KANJURUHAN PRESS

GEOMETRI ANALITIKA

DATAR DAN RUANG

| DJOKO ADI SUSILO |
| SRI HARIYANI |

GEOMETRI ANALITIKA DATAR DAN RUANG

DJOKO ADI SUSILO & SRI HARIYANI

KANJURUHAN PRESS

GEOMETRI ANALITIKA
(DATAR DAN RUANG)

Penulis

DJOKO ADI SUSILO
SRI HARIYANI

Kanjuruhan Press

GEOMETRI ANALITIKA
(DATAR DAN RUANG)

Penulis
Djoko Adi Susilo
Sri Hariyani

Desain Cover & Penata Isi
Tim Kanjuruhan Press

Cetakan I, Agustus 2019

Diterbitkan oleh :
Kanjuruhan Press
Jl. S. Supriadi No.48 Malang
Telp : (0341)
Email : kanjuruhanpress@unikama.ac.id

ISBN

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Alloh SWT karena buku ini selesai disusun. Buku ini disusun untuk membantu para mahasiswa dan guru matematika dalam mempelajari konsep-konsep Geometri Analitika dan untuk mempermudah mempelajari matakuliah lain yang berhubungan dengan Geoemetri Analitika

Tersusunnya buku ini tentu bukan dari usaha penulis seorang. Dukungan moral dan material dari berbagai pihak sangatlah membantu penulis. Untuk itu, penulis ucapkan terima kasih kepada keluarga, sahabat, rekan-rekan, dan pihak-pihak lainnya yang membantu secara moral dan material bagi tersusunnya buku ini.

Penulis menyadari apabila dalam penyusunan buku ini terdapat kekurangan, tetapi penulis meyakini sepenuhnya bahwa sekecil apapun buku ini tetap memberikan manfaat. Semoga buku ini bisa dipahami dengan baik oleh pembaca dan berguna untuk semua.

Akhir kata, guna memnyempurnakan buku ini, kritik dan saran dari pembaca sangat penulis nantikan

Malang, Agustus 2019

Penulis

DAFTAR ISI

GEOMETRI ANALITIKA
(DATAR DAN RUANG)

Penulis

DJOKO ADI SUSILO
SRI HARIYANI

KANJURUHAN PRESS

GEOMETRI ANALITIKA
(DATAR DAN RUANG)

Penulis
Djoko Adi Susilo
Sri Hariyani

Desain Cover & Penata Isi
Tim Kanjuruhan Press

Cetakan I, Agustus 2019

Diterbitkan oleh :
Kanjuruhan Press
Anggota IKAPI 135/JTI/2011
APPTI 002.019.1.10.2017
Email : kanjuruhanpress@unikama.ac.id

ISBN 978-623-91605-0-0

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Alloh SWT karena buku ini selesai disusun. Buku ini disusun untuk membantu para mahasiswa dan guru matematika dalam mempelajari konsep-konsep Geometri Analitika dan untuk mempermudah mempelajari matakuliah lain yang berhubungan dengan Geoemetri Analitika

Tersusunnya buku ini tentu bukan dari usaha penulis seorang. Dukungan moral dan material dari berbagai pihak sangatlah membantu penulis. Untuk itu, penulis ucapkan terima kasih kepada keluarga, sahabat, rekan-rekan, dan pihak-pihak lainnya yang membantu secara moral dan material bagi tersusunnya buku ini.

Penulis menyadari apabila dalam penyusunan buku ini terdapat kekurangan, tetapi penulis meyakini sepenuhnya bahwa sekecil apapun buku ini tetap memberikan manfaat. Semoga buku ini bisa dipahami dengan baik oleh pembaca dan berguna untuk semua.

