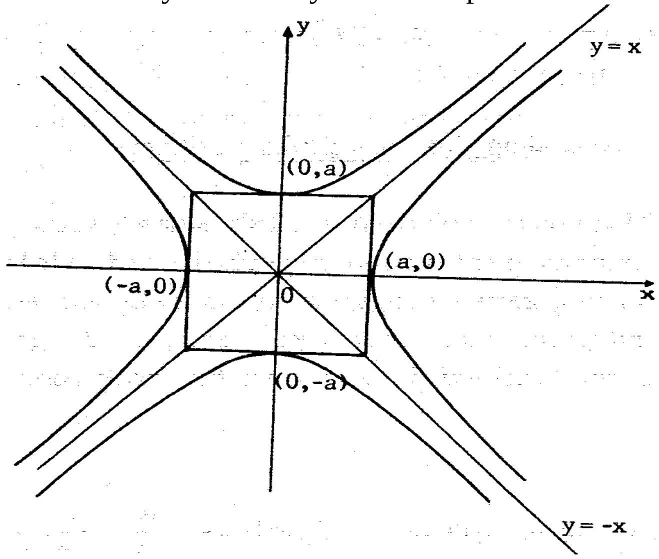
Sekarang kita tinj au persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$ = 1.

Bila a = b maka persamaan hiperbola menjadi $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$ = 1 ⇔ x^2 - y^2 = a^2.

Hiperbola ini disebut ***hiperbola samasisi***. Ukuran sumbu nyata sama dengan ukuran sumbu imaginer yaitu sama dengan 2a.



Asimtot dari hiperbola samasisi ini adalah z - y = 0 dan z + y = 0. Kedua asimtot ini saling berpotongan tegak lurus (kenapa?). Hiperbola yang mempunyai asimtot saling tegak lurus disebut ***hiperbola ortogonal.***
Jadi hiperbola samasisi adalah jadi hiperbola ortogonal. Grafik hiperbola sekawan samasisi $x^2 - y^2 = a^2$ dan $y^2 - x^2 = a$ diperlihatkan dalam gambar 2.2.



Gambar 2.2

Contoh:
Manakah dari pasangan hiperbola berikut yang sekawan dan manakah dari yang sekawan itu juga samasisi.

1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1,\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

2) $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1,\ \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{8} = 1$

3) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1,\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = -1$

4) $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}=1$, $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=-1$

Jawab :

1) Tidak sekawan
2) Sekawan
3) Sekawan
4) Sekawan dan samasisi

3. Pembicaraan Persamaan Ax^2 + By^2 + C = 0

Diasumsikan, bahwa kita mempunyai persamaan Ax^2 + By2 + c = 0 dengan A dan B berlawanan tanda dan tidak nol dan C ≠ 0.

Maka Ax^2 + By^2 + C = 0 ⇔ $\frac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-C}{B}} = 1$

Karena A dan B berlawanan tanda maka = $\frac{-C}{A}$ dan $\frac{-C}{B}$ berlawanan tanda. Jika $\frac{-C}{A}$ positif, maka $\frac{-C}{B}$ negatif. Sehingga persamaannya berbentuk $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Sebaliknya, jika $\frac{-C}{A}$ negatif maka $\frac{-C}{B}$ positif. Sehingga persamaan berbentuk $\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Dalam hal ini kita misalkan $\left|\frac{-C}{A}\right|$ = a^2 dan $\left|\frac{-C}{B}\right|$ = b^2 dengan a dan b tidak nol.

Kedua persamaan di atas adalah persamaan sederhana hiperbola yang kedua fokusnya terletak pada salah satu sumbu koordinat. pusat berimpit dengan titik pangkal dan sumbu x dan sumbu y sebagai sumbu sumbu funya.

Jika A = -B. maka Ax^2 + By^2 + C = 0 adalah hiperbola samasisi (kenapa?). Sebagai contoh 4x^2 - 4y^2 - 9 = 0 dan 8x^2 - 8y^2 + 42 = 0 adalah hiperbola-hiperbola samasisi.

Sekarang kita asumsikan bahwa C = 0, maka persamaan Ax^2 + By^2 + C = 0 menjadi Ax^2 + By^2 = 0 ⇔ x^2 + $\frac{B}{A}$ y^2 = 0. Karena A dan B berlawanan tanda, maka $\frac{B}{A}$ negatif dan -$\frac{B}{A}$ positif. Sehingga

x^2 + $\frac{B}{A}$ y^2 = 0⇔ x^2 -(-$\frac{B}{A}$) y^2 = 0

$\Leftrightarrow$ (x + y $\sqrt{\frac{-B}{A}}$)(x - y $\sqrt{\frac{-B}{A}}$) = 0

$\Leftrightarrow$ (x + y $\sqrt{\frac{-B}{A}}$) = 0, atau (x - y $\sqrt{\frac{-B}{A}}$) = 0

Bentuk persamaan yang terakhir merupakan persamaan dua garis lurus. Jadi untuk C = 0 persamaan hiperbola berubah menjadi dua garis yang berpotongan dan hiperbola ini disebut ***hiperbola tidak benar.***

Contoh

Bicarakanlah persamaan $9x - y^2 - 81 = 0$

Jawab :

Maksud "bicarakanlah" di sini ialah menentukan sifat-sifatnya dan membuat sketsa grafiknya. Untuk persamaan $9x^2 - y^2 - 81 = 0$, berarti A = 9, B = -1 dan C = -81. Kita ubah kedalam bentuk persamaan sederhana, yaitu:

$9x^2 - y^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = 1$

Berarti $a^2 = |9| = 9$, $b^2 = |-81| = 81$ dan $c^2 = a^2 + b^2 = 90$. maka a = 3, b = 9 dan c = $3\sqrt{10}$. Jadi e = $\frac{c}{a}$ = $\sqrt{10}$ dan sifat-sifat hiperbola tersebut adalah:

Pusat o (0, 0), fokus $F_1(3\sqrt{10}, 0)$ dan $F_2(-3\sqrt{10}, 0)$, direktriks d : x = $\frac{3}{\sqrt{10}}$ dan d : x = -$\frac{3}{\sqrt{10}}$, sumbu x sebagai sumbu nyata dan sumbu y sebagai sumbu imaginer, puncak (3, 0) dan (-3, 0) asimtot 3x - y = 0 dan 3x + y = 0 dan latus rectum serta ujung-ujungnya?

4. Persamaan Parameter Hiperbola

Tinjau persamaan parameter suatu kurva berbentuk x = a sec θ dan y = b tg θ.

x = a sec θ$\leftrightarrow \frac{x}{a} = \sec\theta \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \sec^2\theta$

y = b tg θ.$\leftrightarrow \frac{y}{b} = tg\ \theta \leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = tg^2\theta$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2\theta - tg^2\theta = 1$$

Persamaan terakhir di atas adalah persamaan hiperbola dengan sumbu x sebagai sumbu utama (sumbu nyata) dan sumbu y sebagai sumbu tambahan (sumbu imaginer).
Karena titik-titik dari hiperbola dapat dinyatakan oleh persamaan

$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \operatorname{tg} \theta \end{cases}$$

maka persamaan ini disebut ***persamaan parameter hiperbola .***
(Catatan: θ bisa dalam radian maupun dalam derajat).

5. Garis Singgung Terhadap Hiperbola

Seperti pada elips, kedudukan garis g: y = sx + k terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat kita selidiki sebagai berikut:
Absis-titik potong antara g dan hiperbola diperoleh dari
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(sx+k)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$ $a^2s^2 - b^2) x^2 + 2a^2skx + a^2k^2 + a^2 + b^2 = 0$
dengan diskriminan $D = 4a^2b^2 (-a^2s^2 + b^2 + k^2)$
Agar akarnya kembar dengan arti lain agar garis menyinggung hiperbola, syaratnya ialah D = 0, maka diperoleh:
$k^2 = a^2s^2 - b^2 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{a^2s^2 - b^2}$.
Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah: $y = sx \pm \sqrt{a^2s^2 - b^2}$
Untuk mencari persamaan garis singgung di titik (x_1, y_l) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat digunakan cara seperti yang telah dipakai untuk garis singgung suatu elips atau parabola.
Hasilnya adalah sebagai berikut:
Persamaan garis singgung di titik (x_l, y_l) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah
$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

Contoh 1
Carilah persamaan garis singgung yang sejajar garis $x\sqrt{6} - y = 8$ terhadap hiperbola $4x^2 - y^2 = 8$
Jawab:

Hiperbola $4x^2 - y^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ (a = √2) dan b = √8)

Misalkan s adalah gradien garis singgung yang diminta. Karena garis ini harus sejajar terhadap garis x√6 - y = 8. maka s = √6.

Dengan menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, yakni y = sx ± $\sqrt{a^2s^2 - b^2}$ maka persamaan garis g singgung yang harus dicari adalah y = x√6 ± 2

Contoh 2

Garis y = x + 3 memotong hiperbola $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ pada dua titik. Tentukan persamaan garis singgung di titik-titik potong ini pada hiperbola

Jawab:

Titik potong antara garis dan hiperbola. dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Maka 5(x + 3)² 4x² = 20

$x^2 + 30x + 25 = 0$

x = -15 ± 10√2

Untuk x = -15 + 10√2, maka y = -12 + 10√2

Untuk x = -15 - 10√2. maka y = -12 - 10√2

Berarti titik potong, antara garis dan hiperbola adalah: (15 + 10√2, -12 + 10√2) dan (-15 - 10√2, -12 - 10√2)

Jadi persamaan garis singgung di titik-titik ini adalah:

$$\frac{(-12+10\sqrt{2})y}{4} - \frac{(-15+10\sqrt{2})y}{5} = 1, \text{ dan}$$

$$\frac{(-12-10\sqrt{2})y}{4} - \frac{(-15-10\sqrt{2})y}{5} = 1$$

Rangkuman

1) Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan hiperbola $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ adalah dua hiperbola sekawan, meniliki asimtot yang sama yakni

y = ± $\frac{b}{a}$ x

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow$ x^2 - y^2 = a^2 adalah persamaan hiperbola samasisi (a = b) dengan asimtot y = ± x yang berpotongan saling tegak lurus. Hiperbola ortogonal ialah hiperbola yang asimtot-asimtotnya berpotongan tegak lurus.

3) Persamaan Ax^2 + By^2 + C = 0 dengan A dan B berlawanan tanda mengatakan persamaan hiperbola dan

Jika c ≠ 0, maka hiperbola benar

Jika c = 0, maka hiperbola tak benar

Jika A = -B, maka hiperbola sama sisi

4) Persamaan parameter hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Adalah $\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \operatorname{tg} \theta, \text{ dengan } \theta \text{ parameter} \end{cases}$

5) Persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah y = sx ± $\sqrt{a^2 s^2 - b^2}$

6) Persamaan garis singgung di titik (x_l, y_l) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

SOAL LATIHAN

1) Carilah persamaan hiperbola sama sisi yang berpusat di o (0, 0) dan melalui titik (-4, 2)
2) Manakah dari pasangan berikut yang merupakan pasangan hiperbola sekawan.
   a. $4x^2 - y^2 + 64 = 0$, $x^2 - 4y^2 + 36 = 0$
   b. $2x^2 - y^2 - 36 = 0$, $2y^2 - x^2 - 36 = 0$
   c. $3x^2 - 2y^2 - 40 = 0$, $2y^2 - 3x^2 - 40 = 0$
   d. $4y^2 — 4y^2 + 3 = 0$, $4x^2 - 4y^2 - 3 = 0$
   e. $x^2 - 2y^2 + 8 = 0$, $4y - 2x = -8$
3) Bicarakan setiap persamaan kurva berikut dan sketsa grafiknya
   a. $4^2 - y^2 + 64 = 0$
   b. $x^2 - y - 25 = 0$
   c. $4x^2 - 3y^2 = 0$
4) Ubahlah persamaan hiperbola berikut
   a. $\{$ x = 3 sec θ

y = 2 tg θ menjadi persamaan sederhana

b. $3x^2 - 2y^2 + 3 = 0$ menjadi persamaan parameter

5) Carilah persamaan garis singgung terhadap hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$, jika

a. gradiennya 2

b. melalui titik (0. 1)

6) Hiperbola ortogonal yang berpusat O (0, 0) dan fokus (4, 0) memiliki persamaan . . . .