Akhir kata, guna menyempurnakan buku ini, kritik dan saran dari pembaca sangat penulis nantikan

Malang, Agustus 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
VEKTOR DAN SKALAR

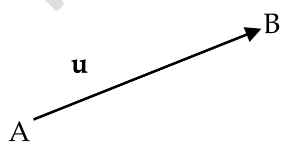
A. Pengertian Vektor dan Skalar

Besaran skalar adalah besaran yang memiliki besar (magnitude) saja, misalnya waktu, suhu, panjang, luas, volume, massa dan sebagainya, sedangkan besaran Vektor adalah besaran yang memiliki besar (magnitude) dan arah (direction), misalnya kecepatan, percepatan, gaya, momentum, momen, impuls, medan magnetik dan sebagainya.

B. Notasi Vektor

1. Ditulis dengan huruf kecil dicetak tebal.
   Misalkan : **a**,**b**,**c** . . .
2. Ditulis dengan huruf kecil yang diatasnya dibubuhi tanda panah.
   Misalkan : ā , ē . . . .
3. Vektor dapat dinyatakan dalam dua dimensi bahkan tiga dimensi atau lebih.
   Jika dinyatakan dalam dua demensi maka vektor satuan dinyatakan dalam I, dan j sedangkan untuk tiga dimensi maka vektor memiliki vektor satuan yang dinyatakan dalam i, j, dan k.

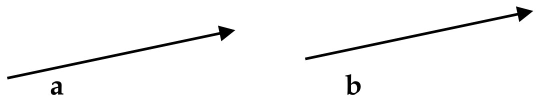
Bila **u** menyatakan garis berarah dari A ke B maka dituliskan lambang



(dibaca vektor AB mewakili vektor **u**, sedangkan AB adalah vektor yang pangkalnya A dan ujungnya B)

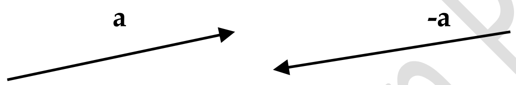
C. Operasi Vektor

1. Dua buah vektor disebut sama jika dan hanya jika panjang dan arah vektor sama



vektor **a** dan vektor **b** sama, artinya panjangnya sama dan arahnya sama.

Jika dua vektor mempunyai panjang sama , tetapi arah berbeda maka dua vektor tersebut tidak sama.



2. Perkalian Skalar dengan Vektor

Bila k adalah sebuah skalar maka perkalian dengan vektor **a** dinyatakan dengan *k* **a,** sebuah vektor yang searah dengan **a** dan panjangnya *k* kali panjang

ka
- k > 0, maka k**a** searah dengan **a**
- k > 0, maka ka berlawanan arah dengan a
- k = 1, maka ka = a
- k = 0, maka ka = 0 (vektor nol)

3. Sifat-sifat skalar dengan vektor

Untuk **a, b ,** dan **c** adalah vektor dan k adalah scalar berlaku**:**

a. Sifat komuitatif , **a** + **b** = **b** + **a**

b. Sifat Asosiatif, **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**

c. Sifat Distibutif : k(**a** + **b**) = k**a** + k**b**

d. Sifat invers : **a + (-a) = 0**

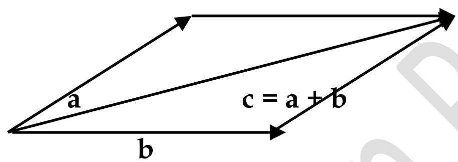
e. Identitas : **a + 0 = a**

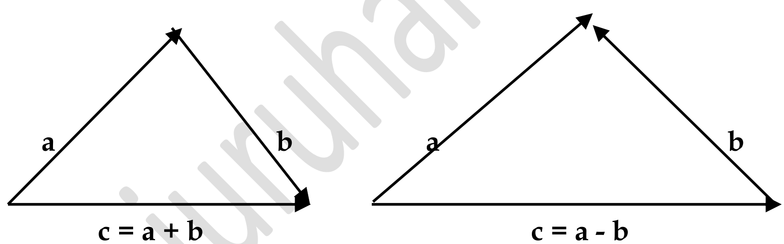
4. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Penjumlahan dua vektor dapat dilakukan dengan menggunakan metode segitiga (aturan cosinus, metode jajarangenjang (aturan cosinus), metode poligon dan metode penguraian vektor.

Pengurangan vektor sama dengan penjumlahan vektor dengan salah satu vektor negatif dari vektor semula.

untuk memudahkan dalam operasi geometri, bentuknya sebagai berikut : perhatikan arah anak panahnya



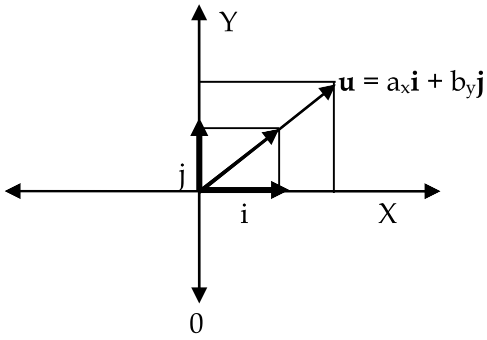


D. Vektor dalam demensi dua (R^2):

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu satuan dan arahnya sesuai dengan sumbu utama, yakni :

$\boldsymbol{i}$ adalah vektor satuan yang searah sumbu $\boldsymbol{x}$ (absis)

$\boldsymbol{j}$ adalah vektor satuan yang searah sumbu $\boldsymbol{y}$ (ordinat)



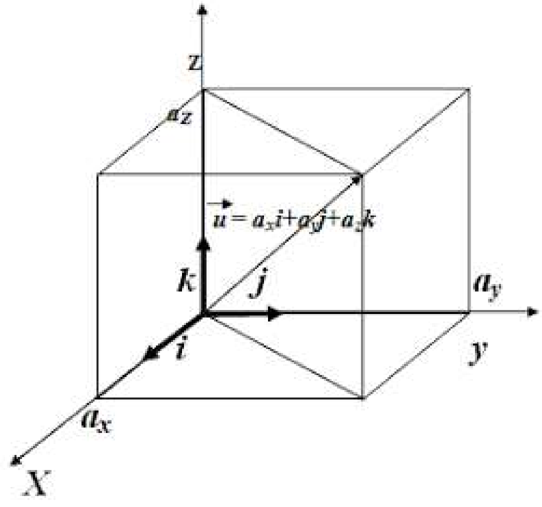
u = a_x**i** + b**j** , dengan a_x sebagai komponen sumbu x , dan a_y komponen arah sumbu dan sering ditulis dengan :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

E. Vektor dalam demensi Tiga (R³):

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu satuan dan arahnya sesuai dengan sumbu utama, yakni :

i adalah vektor satuan yang searah sumbu ***x*** (absis)
j adalah vektor satuan yang searah sumbu ***y*** (ordinat)
k adalah vektor satuan yang searah sumbu ***z*** (aplikat)



$\mathbf{u} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$,

dengan a_x sebagai komponen arah sumbu x, dan a_y komponen arah sumbu y dan a_z adalah komponen arah sumbu z.

Bentuk tulisan vektor

$\mathbf{u} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

dan lebih sering dituliskan dalam

$$u = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Panjang vektor (besar, nilai) dituliskan seperti tanda mutlak dalam aljabar

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$

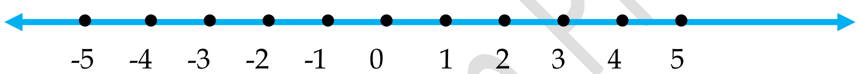
BAB II

DEMENSI SATU (R^1)

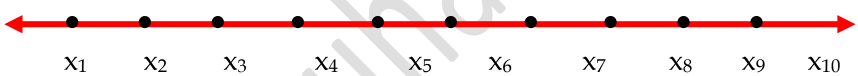
Sistem Koordinat Satu Demensi

Kita dapat menghubungkan elemen aljabar yaitu himpunan bilangan Real dengan elemen geometri yaitu titik-titik pada garis lurus. Hubungan itu disebut korespondensi satu-satu, artinya untuk setiap bilangan Real tertentu di hubungkan dengan titik tertentu pada suatu garis lurus .