7) Persamaan $px^2 + Qy^2 + R = 0$ menyatakan hiperbola tak benar, Jika . . . .

8) Salah satu fokus dari hiperbola $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ adalah . . . .

9) Eksentrisitas hiperbola $16x - 9y^2 = 144$ adalah . . . .

10) Asimtot-asimtot hiperbola $x^2 - 9y^2 - 9 =$ memiliki persamaan . . . . . .

11) Persamaan parameter dari hiperbola $4x^2 – ¼ y^2 = 1$ adalah . . . . .

12) Jika persamaan parameter hiperbola

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ tg } \theta \\ y = \sec \theta \end{cases}$$

diubah ke dalam persamaan sederhana, menjadi . . . .

13) Kedudukan garis y = 2x terhadap hiperbola $x^2 - 3y^2 - 8 = 0$ adalah . . . .

14) Garis singgung terhadap hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{20} = T$ dan sejajar dengan garis 2x - y + 5 = 0 adalah . . . . .

15) Persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap hiperbola $\frac{y^2}{p^2} - \frac{x^2}{q^2} = 1$. Adalah . . . .

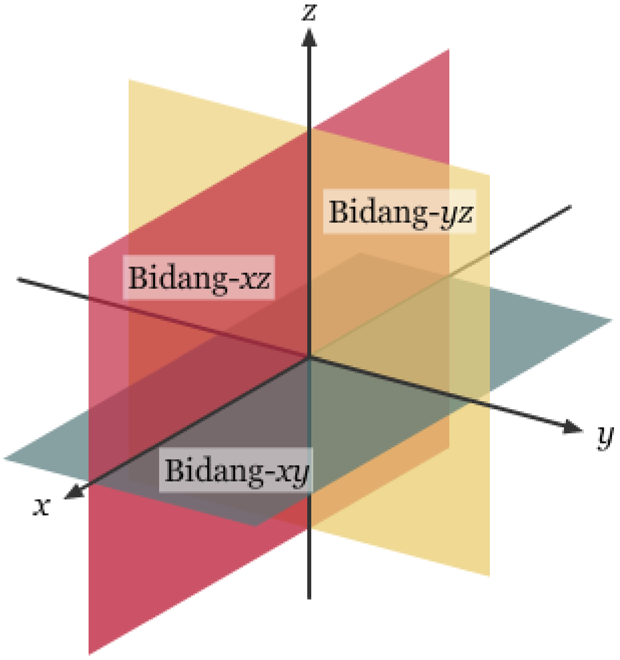
16) Persamaan garis singgung di titik (2, √2) pada hiperbola $x^2 - y^2 = 2$ adalah . . . . .

DEMENSI TIGA (R^3)

A. Sistem Koordinat Tegak Lurus Demensi Tiga (R^3)

Suatu sistem koordinat tegak lurus (sistem koordinat Cartesian) di dalam ruang ditentukan dengan memilih suatu satuan panjang serta tiga buah garis lurus yang masing-masing saling tegak lurus dan berpotongan di satu titik. Ketiga garis tersebut disebut dengan sumbu-sumbu koordinat, dan ditentukan pula oleh himpunan semua triple-triple terurut dari bilangan Real

Perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 1 Sistem koordinat tiga dimensi

Didalam ruang demensi tiga (R3) , ruang terbagi menjadi delapan bagian. Masing-masing bagian dsisebut Oktan dan akan dsiberi nomor menurut aturan sebagai berikut :

Oktan	Nilai X	Nilai Y	Nilai Z
I	x > 0 (x positip)	y>0 (y positip)	z>0 (z positip)
II	x < 0 (x negatip)	y>0 (y positip)	z>0 (z positip)
III	x < 0 (x negatip)	y<0(y negatip)	z>0 (z positip)
IV	x > 0 (x positip)	y<0(y negatip)	z>0 (z positip)
V	x > 0 (x positip)	y>0 (y positip)	z<0 (z negatip)
VI	x < 0 (x negatip)	y>0 (y positip)	z<0 (z negatip)
VII	x < 0 (x negatip)	y<0(y negatip)	z<0 (z negatip)
VIII	x > 0 (x positip)	y<0(y negatip)	z<0 (z negatip)

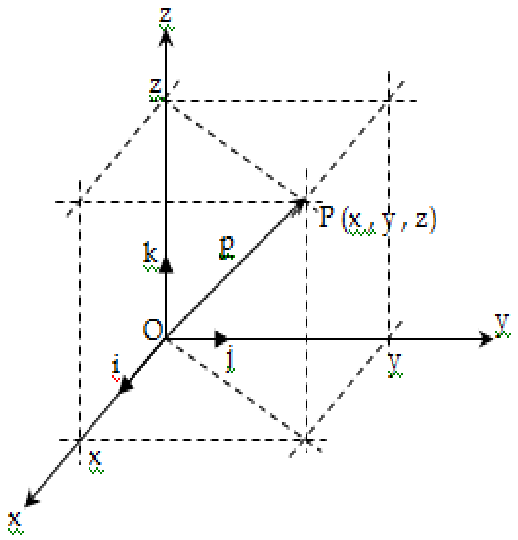
Dengan melihat tabel diatas, kita daopat melentukan letak titik dalam R3.

Contoh :

Titik A (-2, 5 , -7)
Nilai x = -2 (negatip)
Nilai y = 5 (posotip)
Nilai z = -7 (negatip)

Berarti titik A terletak pada Oktan VI

Letak titik dalam R^3



Titik P (x, y , z) berada di Oktan I.
Dalam bentuk vektor :

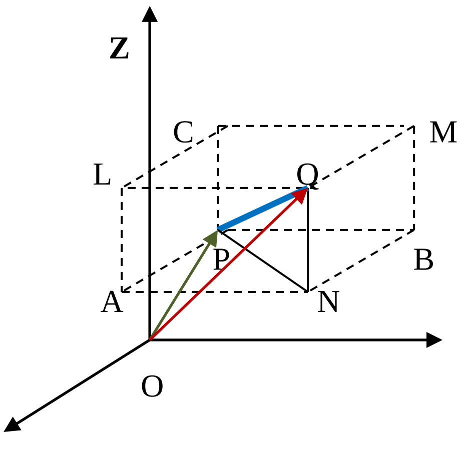
Vektor OP = $\vec{p}$ = xi + yj + zk
I,j,dan k merupakan vektor satuan

Vektor $\vec{p}$, juga dapat ditulis

dengan : $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

B. Jarak Dua Titik Dalam R^3

Kita hendak mentukan jarak titik P (x_1 , y_1,z_1) dan Q (x_2 , y_2, z_2)
Perhatika paralel-epipedum ANBP.LQMC



$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} , \vec{OQ} = \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Panjang Vektor PQ = Jarak titi P ke Q = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

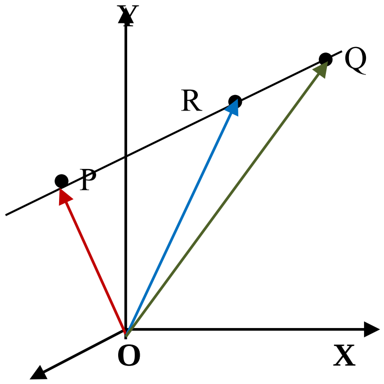
Contoh :

Tentukan jarak titik A (-3 , 6, -1) dan R (5 , -7, -3) ?

Jawab :

$$AR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-(-3))^2 + (-7-6)^2 + (-3-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{237}$$

C. Koordinat Titik yang Membagi Ruas Garis PQ atas Perbandingan m : n



$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \vec{OQ} = \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},\ \vec{OR} = r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR} \Leftrightarrow \vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = \vec{r} - \vec{p}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ} \Leftrightarrow \vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{q} - \vec{r} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

Jika diketahui : PR : RQ = m : n , maka :

$$\frac{\vec{PR}}{\vec{RQ}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow n\,\vec{PR} = m\,\vec{RQ}$$

$$n\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \mathrm{m}\begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n(x - x_1) \\ n(y - y_1) \\ n(z - z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(x_2 - x) \\ m(y_2 - y) \\ m(z_2 - z) \end{pmatrix}$$

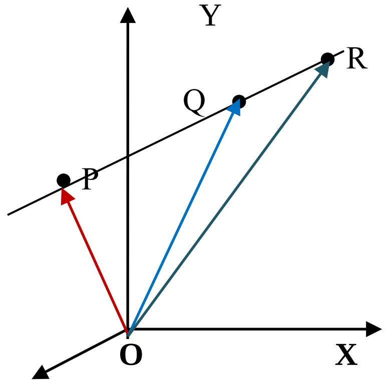
$$nx - nx_1 = mx_2 - mx \Leftrightarrow (n+m)x = mx_2 + nx_1 \Leftrightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$ny - ny_1 = my_2 - my \Leftrightarrow (n+m)y = my_2 + ny_1 \Leftrightarrow y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$nz - nz_1 = mz_2 - mz \Leftrightarrow (n+m)z = mz_2 + nz_1 \Leftrightarrow z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

Jadi koordinat titik R ($\frac{mx_2 + mx_1}{m+n}, \frac{my_2 + my_1}{m+n}, \frac{mz_2 + mz_1}{m+n}$ **)**

Bagaimana jika titik R berada diperpanajangan PQ ?



$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{OQ} = \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ \vec{OR} = r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR} \Leftrightarrow \vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = \vec{r} - \vec{p}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ} \Leftrightarrow \vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{q} - \vec{r} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

Jika diketahui : PR : RQ = m : n , maka :

$$\frac{\vec{PR}}{\vec{RQ}} = \frac{m}{-n} \Leftrightarrow -n\,\vec{PR} = m\,\vec{RQ}$$

$$-n \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n(x - x_1) \\ -n(y - y_1) \\ -n(z - z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(x_2 - x) \\ m(y_2 - y) \\ m(z_2 - z) \end{pmatrix}$$

$$-nx + nx_1 = mx_2 - mx \Leftrightarrow (-n + m)x = mx_2 - nx_1 \Leftrightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$$

$$-ny + ny_1 = my_2 - my \Leftrightarrow (-n + m)y = my_2 - ny_1 \Leftrightarrow y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}$$

$$-nz + nz_1 = mz_2 - mz \Leftrightarrow (-n + m)z = mz_2 - nz_1 \Leftrightarrow z = \frac{mz_2 - nz_1}{m - n}$$

Jadi koordinat titik R ($\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m - n}$ **)**

Secara umum :

kita menulis perbandingan m : n = k, dimana k boleh negatip atau positip, tergantung letak titik R apakah terletak diantara titik PQ ataukah pada perpanjangannya.