Bentuk Koordinat satu demensi adalah sebagai berikut :



Jarak titik dalam koordinat satu demensi:



Jarak antara titik x_1 dan $x_2 = x_2 - x_1$, sedangkan jarak x_2 dan $x_{10} = x_{10} - x_2$, sedemikian sehingga jarak l tersebut selalu positip. Sehubungan dengan hal tersebut perlu didefinisikan harga mutlak (absulut) suatu bilangan Real. Harga mutlak dari sutu bilangan Real x didefinisikan sebagai :

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ jika } x > 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \\ 0, \text{ jika } x = 0 \end{cases}$$

Dengan demikian jarak antara x_1 dan x_2 adalah $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

BAB III
DEMENSI DUA (R^2)

A. Sistem Koordinat Demensi Dua (R^2)

Salah satu konsep yang penting dalam matematika adalah hubungan atau ketergantungan antara dua himpunan bilangan. Nilai kedua bilangan yang berhungan dapat dipandang sebagai pasangan bilangan. Sistem koordinat dua demensi menggunakan hubungan antara titik dengan pasangan bilangan.

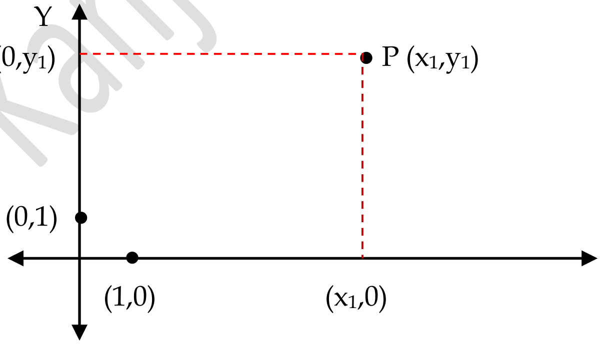
Untuk itu perlu kita perhatikan definisi produk Cartesian dari dua himpunan.

Secara simbolis produk Cartesian ditulis sebagai berikut :

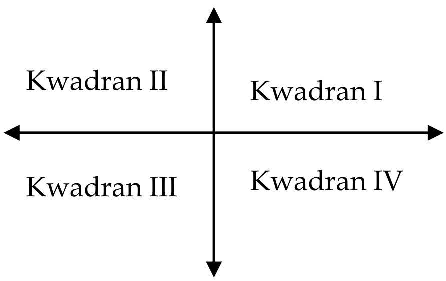
$R \times R = \{ (x,y) / x\varepsilon\ R \text{ dan } y\varepsilon\ R\}$

Sistim yang sering digunakan untuk menghubungkan tiap titik pada bidang datar dengan pasangan bilangan Real berurutan adalah Sistem Koordinat Cartesian tegak lurus. Nama Sistem Koordinat Cartesian sebagai penghargaan kepada penemu sistem tersebut , yaitu Rene Descartes tahun 1637.

Bentuk koordinat Cartesian dua demensi Adela sebagai berikut :



Kedua sumbu koordinat tersebut membagi bidang koordinat menjadi 4 bagian yang disebut dengan Kwadran. Adapun pembagiannya sebagai berikut :



Kwadran	Absis	Ordinat
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Contoh soal :

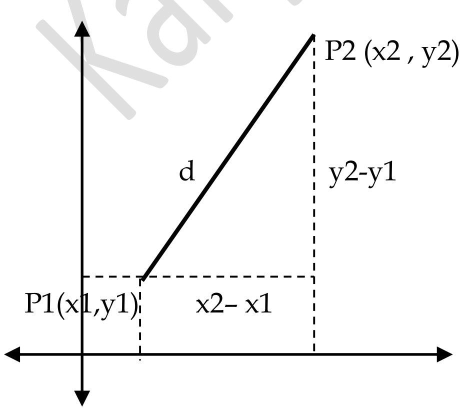
Tentukan titik-titik dibawah ini terletak di kwadran ke berapa ?