Jika :

K > 0 maka R terletak diantara P dan Q

-1 < k < 0, maka R terletak diperpanjangan QP (pada pihak P)

K = -1 , menunjukkan suatu titik di tak terhingga

K < -1 , maka R terletak di perpanjangan PQ (pada pihak Q)

Dalam hal ini koordinat titik R menjadi :

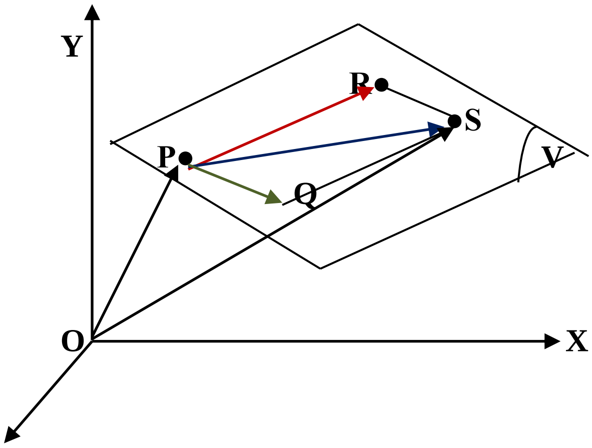
R $\left(\frac{kx_2+x_1}{k}, \frac{ky_2-y_1}{k}, \frac{kz_2-z_1}{k}\right)$, **dimana k $\neq$ -1**

D. Persamaan Bidang Datar dalam R^3

1. Persamaan Vektoris Bidang Datar

Suatu bidang datar akan dapat ditentukan jika diketahui tiga titik yang tidak segaris dan terletak pada bidang datar tersebut.

Misalkan diketahui tiga titik pada bidang V :



Diketahui : P (x_1, y_1, z_1) , Q (x_2, y_2, z_2), R(x_3, y_3, z_3)

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \\ z_3-z_1 \end{pmatrix}$$

Untuk setiap titik sebarang S (x , y , z) pada bidang V, berlaku :

$$\vec{PS} = \lambda\ \vec{PQ} + \mu\ \vec{PR}\ \ (-\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty)$$

Pada gambar diatas :

$$\vec{OS} = \vec{0P} + \vec{PS} = \vec{0P} + \lambda \vec{PQ} + \mu\ \vec{PR}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \\ z_3-z_1 \end{pmatrix}, \text{utk:} -\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty \quad (1)$$

Jika : $(x_2-x_1) = x_a$, $(y_2-y_1) = y_a$ dan $(z_2-z_1) = z_a$

$(x_3-x_1) = x_b$, $(y_3-y_1) = y_b$ dan $(z_3-z_1) = z_b$

Maka :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}, \quad \text{utk: } -\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_a, y_a, z_a] + \mu[x_b, y_b, z_b] \ldots\ldots\ldots(2)$$

Persamaan (2) disebut ***Persamaan Vektoris bidang datar***

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda x_a + \mu x_b \text{.............}(3) \\ y = y_1 + \lambda y_a + \mu y_b \text{.............}(4) \\ z = z_1 + \lambda z_a + \mu z_b \text{...............}(5) \end{array}\right\}$$

disebut ***Persamaan parameter bidang datar***

2. Persamaan Linier Bidang Datar

Jika λ dan μ kita eliminasikan dari persamaan (3) dan (4), diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{y_b(x-x_1) - x_b(y-y_1)}{C} \\ \mu = \dfrac{x_a(y-y_1) - y_a(x-x_1)}{C} \end{array}\right\} C = x_a y_b - y_a x_b = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \ldots(6)$$

Jika λ dan μ kita disubstitusikan ke persamaan (5), diperoleh:

$$C(z-z_1) - z_a\{y_b(x-x_1) - x_b(y-y_1)\} - z_b\{x_a(y-y_1) - y_a(x-x_1)\} = 0$$

$$(y_a z_b - z_a y_b)(x-x_1) + (z_a x_b - x_a z_b)(y-y_1) + C(z-z_1) = 0 \text{...........}(7)$$

$$(y_a z_b - z_a y_b) = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} = A \quad \text{dan} \quad (z_a x_b - x_a z_b) = \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} = B$$

Maka persamaan (7), menjadi :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{............}(8)$$

Persamaan (8) disebut ***Persamaan Linier (umum) bidang datar***

3. Vektor Normal dari bidang Datar V ≡ Ax + By + Cz + D = 0

Vektor :

$$[A,B,C] = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = a \text{ X } b$$

a X b, merupakan vektor yang tegak lurus pada bidang datar yang dibentuk oleh a dan b, dalam hal ini bidang datar :

V ≡ Ax + By + Cz + D = 0

$n = [A,B,C]$ disebut vektor normal dari bidang rata :

V ≡ Ax + By + Cz + D = 0
Vektor normal ini akan memegang peran penting dalam pembahasan selanjutknya.

Dari persamaan (7) diatas, suatu bidang datar yang diketahui melalui titik (x_1 , y_1,z_1) dengan vektor normal $n = [A, B, C]$ berbentuk :

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad \text{………………..(9)}$$

Hal-hal khusus dari bidang datar : V ≡ Ax + By + Cz + D = 0

a). Jika D = 0, maka bidang datar melalui titik asal O(0,0,0) dan sebaliknya , setiap bidang datar yang melalui titik asal persamannya akan mempunyai harga D = 0

b). Jika D $\neq$ 0, maka persamaan bidang V, dapat ditulis :

$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1$ dan berturut-turut :

$\frac{A}{-D} = p, \quad \frac{B}{-D} = q, \quad \frac{C}{-D} = r$, diperoleh :

px + qy + rz = 1, bidang ini memotong sumbu X di (p,0,0), sumbu Y di (0,q,0) dan sumbu Z di (0,0,r)

c). Jika A = 0, maka bidang sejajar sumbu X
Jika B = 0, maka bidang sejajar sumbu Y
Jika C = 0, maka bidang sejajar sumbu Z
Jika A = B = 0, bidang sejajar dengan bidang XOY
Jika A = C = 0, bidang sejajar dengan bidang XOZ
Jika B = C = 0, bidang sejajar dengan bidang YOZ

Contoh 1 :

Diketahui titik (1,1,2), (2,3,5) , dan (1,3,7).
Tentukan
a. Persamaan vektori bidang yang melalui ketiga titik tersebut ?
b. Persamaan meter bidang ?
c. Vektor normal bidang ?
d. Persamaan linier bidang ?
Jawab :

a. Persamaan vektoris bidang :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_a, y_a, z_a] + \mu[x_b, y_b, z_b]$$
$$[x, y, z] = [1,1,3] + \lambda[2-1,3-1,5-1] + \mu[1-1,3-1,7-2]$$
$$[x, y, z] = [1,1,3] + \lambda[1,2,4] + \mu[0,2,5]$$

b. Persamaan parameter bidang :
x = 1 + λ

y = 1 +2λ + 2μ
y = 3 + 4λ + 5μ

c. Vektor normal :

Cross product dari $[1,1,3]X[0,2,5]=[4,-5,2]$

d. Persamaan linier bidang :

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

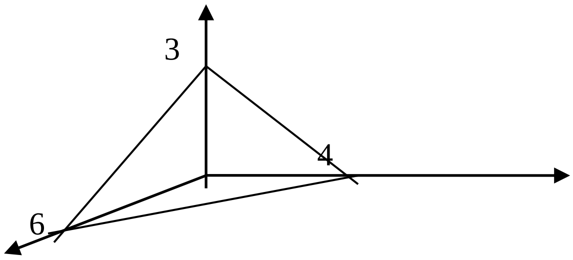
4(x – 1) + (-5) (y – 1) + 2 (z – 3) = 0

4x – 5y + 2z -13 = 0

Contoh 2 :

Ganbarlah bidang 2x + 3 y + 4z = 12 dapat ditulis men

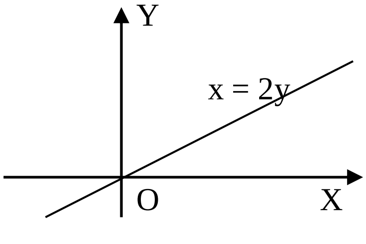
$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$ akan memotong sumbu koordinat di titik (6,0,0) , (0,4,0), dan (0,0,3)



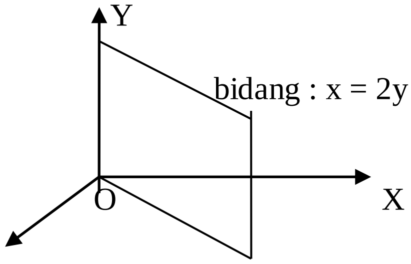
Contoh 3

Gambarlah bidang x = 2y

Dalam R^2



Dalam R^3



Catatan :

1. Cara lain mencari persamaan linier bidang datar yang melalui titik P (x_1 , y_1,z_1) , Q (x_2 , y_2, z_2), dan R(x_3 , y_3, z_3) , adalah dengan menggunakan diterminan matriks :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh :

Tentukan persmaan linier bidang datar yang melalui titik A(-1,2,1) , B(-2,-4, 2), dan R(-1 , 4,-1) ?

Jawab :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-1 \\ -2-(-1) & 4-2 & 2-1 \\ -1-(-1)_1 & 4-2 & -1-1 \end{vmatrix} =\backslash$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x+1 & y-2 & z-1 & x+1 & y-2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right| =$$

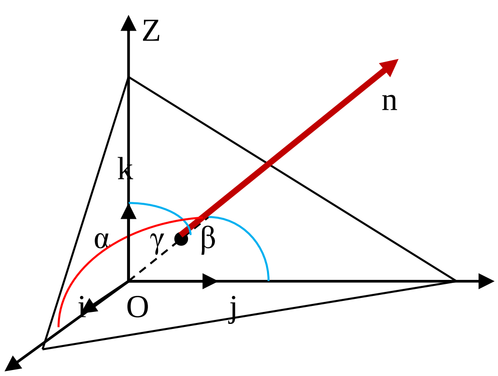
-4(x+1) + 0 -2(z-1) - {0+2(x+1)+2(y-2) = - 6x – 2y -2z = 0

2. Empat titik terletak satu bidang jika :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

4. Persamaan Normal Bidang Rata

Misalkan n = [A,B,C] adalah vektor normal bidang V = Ax + By + C + D = 0, α , β , γ , berturut – turut sudut antara vektor n dengan sumbu-sumbu koordinat (yang arahnya ditentukan oleh vektor I , j, damn k ternyata :



$$\left.\begin{array}{l} \text{n.i} = |\text{n}||\text{i}|\cos\alpha \leftrightarrow \cos\alpha = A/|\text{n}| \\ \text{n.j} = |\text{n}||\text{j}|\cos\beta \leftrightarrow \cos\beta = B/|\text{n}| \\ \text{n.k} = |\text{n}||\text{k}|\cos\gamma \leftrightarrow \cos\gamma = C/|\text{n}| \end{array}\right\} \ldots.(1)$$

atau :

[cos α, cos β , cos γ]= [A , B, C]/|n|= n/|n|

[cos α, cos β , cos γ]= [A , B, C]/|n|= n/|n| , vektor ini merupakan vektor satuan yang searah dengan vektor Normal n.

Untuk n vektor satuan, maka |n| = 1 , dan n = [cos α, cos β , cos γ] disebut vektor cosinus dari bidang V.

Misalkan d adalah jarak titik (0,0,0) ke bidang V = 0, dimana d ≥ 0 dan X(x,y,z) titik sebarang pada bidang , maka d adalah proyeksi OX = [x,y,z] pada vektor n yaitu : d = OX . n = [x,y,z] [cos α, cos β , cos γ] atau x cos α + y cos β + z cos γ = d yang d , persamaan ini disebut dengan persamaan normal Hesse dari bidang V = 0.

Untuk mengubah bentuk V = Ax + By + Cz + D = 0 ke bentuk normal maka kita substitusikan persamaan (1) kedalam V, kita peroleh :

|n|(x cos α + y cos β + z cos γ) = - D…………………………(2)

Kita selalu menghendaki –D/n = d positip. Jadi kalau D negatip, maka masing-masing ruas persamaan (2) kita bagi dengan |n| = $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, kalau D positip , masing-masing ruas kita kalikan dengan - |n

Contoh :

Carilah bentuk normal dari 3x + 6y – 2z + 6 = 0

Jawab :

D = 6 adalah positip,sedangkan |n| = $\sqrt{9+36+4} = 7$

Jadi persamaan normalnya adalah : $\frac{-3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{t}z = \frac{6}{7}$

5. Sudut Antara Dua Bidang

Sudut antara dua bidang tidak lain adalah sudut antara vektor-vektor normalnya. Sudut antara bidang V = Ax + By + Cz + D = 0 dan bidang W = Px + Qy + Rz + S = 0 adalah sudut antara normal-normal.

$$n_1 = [A, B, C] \ dan \ n_2 = [P.Q, R]$$

$$Cos\theta = \frac{n_1.n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{AP + BQ + CR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

Contoh :

Tentukan Sudut antara bidang x + y + z + 3 dan bidang 2x + y + 2z -11 = 0

Jawab :

$$Cos\theta = \frac{AP + BQ + CR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

$$Cos\theta = \frac{1.2 + 1.1 + 1.2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$jadi\ \theta = \ arc\ \cos\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$$

a. Dua Bidang Sejajar

Jika V dan W dua bidang yang sejajar, maka mempunyai vektor normal sama Atau berkelipatan.

Berarti :

$n_1 = [A, B, C] \ = \ \lambda\ [P.Q, R]$ adalah syarat dua bidang sejajar. (λ sebarang $\neq 0$

Contoh :

Bidang datar V sejajar bidang datar W = x + y + 5z = 9 . jika V melalui titik (0,2,1) tentukan persamaan bidng V ?

Jawab :

Karena sejajar maka vektor normal V adalah : n = [1,1,5],

Jadi persamaan bidang V = x + y + 5z + D = 0.

V melalui titi (0,2,1). Maka : 0 + 2 + 5 + D = 0 ↔ D = -7

Persamaan bidang V = x + y + 5z – 7 = 0

b. Dua Bidang Salingh Tegak Lurus

Jika bidang V dan W saling tegak lurus maka vektor normalnya juga akan saling tegak lurus ($n_1 \perp n_2$) atau $n_1.n_2 = 0 \Leftrightarrow AP + PQ + RS = 0$

Contoh :

Tentukan persamaan bidang datar V yang tegak lurus dengan bidang datar W = x + y + z = 1 serta melalui titik (0,0,0) dan (1,1,0)

Jawab :

Misalkan V = Px + Qy +Rz + S = 0, tegalk lurus W, maka :

P.1 + Q . 1 + R . 1 = 0 atau P + Q + R = 0…(1)

V melalui (0,0,0), berarti D = 0, dan

V melalui (1,1,0) berarti P + Q = 0 ↔P = -Q. …(2)

Substitusi (2) ke (1), maka R = 0

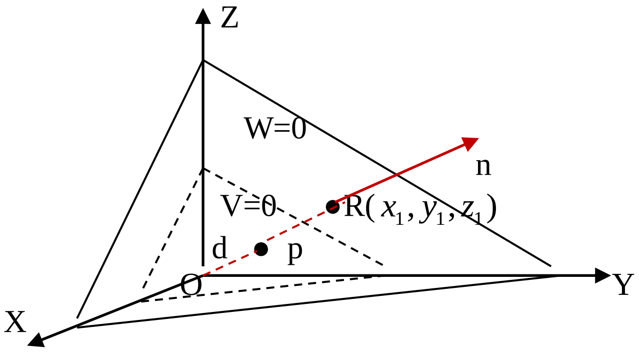
Persmaan W adalah –Qx + Qy +0.z + 0 = 0

Q(-x + y) = 0 ↔ -x + y = 0

6. Jarak Titik ke Bidang Datar V

Pandang bidang V = x cos α + y cos β + z cos γ = d . kita hendak menentukan

jarak titik R (x_1, y_1, z_1) ke bidang V. Kita buat buat bidang W sejajar dengan bidang V memalui titik R.
Jadi vektor normal nidang V dan bidang W sama, sedangkan jarak titik masal ke bidang W adalah d ± p (tergantung letak bidang V dan W dengan titik O (0,0)



W = x cos α + y cos β + z cos γ = d ± p, karena R (x_1, y_1, z_1) pada W, maka
$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = d \pm p$ atau
$p = \left| \, x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - d \, \right|$ adalah jarak titik R (x_1, y_1, z_1) ke bidang V= = x cos α + y cos β + z cos γ = d
Jika V berbentuk : Ax + By + Cz + D = 0, maka :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Contoh:
Tentukan jarak titik (4,7,3) ke bidang : 2x + 6y -3z -13 = 0
Jawab :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{2.4 + 6.7 - 3.3 - 13}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} \right| = 4$$

Jadi jarak antara titik (4,7,3) ke bidang : 2x + 6y -3z -13 = 0 adalah = 4

7. Jarak Antara Dua Bidang yang Sejajar
Cara mencari jarak antara dua bidang yang sejajar, adalah dengan mengambil titik sebarang pada bidang V dan selanjutnya menentukan titik tersebut dengan bidang W.

Contoh :
Tentukan jarak anatara bidang V = x + y +z -2= 0 dengan bidang W = x + y +z – 5 = 0 ?
Jawab :
Pilih titik R pada V, dengan memisalkan x = 0, y = 0, maka z = 2, maka R

(0,0,2) .
Jarak titik R(0,0,2) ke bidang W

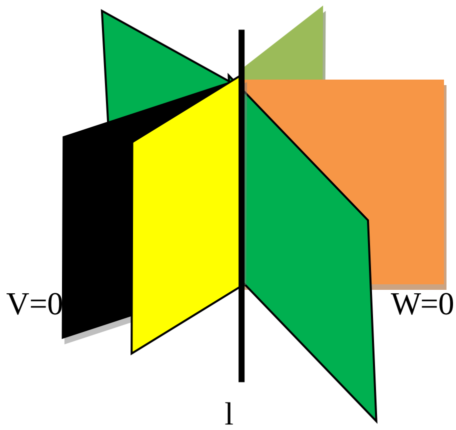
$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{1.0 + 1.0 + 1.2 - 5}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

8. Berkas Bidang Datar

Bidang-bidang V = Ax + By + Cz + D = 0 dan bidang W = Px + Qy + Rz + S = 0 berpotongan memembentuk garis lurus. Setiap titik pada garis potong tersebut memenuhi persmaan : V + λ W = 0, adalah persamaan bidang yang melalui garis potong V= 0 dan W = 0.
Jika bidang V dan W sejajar, maka berkas bidang V + λ W = 0 merupakan himpunan-himpunan bidang yang sejajar dengan V = 0 dan W = 0.

Berikut ini gambar berkas bidang:

Gambar Berkas Bidang



Bidang V = 0 dan W = 0 berpotongan di garis ℓ, maka setiap bidang yang melalui garis potong tersebut disebut berkas garis;

Persamaan berkas garisnya adalah :

V + λ W = 0

Contoh :
Tentukan persamaan bidang datar W yangt melalui titik (0,0,0) serta melalaui garis potong bidang-bidang :
V = 2x + 3y + 24 = 0 dan U = x – y + 2z = 12 ?
Jawab :
W dapat dimisalkan berbentuk : V + λ U = 0

(2x + 3y + 24) + λ (x – y + 2z-12) = 0

Karena W melalui titik (0,0,0), maka :

(2.0 + 3.0 + 24) + λ (0 – 0 + 2.0 -12) = 0 ⇔ λ = 2

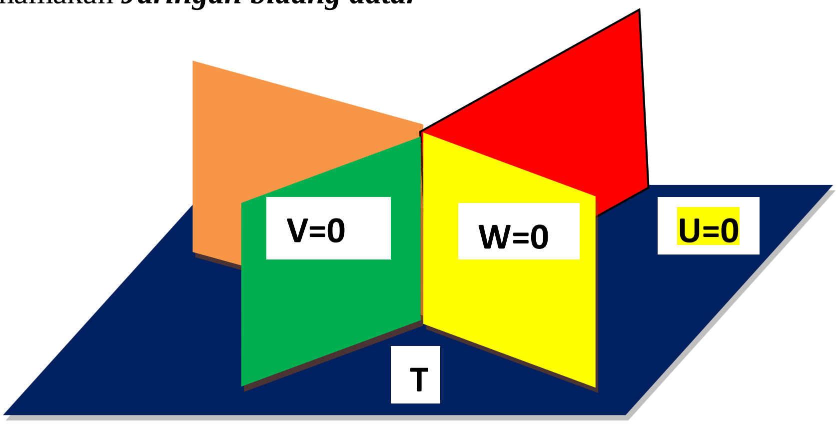
Jadi persaman bidang W = (2x + 3y + 24) + λ (x – y + 2z-12) = 0

= (2x + 3y + 24) + 2 (x – y + 2z-12) = 0

$= 4x - y + 4z = 0$

9. Jaringan Bidang Datar

Pandang bidang-bidang U = 0, V = 0 dan W = 0 yang tidak terletak dalam sebuah berkas yang sama (tidak berpotongan pada satu garis atau sejajar satu dengan yang lain). Persmaan : $U + \lambda V + \mu V = 0$ merupakan himpunan bidang-bidang yang melalui titik potong ketiga bidang tersebut (pada gambar dibawah melalui titik A) , dan himpunan bidang-bidang yang melalui titik tersebut dinamakan ***Jaringan bidang datar***



Gambar : Jaringan Bidang Datar

Contoh :

Tentukan persamaan bidang datar V yang sejajar bidang U = x + y + z = 1, serta melalui titik potong bidang-bidang $W_1 = x - 3 = 0$, $W_2 = y - 4 = 0$, dan $W_3 = z = 0$?

Jawab :

Bidang rata V berbentuk : $W_1 + \lambda W_2 + \mu W_3 = 0$

$x - 3 + \lambda(y-4) + \mu z = 0$

$x + \lambda y + \mu z - 3 - 4\lambda = 0$, karena V sejajar dengan U = x + y + z = 1,maka normal dari bidang V = normal bidang U = [1,1,1]

karena normal didang V = $[1, \lambda, \mu]$, maka : $[1,1,1] = [x, \lambda, \mu]$, berarti

$\lambda = 1$ dan $\mu = 1$.

Jadi persamaan bidang V adalah :

$x + \lambda y + \mu z - 3 - 4\lambda = 0$

$x + y + z - 3 - 4.1 = 0$

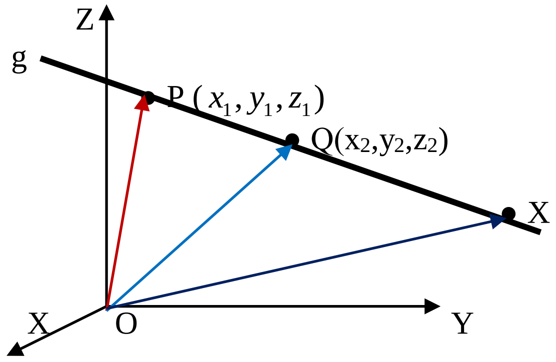
$x + y + z - 7 = 0$

E. PERSAMAAN GARIS LURUS DALAM R^3

1. Persamaan Vektoris Garis Lurus

Sebuah garis lurus dapat ditentukan jika diketahui 2 titik pada garis tersebut . Misal titik P (x_1, y_1, z_1) Dan titik Q (x_2, y_2, z_2) terletak pada garis lurus g.

Maka : OP = $[x_1, y_1, z_1]$



Untuk setiap titik sebarang X (x,y,z) pada g,berlaku PX = λ PQ , untuk $(-\infty < \lambda < \infty)$.

Jelas bahwa OX = OP + PX

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$
……………………….(1)

Persamaan (1) disebut ***Persamaan vektoris garis lurus*** yang melalui titik $P(x_1, y_1, z_1)\ \ dan\ \ Q(x_2, y_2, z_2)$

Vektor PQ disebut vektor arah garis lurus.

Jadi bila garis lurus melalui satu titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan mempunyai vektor arah $a = [a, b, c]$,persamaan garis lurus dalam demensi 3 adalah :

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, b, c]$, untuk $(-\infty < \lambda < \infty)$ …………(2)

Contoh :

Tentukan persamaan vektoris garis lurus yang melalui titik (1,3,2) dan (5,-3,2).

Jawab :

Persamaan garis lurus melelui titik (1,3,2) dan (5,-3,2) adalah :

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$

$[x, y, z] = [1,3,2] + \lambda\ [(5-1), (-3-3), (2-2)]$

$[x, y, z] = [1,3,2] + \lambda\ [(4, -6, (0)]$

2. **Persamaan Parameter Garis Lurus dalam R^3**

Dari persamaan (2) diatas :

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, b, c]$, untuk $(-\infty < \lambda < \infty)$ …………..(3)

Diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda a \\ y &= y_1 + \lambda b \\ z &= z_1 + \lambda c \end{aligned}\right\}$$ disebut ***persamaan parameter garis lurus***

3. **Persamaan Garis Lurus yang Melalui Titik (x_1,y_1,z_1) dan vektor arah**

a = $[a,b,c]$

Dari persamaan parameter garis lurus diatas, kita peroleh :

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda a \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{x - x_1}{a} \\ y = y_1 + \lambda b \Leftarrow \lambda = \dfrac{y - y_1}{b} \\ z = z_1 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{z - z_1}{c} \end{array}\right\} \text{, maka : } \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \text{ ....(4)}$$

4. Persamaan Garis Lurus yang Melalui Titik $[x_1, y_1, z_1]$dan $[x_2, y_2, z_2]$

Dari persamaan (4) :

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$, karena :

$$\left.\begin{array}{l} a = x - x_1 \\ b = y - y_1 \\ c = z - z_1 \end{array}\right\} \text{, maka: } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ ......(5)}$$

Persamaan (5) disebut persamaan garis lurus yang melalui titik $[x_1, y_1, z_1]$dan $[x_2, y_2, z_2]$

Dengan syarat :

$(x_2 - x_1) \neq 0,\ (y_2 - y_1) \neq 0,\ (z_2 - z_1) \neq 0$

5. Hal-hal Khusus Tentang Garis Lurus denagn Vektor Arah $[a,b,c]$

a. Garis lurus melalui ttitik O(0,0,0) akan berbentuk :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

b. Jika a = 0, Vektor arah $[0,b,c]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang YOZ

Persamaan (3), menjadi :

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a,b,c]$

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [0,b,c]$

$x = x_1 + \lambda.0 \Leftrightarrow x = x_1$

$y = y_1 + \lambda b \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{y - y_1}{b}$ \

$z = z_1 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{z - z_1}{c}$

Sehingga persmaan garis tersebut :

$$x = x_1 \ , \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

c. Jika b = 0, Vektor arah $[a,0,c]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang XOZ
Persamaan (3), menjadi :
$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda \ [a,b,c]$
$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda \ [a,0,c]$

$$x = x_1 + \lambda.a \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{a}$$

$$y = y_1 + \lambda.0 \Leftrightarrow y = y_1$$

\

$$z = z_1 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

Sehingga persamaan garis tersebut :

$$y = y_1 \ , \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}$$

d. Jika b = 0, Vektor arah $[a,b,0]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang XOY
Persamaan (3), menjadi :
$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda \ [a,b,c]$
$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda \ [a,b,0]$

$$x = x_1 + \lambda.a \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{a}$$

$$y = y_1 + \lambda.b \Leftrightarrow \lambda = \frac{y - y_1}{b} \backslash$$

$$z = z_1 + \lambda.0 \Leftrightarrow z = z_1$$

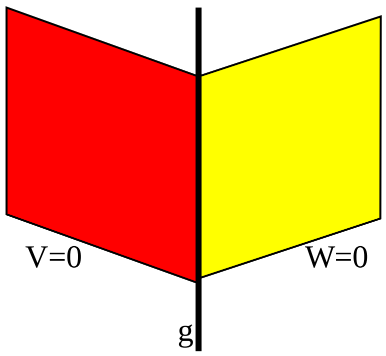
Sehingga persamaan garis tersebut :

$$z = z_1 \ , \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

e. Jika a = c = 0, vektor $[0,b,0]$ sejajar dengan arah sumbu Y .
f. Jika a = b = 0, vektor $[0,0,c]$ sejajar dengan arah sumbu Z .
g. Jika b = c = 0, vektor $[a,0,0]$ sejajar dengan arah sumbu Z .

6. Persamaan Garis Lurus Sebagai Perpotongan Dua Bidang Datar

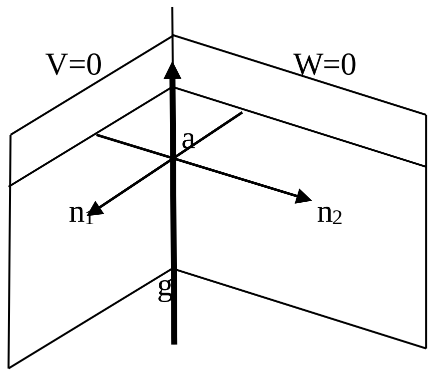
Kita dapat menyatakan suatu garis lurus sebagai perpotongan dua bidang datar .



Misalnya garis lurus tersebut adalah perpotongan bidang :
V = Ax + By + Cz + D = 0 dan bidang
W = Px + Qy + Rz + S = 0
Maka persamaan garis lurus g dapat ditulis :

$$g : \begin{cases} V = Ax + By + Cz + D = 0 \\ W = Px + Qy + Rz + S = 0 \end{cases}$$

Untuk menentukan vektor arah garis lurus perpotongan dua bidang tersebut , kita perhatikan gambar berikut ini :



$n_1 = [A, B, C], \quad dan \ n_2 = [P, Q, R]$

$n_1 \times n_2 = a$

a adalah vektor arah garis g, jadi :

$$a = [a, b, c] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A & B & C \\ P & Q & R \end{vmatrix} \ldots\ldots(1)$$

Persamaan (1), sama dengan :

$$a = \left[\begin{vmatrix} B & C \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ P & R \end{vmatrix} \right],$$

dimana untu memudahkan mengingatnya, kita tulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccc} & \multicolumn{2}{c}{a} & \multicolumn{2}{c}{c} \\ A & B & C & A & B \\ P & Q & R & P & Q \\ & & \multicolumn{2}{c}{b} & \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

Untuk mengubah bentuk persamaan V = 0 = W menjadi bentuk :

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{y - y_1}{c}$, kita harus menentukan pula koordinat (x_1, y_1, z_1), sebarang titik pada garis lurus.

Untuk itu biasanya kita ambil titik potong dengan bidang koordinat, misalnya , XOY, maka z = 0, kita peroleh :

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + D &= 0 \\ Px + Qy + S &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Yang jika di eleminasi , kita dapatkan :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -S & Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}} \quad \text{dan} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ P & -S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}}$$

7. Kedudukan Dua Garis Lurus dalam R^3

Dalam R^3 , dua garis lurus mengkin sejajar, berimpit, berpotongan, atau bersialangan.

Diketahui garis lurus:

$g_1 : [x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a_1, b_1, c_1]$ dan

$g_2 : [x, y, z] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda[a_2, b_2, c_2]$

Kemungkinan-kemungkinan :

a. g_1 sejajar g_2 jika vektor arah yang satu keliapatan yang lain :

$[a_1, b_1, c_1] = \mu[a_2, b_2, c_2]$

Berarti **:** $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

b. g_1 berpotongan di satu titik dengan g_2, maka vektor arah tidak berkelipatan.

Misalkan titik potongnya (x_o, y_o, z_o), berarti ada λ_1 sehingga :

$g_1 : [x_0, y_0, z_0] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1]$, ada λ_2 sehingga :

$g_2 : [x_0, y_0, z_0] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$

Berarti

$[x_1, y_1, z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$

Atau :

$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = x_2 - x_1$

$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = y - y_1$

$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = z - z_1$

Berdasarkan teori persamaan linier dua variabel, nilai λ_1 dan λ_2 ada jika determinan :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

merupakan syarat duat garis berpotongan

Sedangkan persamaan bidang yang memuat garis g_1 dan g_2 adalah :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x - x_1 \\ b_1 & b_2 & y - y_1 \\ c_1 & c_2 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

Dua garis bersilangan, jika :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

8. Sudut antara Garis g_1 dan garis g_2

Sudut antara garis g_1 dan g_2 adalah sudut antara vektor-vektor arah : $[a_1, b_1, c_1]$ dan $[a_2, b_2, c_2]$ yaitu :

$$\text{Cos } \theta = \frac{[a_1, b_1, c_1].[a_2, b_2, c_2]}{\|[a_1, b_1, c_1]\|.\|[a_2, b_2, c_2]\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}}$$

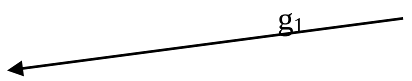
Kedua garis g_1 dan g_2 tersebut saling tegak lurus bila ***dot product*** vektor arah mereka = 0, atau bila :

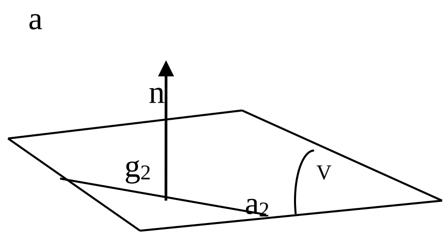
$$[a_1, b_1, c_1].[a_2, b_2, c_2] = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

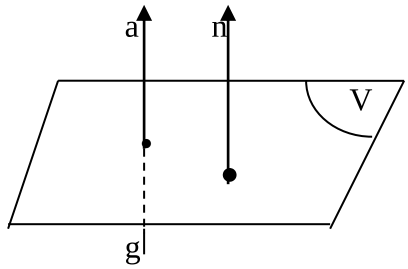
9. Kedudukan Garis Lurus dan Bidang Datar

Jika diketahui garis lurus g dengan vektor arah a = $[a, b, c]$ dan bidang V dengan vektor normal n = $[A, B, C]$, maka :

a. Garis lurus g sejajar bidang V , jika dan hanya jika :
   Vektor arah garis tegak lurus dengan vektor normal bidang V, jadi
   a . n = 0 atau aA + bB + cB = 0
b. Garis lurus g tegak lurus bidang V, jika dan hanya jika :
   Vektor arah garis lurus = vektor normal bidang V, jadi
   $$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$
c. Garis lurus g terletak seluruhnya pada garis V, jika dan hanya jika :
   a . n = 0, atau aA + bB + cC = 0 dan sebarang titik P (x_1, y_1, z_1) pada garis g juga terletak pada bidang V.







Keterangan gambar (a)
g_1 sejajar bidang V
g_2 terletak pada bidang V
g_2 tegak lurus bidang v

Keterangan gambar (b) :
Garis g tegak lurus dengan bidang V

10. Garis Lurus Memotong Garis Lurus Yang Lain

Jika $g_1 : V_1 = 0 = V_2$ dan $g_2 : \ W_1 = 0 = W_2$, maka persamaan umum dari garis lurus g yang memotong g_1 dan g_2 adalah :

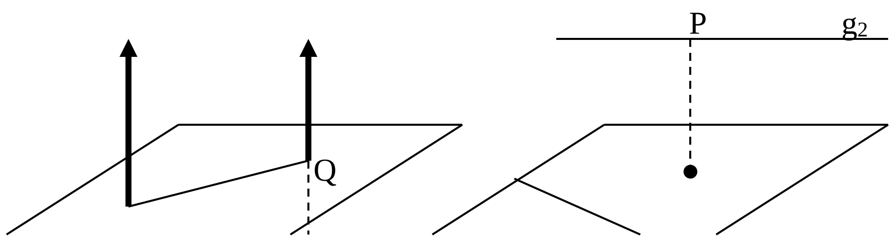
$$V_1 + \lambda V_2 = 0 = W_1 + \mu W_2$$

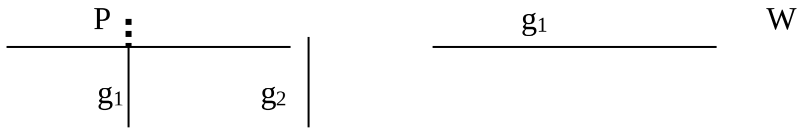
11. Jarak Antara Dua Garis Lurus Dalam R^3

a. Jika g1 dan g2 sejajar, untuk menghitung jaraknya dapat dilakukan sebagai berikut :
   1). Pilih sebaragng titik P pada g1
   2). Buat budang datar W melelui P dan tegak lurus g_1, yang dengan sendirinya juga tegak lurus g_2
   3). Tentukan titik Q titik tembus g_2 pada W
   4). Panjang PQ adalah jarak garis g_1 dan g_2

b. Jika g_1 dan g_2 bersilangan , kita lakukan sebagai berikut :
   1). Buat bidang datar W yang melalui g_1 dan sejajar g_2
   2). Pilih sebarang titik P pada g_2
   3) Tentukan jarak P ke bidang W, merupakan jarak g_1 dan g_2

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini :



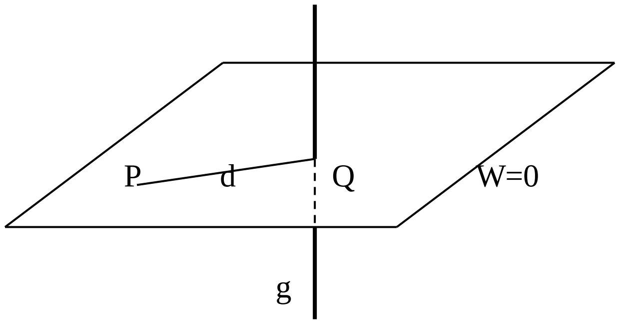


12. Jarak Sebuah Titik ke Sebuah Garis Dalam R³

Jarak titik P (x_1, y_1, z_1) ke garis g dapat kita cari sebagai berikut :

a) Buat bidang W melalui P tegak lurus g
b) Cari titik Q, titik tembus g pada W
c) Garis PQ adalah garis yang tegak lurus g dan melelui P sehingga panjang PQ adalah jarak titik P ke garis g

Perhatikan gambar berikut ini :



13. Perpotongan Tiga Bidang Datar

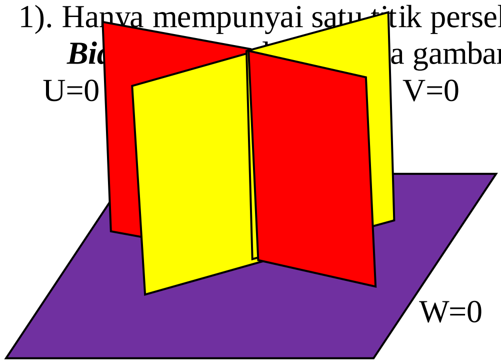
Diketahui tiga bidang datar :

U = Ax + By + Cz + D = 0
V = Px + Qy + Rz + S = 0
W = Kx + Ly + Mz + N = 0

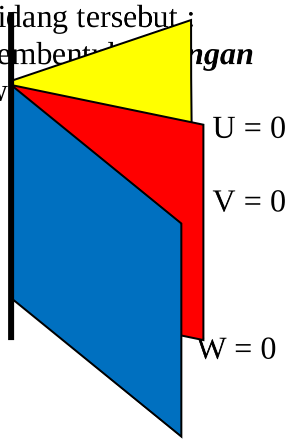
U, V, dan W tidak sejajar.

Terdapat tiga kemungkinan kedudukan ketiga bidang tersebut :

1). Hanya mempunyai satu titik persekutuan (membentuk ... ***ngan Bi...*** ... a gambar (1) dibaw...



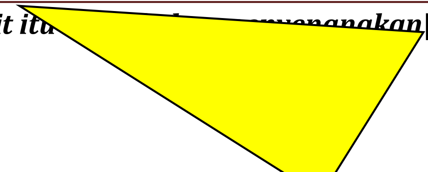
Gambar (1)

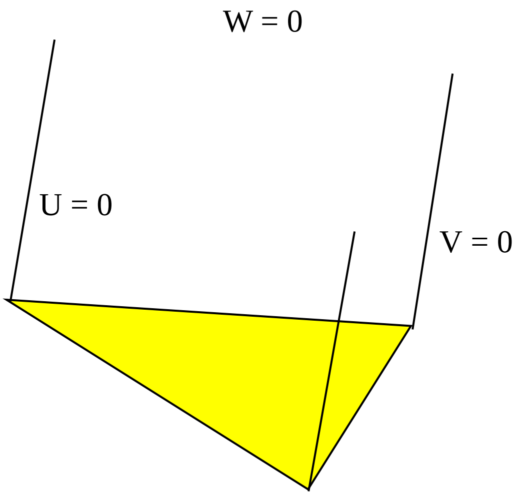


Gambar (2)

2). Mempunyai satu garis persekutuan (membentuk ***Berkas Bidang***)
Bisa dilihat pada gambar (2) diatas.

3) . Membentuk ***Prisma Sisi Tiga***





Pandang bahwa U dan V tidak sejajar. Garis potong U dan V yaitu g mempunyai vektor arah : $n_1 \ x \ n_2 = [A, B, C] \ x \ [P, Q, R]$ dan melelui titik

P,sehingga P $\left(\dfrac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -S & Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} A & -D \\ P & -S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}}, 0 \right)$

Maka bidang –bidang : U = 0 , V = 0, dan W = 0 membentuk prisma sisi tiga jika g sejajar dengan bidang W (g terletak pada bidang W) , bererti :

$(n_1 \text{ x } n_2).\ n_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ A & B & C \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ P & Q & R \\ K & L & M \end{vmatrix} = 0 \text{.....................................}(1)$$

Misalkan titik P tidak terletak pada bidang W = 0, bererti tidak terpenuhi hubungan :

$$K \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -S & Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}} + L \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ P & -S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}} \text{L} + \text{M}.0 + \text{N} = 0$$

Atau memenuhi :

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ P & Q & R & S \\ K & L & M & N \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Kesimpulan :

a. Ketiga bidang datar membentuk suatu berkas bidang datar jika terpenuhi persamaan (1) dan (2)
b. Ketiga bidang membentuk suatu prisma sisi tiga jika terpenuhi persamaan (1) , tetapi persmaan (2) tidak terpenuhi
c. Dalam hal lain membentuk jaringan

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan bidang datar yang melelui P(2,2,1) dan Q(9,3,6) serta tegak lurus bidang V = 2x + 6y + 6z = 9 ?

   Jawab :

   Misalkan persamaan bidang W= Ax + By + Cz + D = 0

   Melalui (2,2,1) , maka : 2A + 2B + C + D = 0………..(1)

   Melalui (9,3,6), maka : 9A + 3B + 6C + D = 0………(2)

   Karena tegak lurus dengan V, maka 2A + 6B + 6C = 0……….(3)

   Dari (1) dan (2), diperoleh: 7A + B + 5C = 0…….(4)

   Dari ((3) dan (4), diperoleh : 40A +24C = 0 ↔ A = -$^3\!/_5\,C$,

   substitusikan ke (4), diperoleh : B = -$^4\!/_5\,C$ dan ke (1) : D = $^9\!/_5\,C$

   Jadi persamaan bidang tersebut adalah :

   $\frac{-3}{5}Cx - \frac{4}{5}Cy + Cz + \frac{9}{5}C = 0$, kita kalikan $\frac{5}{C}$, kita peroleh :

   -3x -4y + z + 9 = 0 atau 3x + 4y – z – 9 = 0

2. Tentukan persamaan bidang datar yang melelui titik (-1,3,2) serta tegak lurus bidang V = x + 2y + 2z = 5 dan W = 3x + 5y + 2z = 8 ?

   Jawab :

   Bidang U yang diminta , melalaui (-1,3,2) berbentuk : A(x+1) + B(y-3) + C(z-2) = 0

   U tegak lurus V , maka A + 2B + 2C = 0…………(1)

   U tegak lurus W, maka 3A + 5B + 2C = 0 ……..(2)

   Persmaan (1) dan (2), kita peroleh :

   2A + 3B = 0 ↔A =- $\frac{3}{2}B$………(3)

   Persmaan (3) di substitusikan ke (1), diperoleh C = $\frac{1}{4}B$, sehingga :

$-\frac{3}{2}B$(x+1) + B(y-3) + $\frac{1}{4}B$(z-2) = 0, kita kalikan $\frac{4}{B}$, diperoleh :
-6(x+1) +4(y-3) + z-2 = 0 ↔ 6x – 4y + z + 16 = 0

3. Tunjukkan bahwa garis lurus yang menghubungkan titik-titik P(-1,-2,-3) dan Q (1,2,-5) serta garis lurus yang menghubungkan R(6,-4,4) dan S (0,0,-4) saling berpotongan ?
   Jawab :
   Jelas bahwa PQ = $[2,4,-2]$ tidak sejajar dengan RS = $[-6,4,-8]$
   Selanjutnya akan ditunjukkanbahwa ke empat titik tersebut sebidang .
   $$\begin{vmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & Y_R - y_P & z_R - z_P \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
   Jadi P, Q , R , dan S terletak pada satu bidang, PQ sejajar RS, berarti garis melalui PQ berpotongan dengan garis melalui RS

4. Tentukan persamaan bi dang datar M melalui garis potong bidang U = x – 3y + z – 7 = 0 dan V = 2x – y + 3z – 5 =0 serta tegak lurus bidang W = x + 2y + 3z + 7 = 0 ?
   Jawab :
   Bidang M melalui perpotongan U dan V berarti :
   U + λV = 0 ↔ x – 3y + z – 7 + λ (2x – y + 3z – 5) = 0↔
   (1 +2λ)x – (3 +λ)y + (1 + 3λ)z + (-7 -5λ) = 0
   Karena M tegak lurus W , maka :
   [(1 +2λ), – (3 +λ) , (1 + 3λ)] . [1,2,3] = 0↔ 9λ = 2 ↔λ =2/9
   Jadi persmaan bidang M adalah :
   (1 +2λ)x – (3 +λ)y + (1 + 3λ)z + (-7 -5λ) = 0
   (1 +2.2/9)x – (3 +2/9)y + (1 + 3.2/9)z + (-7 -5.2/9) = 0
   13 – 29 y + 15 z – 73 = 0

5. Tentukan persmaan garis lurus yang memotong kedua garis lurus g_1 : 2x + y – 1= 0 = x – 2y + 3z , g_2 : 3x –y +z +2 = 0 = 4x + 5y - 2z – 3 serta sejajar garis lurus g_3 : x = y/2 = z/3 ?
   Jawab :
   Pesamaan umum garis lurus yang memeotong g1 dan g2 adalah :
   $$g \begin{cases} 2x + y - 1 + \lambda(x - 2y + 3z) = 0 \\ 3x - y + z + 2 + \mu(4x + 5y - 2z - 3) = 0 \end{cases}$$
   $$\text{Atau} \begin{cases} (2 + \lambda)x + (1 - 2\lambda)y + 3\lambda z - 1 = 0 = V \\ (3+4\mu)x + (-1+5\mu)y + (1 - 2\mu)z + 2 - 3\mu = 0 = W \end{cases}$$
   Karena g sejajar dengan g3 berarti vektor arahnya = [1,2,3], yang tegak lurus normal bidang V dan normal budang W, berarti : (2 + λ). 1 + (1 -2λ).2+ 3 λ . 3 = 0 ↔λ = - 2/3
   (3+4 µ).1 + (-1+5 µ).2 +(1 -2 µ).3 = 0 ↔ µ = - ½
   Maka persamaan garis lurus yang diminta adalah :

$g : 4x + 7y – 6z – 3 = 0 = 2x – 7y + 4z + 7$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan linier bidang datar melalui tiga titik :
   a. (3,4,5) , (-2,4,7), dan (-2,-1,-3)
   b. (-1,0,4), (2,-3,-1), dan (3,-3,-2)
2. Apakah empat titik berikut ini sebidang ?
   a. (2,1,3), (4,2,1), (-1,-2,4), da, (0,0,5)
   b. (4,2,1), (-1,-2,2), (0,4,-5), dan (1/2 , ½ , 0)
   c. (3,1,2), 4,-2,-1), (1,2,4), dan (1,2,1)
3. Jelaskan hal-hal istinewa pada bidang-bidang berikut ini , serta berikan gambarnya ?
   a. $x + y = 6$ d. $x – 6 = 0$
   b. $2x – z = 0$ e. $2x + 4y + 3z = 0$
   c. $2y – 3z = 6$ f. $3x – 5y +2z = 30$
4. Tentukan persaman linier bidang datar :
   a. melalui (3,-2,-4) yang horizontal ?
   b. Sejajar sumbu Z memotong sumbu X positip sebesar 2, memotong sumbu Ynegatif sebesar 3
   c. melalui (3,-2,4) dan tegak lurus garis $[x,y,z] = \lambda\ [2,2,-3]$
   d. melalui (-1,2,-3) dan tegak lurus garis lurus yang melalui (-3,2,4) dan (5,4,1)
5. Tentukan persamaan linier bidang datar yang:
   a. melalui (-1,2,4) da sejajar bidang datar $2x – 3y – 5z + 6 = 0$
   b. sejajar bidang datar $3x – 6y – 2z -4 = 0$ dan berjaarak 3 dari titik asal (0,0,0)
   c. sejajar bidang datar $4x – 4y + 7z -3 = 0$ dan berjarak 4 dari titik (4,1,-2)
6. Tentukan persmaan bidang datar :
   a. melalui (3,-2,4) dan tegak lurus bidang-bidang datar $7x – 3y + z – 5 = 0$ dan $4x – y – z + 9 =0$
   b. melalui (4,-3,2) dan tegak lurus garis potong bidang datar $x – y + 2z – 3 = 0$ dan $2x – y – 3z = 0$
   c. yang tegak lurus bidang-bidnag datar $3x – y + z = 0$ dan $x + 5y + 3z = 0$ serta berjarak V6 dari titik asal
   d. melalui titik (2,1,1) dan (3,2,2) serta tegak lurus bidang datar $x + 3y – 5z -3 = 0$
7. tentukan titik potong ketiga bidang :
   a. $2x – y – 2z = 5$, $4x + y + 3z = 1$, $8x – y + z = 5$
   b. $2x + y – z – 1= 0$, $3x – y –z +2 = 0$, $4x –y + z – 3 = 0$
   c. $2x + 3y + 3 = 0$, $3x + 2y – 5z + 2 = 0$, $3x – 4z + 8 = 0$
8. Suatu bidang datar memeotong sumbu-sumbu koordinat ditik A, B, dan C. sedemikian sehingga titik berat segitiga ABC adalah titik (a,b,c) . Tunjukkan

bahwa persamaan bidang datar tersbut adalah : x/a + y/b + z/c = 0

9. Tentukan persamaan bidang datar :
   a. melalui sumbu X dan tegak lurus bidang datar 2x – y – 3z = 5
   b. melalui ngarispotong bidang-bidang datar x + y + z = 6 dan 2x + 3y + 4z + 5 = 0 serta titik (1,1,1)
   c. melalui garis potong bidang-bdang datar 2x – y = 0 dan 3z – y = 0 serta tegak lurus bidang datar 4x + 5y -3z = 0
   d. melalui garis potong bidnag-bidang datar ax + by + cz + d = 0, px + qy + rz + s = 0 serta tegak lurus bidang XOY.
10. Tentukan persamaan bidang datar yang :
    a. melalui titik (3,-3,1) dan tegak lurus garislurus yang menghi=ubungkan titik (3,4,-1) dan (2,-1,5)
    b. membagi dua potongan garis lurus melalui (1,2,3) , (3,4,5) dengan sudut siku-siku
11. Tentukian jarak :
    a. titik (-2,2,3) ke bidnag datar 2x + y – 2z = 4
    b. titik (0,2,3) kebidnag datar 6x- 7y – 6z + 22= 0
    c. bidang-bidang datar : 2x – 2y + z + 3 = 0 dan 4x – 4y + 2z + 5 = 0
    d. Bidang-bidng datar : 6x – 3\2y + 3z = 7 dan 6x – 2y + 3z = 9
12. Buktikan bahwa bidang-bidang bagi(bisector) dari bidang-bidang datar :
    Ax + By + Cz + D = 0 dan Px + Qy + Rz + S = 0 adalah :

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{Px+Qy+Rz+S}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

    (tanda ± , menunjukkan bidang bagi dalam atau bidang bagi luar). Tentukan bidang bagi dalam bidang-bidang datar : x + 2y + 2z – 3 = 0 dan 3x + 4y + 12z + 1 = 0
13. Tentukan volume bidang 4 yang dibatasi oleh bidang –bidang datar :
    Y + z = 0, z + x = 0 , x + y = 0, dan x + y + z = 1
    14. Tunjukkan bahwa bidang-bidnag berikut merupakan sisi-sisi sebuah paralellipedum:
    3x – y + 4z – 7 = 0 , x + 2y – z + 5 = 0, 6x – 2y + 8z + 10 = 0, 3x + 6y – 3z – 7 = 0
15. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan-persmaan linier garis lurus melelui titik-titik :
    a.(1,.2,1),(-2,3,2)
    b.(1,-3,2) , (4,1,0)
    c. (1,0,2), (2,3,2)
    16. Tentukanlah vektor arah , kemudian persamaan vektoris garis lurus perpotongan bidang-bidang datar :
    a. x – 2y + z = 0, 3x + y + 2z = 7
    b. 2x + 3y – 2 = 0, y – 3z + 4 = 0
    c. x + 2z – 6 = 0, y = 4
17. Tentukanlah koordinat titik tembus :
    a. garis lurus (x + 1) =(y+3)/3=(z-2)/-2 dan bidang datar 3x + 4y + 5z = 5
    b. garis lurus x – y – z + 8 = 0, 5x + y + z + 10 = 0 dan bidang datar x + y + z

– 2 = 0

c. garis lurus yang melalui (2,-3,1) , (3,-4,-5), dan bidang datar 2x + y + z = 7

18. a. Tentukan jarak titik tembus garis lurus (x-2)/3=(y+1)/4=(z-2)/12 dan bidang datar x – y + z = 5 ke titik (-1,-5,-10).
    b. Tentukan panjang potongan garis dari (3,-4,5) ke bidang 2x + 5y – 6z = 1 yang diukur sepanjang garis lurus dengan vektor arah [2,1,-2].
    c. Carilah koordinat bayangan dari titik (1,3,4) pada bidang datar 2x – y + z + 3 = 0
19. a. Tentukan persmaan garis lurus melalui (-1,3,2) dantegak lurus x + 2y + 2z = 3, tenatikan pula titik tembus garis tersebut pada bidang datar
    b. tentukan koordinat titik tembus garis lurus yang ditarik dari ttik asal, tegak luirus bidang datar F= 2x + 3y – 6z + 49 = 0, pada F . Tentukan pula bayangan titik asal pada bidang datar F .
20. Tunjukkan bahwa kedua garis lurus berikut berpotongan ?
    Tentukan bidang yang memuat kedua garis tersebut , serta titik potong kedua garis tersebut ?
    a. (x + 4)/3=(y+6)/5=(z-1)/-2 dan 3x-3y + z + 5 = 0=2x + 3y + 4z – 4
    b. (x-1)/2= (y+1)/-3=(z+10)/8 dan (x-4)=(y+3)/-4=(z+1)/7
    c. (x+1)/3=(y+3)/5=(z+5)/7 dan x-2= (y-4)/3 = (z-6)/5
21. Tunjukkan bahwa kedua garis lurus ini sejajar , hitung jaraknya :
    a. x +2y = 6 , z – 2 = 0 dan x + 2y = 9 , z = 0
    b. (x – 7)/6= y/2=z dan (x+2)/6=(y-1)/2=z-11
22. Tentukan persamaan bidang datar yang memuat garis-garis lurus :
    a. (x-4) = (y-3)/4 = (z-2)/5 dan (x – 3) = (y+2)/-4=z/5
    b. x = y = z dan (x-3) = (y+1) = z
23. Tentukan jarak :
    a. titik (4,-5,3) ke garis lurus (x-5)/3=(y+3)/-4=(z+6)/5
    b. titik (5,4,-1) ke garis lurus (x-8)/2=y/9=z/5
24. Tentukan persmaan garis lurus yang melalui P dan memotong tegak lurus garis g bila :
    a. P (2,4,-1), g : (x+5)=(y-3)/4=(z-6)/9
    b. P(-2,2,-3), g : (x-3)=(y+1)/2=(z-2)/-4
    c. P(0,0,0) , g : x + 2y + 3z + 4 = 2x + 3y + 4z + 5
25. Tentukan persmaan garis yang memotong x + y + z – 1 = 0 = 2x – y – z -2 dan x – y – z – 3 =0 = 2x + 4y – z – 4 serta melalui titik (1,1,1). Cari pla tiitk –titik potongnya ?
26. Tentukan persmaan garis lurus yang :
    a. ditarik dari titk asal dan memotong garois-garis lurus 3x + 2y + 4z – 5 = 0 = 2x- 3y + 4z + 1 dan 2x – 4y + z + 6 = 0 = 3x – 4y + z -3
    b. melalui (1,0,-1) dan memotong garis-garis lurus x = 2y = 2z serta 3x + 4y + 1, 4x + 5z = 2
27. sebauh garis , sejajar garis (x-2)/7=y/4=-z dan memotong garis-garis (x-1)/3=(y-7)/-1=(z+2), serta (x+3)/-3=(y-3)/2= (z-5)/4. Tentukan titik –titik potong tersebut ?
28. Tentukan persmaan garis lurus yang sejjar x/2 = y/3 = z/4 dan memotong

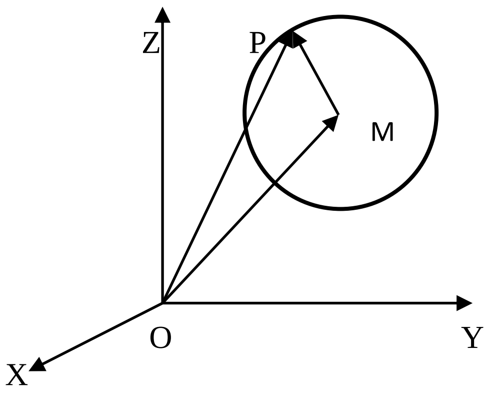
garis-garis lurus 9x+y+z+4= 0=5x + y + 3z serta x +2y -3z-3=0=2x-5y+3z+3 ?

29. Tentukan persmaan garis lurus yang melalui titik (-4,3,1) sejajar x + 2y – z = 5 serta memotong garis lurus –(x+1)/3=(y-3)/2=-(z-2). Tentukan pula titik pootongnya ?
30. Tentukan persmaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis y – 2z = 0, x – 2z = 3 dan terletak seluurhnya pada bidang x + 3y – z + 4 = 0 ?
31. Tentukan persmaan garis lurus yang melaui titik(2,3,4) tegak lurus sumbu X dan memotong garis luurs x = y = z ?
32. Tentukan persmaan garis lurus yang melaui titik asal dan memotong garis lurus (x-3)/2=(y-3)=z dengan sudut 60 derajat ?
33. Tentukan jarak dan persmaan garis hubung terpendek garis-garis lurus :
    a. (x-3)/2=(y+15)/-7=(z-9)/5 serta (x+1)/2=(y-1)/1 = (z-9)/-3
    b. (x-3)/-1=(y-4)/2=(z+2)/1 serta x-1)/1=(y+7)/3=(z+2)/2

BOLA

A. Persamaan Bola

Permukaan bola adalah tempat kedudukan titik-titik di dalam demensi tiga yang berjarak sama terahadap titik tertentu.
Titik tertentu merupakan pusat bola, dan jarak tertentu merupakan pusat bola.
Perhatikan gambar berikut ini :



Misalkan , bola dengan pusat (a,b,c), danjari-jari = r
Ambil titik P(x_o,y_o,z_o) pada bola ,
OM + MP = OP $\leftrightarrow$ MP = OP – OM= [x_0-a, y_o-b , z_0 - c].
Karena MP = r , maka :
r = [x_0-a, y_o-b , z_0 - c], berarti :
$(x_0-a)^2 + (y_o-b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$
Dengan menjalankan titik P, diperoleh persmaan bola :
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Persamaan: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, adalah persamaan bola dengan pusat (a,b) dan berjari-jari = r.
Jika pusat bola O (0,0,0), maka persamaan bola : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Contoh :
Tentukan pusat dan jari-jari bola :
a. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
b. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$
c. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$
d. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$
Jawab :
a. Pusat (0,0,0) dan jari-jari r = 9
b. Pusat (0,0,0) dan jari-jari r = V5
c. Pusat (0,3,0) dan jari-jari r = 9
d. Pusat (3,-2,0) dan jari-jari r = 4

B. Bentuk Umum Persamaan Bola

Bentuk umum persamaan bola adalah :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Bentuk ini dapat diubah menjadi bentuk : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$
Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x^2 + Ax + (\frac{1}{2}A)^2 + y^2 + By + (\frac{1}{2}B)^2 + z^2 + Cz + (\frac{1}{2}C)^2 = -D + (\frac{1}{2}A)^2 + (\frac{1}{2}B)^2 + (\frac{1}{2}C)^2$$

$$(x+\frac{1}{2}A)^2+(y+\frac{1}{2}B)^2+(z+\frac{1}{2}C)^2=\frac{-4D+A^2+B^2+C^2}{4}$$

Jadi Bola : $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$, mempunyai :

Pusat $(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B,-\frac{1}{2}C)$

Jari-jari Bola : $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$

Catatan :

Jika : $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$:

a. > 0 , maka bola disebut bola sejati
b. = 0 , maka bola berjari-jari nol (titik)
c. <0 , maka bola merupakan bola khayal

Contoh :

Tentukan pusat dan jari-jari bola :

1. $x^2+y^2+z^2+4x-6y+4z+2=0$

Jawab :

A= 4, B = -6, C = 4 dan D = 2

Pusat bola : (-2 ,3,-4)

Jari-jari bola : r = $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ =

$\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+(4)^2-4.2}=\frac{1}{2}\sqrt{60}=\sqrt{15}$

C. Persamaan Bola Yang Melalui 4 titik

Persamaan bola yang melalui titik (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), dan (x_4,y_4,z_4), adalah :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh :

Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik P(a,0,0), Q(0,b,0), R(0,0,c) , dan S(0.0.0) ?

Jawab :

Cara 1 : Dengan determina matriks:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+0^2+0^2 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0^2+b^2+0^2 & 0 & b & 0 & 1 \\ 0^2+0^2+c^2 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0^2+0^2+0^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ = 0 (kolom 1 dikurangi c kali kolom 4)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$ = 0 (kolom 1 dikurangi b kali kolom 3)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz-by & x & y \\ a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz-by & x \\ a^2 & a \end{vmatrix} = 0$$

Atau :

$ax^2+ay^2+az^2-acz-aby-a^2x=0$

Dibagi a , kita peroleh :

$x^2+y^2+z^2-cz-by-a\ x=0$

Cara 2 :

Dengan pemisalan persmaan lingkaran : $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

Melalui O(0,0,0), maka 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + D = 0 ↔ D = 0

Melalui P(a,0,0), maka a^2 + 0 + 0 + Aa + 0 + 0 + D = 0↔ A = -a

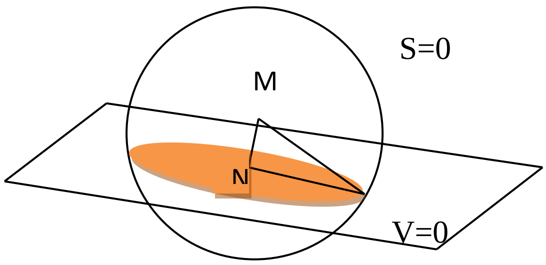
Melalui Q(0,b,0), maka 0 + b^2 + 0 + 0 + Bb + 0 + D = 0 ↔ B = -b

Melalui R(0,0,c), maka 0 + 0 + c^2 + 0 + 0 + Cc + d = 0 ↔ C = -c

Jadi Persamaan bola adalah :

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$

D. Bola dan Bidang Datar



Bola S = 0 berjari-jari r, dengan pusat M. Bidang V = 0,dengan d = jarak pusat M ke bidang V

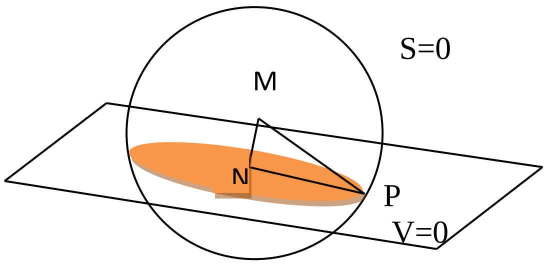
1. Bidang V memotong bola jika d < r, perpotongan bola adalah sebuah lingkaran
2. Bidang V tidak memotong bola h jikia d > r

Contoh :

Bagaimana kedudukan bola S = $x^2 + y^2 + z^2 2x + 4y + 4z - 16 = 0$

Dan bidang datar x + 2y + 2z = 0 ?

Jawab :



Jari-jari bola adalah :

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}(4) + \tfrac{1}{4}(16) + \tfrac{1}{4}(16) + 16} = 5$$

Pusat Bola (-1,-2,-2)

Jarak M ke bidang V = 0 adalah :

d =

$$\left| \frac{(1)(-1) + (2)(-2) + (2)(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = 3$$

karena d= 3 dan r = 5, berarti d < r, jadi bidang memotong bola menurut sebuah lingkaran.

Jari-jari lingkaran NP = $\sqrt{25 - 9} = 4$

Pusat lingkran N adalah titik tembus garis g yang melalui M dan tegak lurus vidang V, jadi arah garis = normal V = $[1,2,2]$

Persamaan garis g : x = -1 + λ , y = -2 + 2λ , z = -2 + 2λ…………(1)

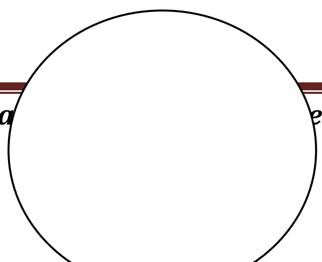
Persamaan (1) disubstitusikan ke x + 2y + 2z = 0 menghasilkan :

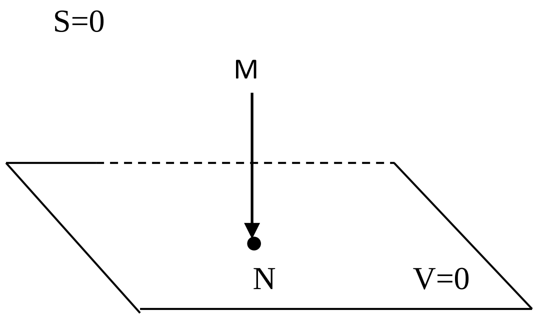
(-1+λ) + 2(-2+2λ) + 2(-2+2λ) = 0

↔ λ =1.

Jadi persamaan (1), menjadi x = 0, y= 0, z=0 atau (0,0,0) adalah titik pusat lingkaran yang diminta

E. Bidang Singgung Bola di Titik N pada Bola





Bidang singgung di titik N ($x_1.y_1,z_1$) pada bola.
Misalkan bola S =
$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$
Pusat M (- ½ A, - ½ B , - ½ C),
Titik singgung N (x_1,y_1,z_1)
Dari gambar disamping MN merupakan vektor normal bidang singgung V, jadi persamaan bidang datar V adalah :

MN = $\left[x_1 + \tfrac{1}{2}A, y_1 + \tfrac{1}{2}B, z_1 + \tfrac{1}{2}C\right]$, sehingga persamaan V :

$\left(x_1 + \tfrac{1}{2}A\right)(x - x_1) + \left(y_1 + \tfrac{1}{2}B\right)(y - y_1) + (z_1 + \tfrac{1}{2}C)(z - z_1) = 0$

$x_1x + y_1y + z_1z + \tfrac{1}{2}Ax + \tfrac{1}{2}By + \tfrac{1}{2}Cz - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \tfrac{1}{2}Ax_1 + \tfrac{1}{2}By_1 + \tfrac{1}{2}Cz_1) = 0$
……………………(1)

Karena titik N ($x_1.y_1,z_1$) pada bola berarti :

$x_1x + y_1y + z_1z + Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$

Maka persamaan (1), menjadi :

$x_1x + y_1y + z_1z + \tfrac{1}{2}A(x - x_1) + \tfrac{1}{2}B(y - y_1) + \tfrac{1}{2}C(z - z_1) + D = 0$

Merupakan bidang singgung yang ditanyakan .

Contoh:
Tentukan persmaan bidang singgung bola : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$
Di titik O(0,0,0).
Jawab :
Titik O(0,0,0) terletak pada bola, jadi dapat dipakai kaidah :
$x_1x + y_1y + z_1z + (x - x_1) + 2(y - y_1) + 2(z - z_1) = 0$, dimana ($x_1.y_1,z_1$) = (0.0.0),
berarti x + 2y + 2z = 0 adalah bidang singgung yang ditanyakan.

6. Referensi

Karso. Drs. Geometri Analitik Bidang. Bandung: Epsilon. 1982
Louis Lithold. The Calculus With Analytic Geometry. New York: Harper

Dan

misalkan titik P tidak terletak pada bidang W = 0 , berarti tidak terpenuhi

hubungan :

6. Referensi

Karso. Drs. Geometri Analitik Bidang. Bandung: Epsilon. 1982

Louis Lithold. The Calculus With Analytic Geometry. New York: Harper International Edition. Harper & Row Publisher. Hagerstone. San Fransisco. London: 1967.

Morril W. K. Analytic Geomettry. Pensyilvania: Internatonal Texbook Company Scraton. 1967.

Rawuh. Drs. Ilmu Ukur Analitis 1. Bandung: Tarate. 1974.