1. (-3, 7) 2. (4,-9) 3. (-3,-6) 4. (7,10)

Jawab :

1. (-3 , 7), terletak pada kwadran ke II, karena x < 0 dan y >0
2. (4,-9) , terletak pada kwadran ke VI, karena x >0 dan y <0
3. (-3,-6), terletak pada kwadran ke III, karena x<0 dan y <0
4. (7,10), terletak pada kwadran ke I, karena x >0 dan y >0

B. Jarak Antara Dua Titik Dalam Sistem Demensi Dua (R^2)



Jarak antara dua titik P1 (x1,y1) dan P2(x2,y2) dapat dilihat dari gambar disamping. Dengan menggunakan dalil Pythagoras, maka :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

atau

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Contoh :

Tentukan jarak antara dua titik berikut ini :

1. (-2,8) dan (7,-9)
2. (0,-1) dan (-9,8)
3. (-2,-3) dan (-4,-5)

Jawab :

1. (-2,8) dan (7,-9)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{atau} \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d = \sqrt{(7-(-2))^2 + (-9-8)^2} \qquad d = \sqrt{(-2-(7))^2 + (8-(-9))^2}$$

$$d = \sqrt{81+289} = \sqrt{370} = 19{,}24 \qquad d = \sqrt{81+289} = \sqrt{370} = 19{,}24$$

2. (0,-1) dan (-9,8)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{atau} \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-(-9))^2 + (-1-(8))^2} \qquad d = \sqrt{(-9-(0))^2 + (8-(-1))^2}$$

$$d = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = 12{,}73 \qquad d = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = 12{,}73$$

3. (-2,-3) dan (-4,-5)

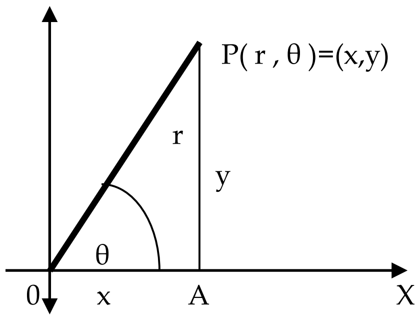
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{atau} \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4-(-2))^2 + (-5-(-3))^2} \qquad d = \sqrt{(-2-(-4))^2 + (-3-(-5))^2}$$

$$d = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2{,}83 \qquad d = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 12{,}73$$

C. Sistem Koordinat Polar (Kutub)

Dalam sistem ini kita mempunyai titik tetap yang disebut sebagai Pole (kutub), dan garis berarah horisontal (0A) yang disebut sebagai Sumbu Polar (sumbu kutub)



Perhatikan gambar disamping:
Koordinat polar dari sembarang titik P pada bidang datar ditulis P(r,θ) dimana r adalah jarak OP dan θ Adela sudut AOP.Sudut θ positip jika diukur dari OA ke OP berlawanan arah jarum jam, dan sudut θ negatip jika diukur dari OA ke OP searah jarum jam

Hubungan koordinat cartesian dan koordinat kutub:
Dari gambar diatas terlihat bahwa :
Titik P mempunyaai koordinat (x,y) dalam sistem koordinat Cartesian dan (r,θ) dalam koordinat polar (kutub).
Dari gambar tersebut , kita bisa menentukan :

Sin θ = $\frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r.\sin\theta$ dan Cos θ = $\frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r.\cos\theta$

Sedangkan : r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Contoh :
1. Nyatakan titik berikut ini dalam koordinat kutub :
   a. P (-2 , 2)
   b. Q (-$\sqrt{3}$, -1)
2. Nyatakan dalam koordinat cartesian
   a. R (5, 45^o)
   b. S (9 , 135^o)

Jawab :
1. a. P (-2 , 2)
   x = -2 dan y = 2 (titik berada di kuadran II)
   r = $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   tg α = $\frac{y}{x} = \frac{2}{-1} = -2 \Leftrightarrow \alpha = arc.tg\ (-2) = 135^o$
   Jadi P (2$\sqrt{2}$, 135^o)

b. Q ($-\sqrt{3}$,- 1)

$x = -\sqrt{3}$ dan y = -1 (titik berada di kuadran III)

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$tg\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = arc.tg\ (\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 210^o$

Jadi P (2,210^o)

2. a. R (5, 45^o)

r = 5 dan $\alpha = 45^o$

maka : $x = r \cos \alpha = 5 \cos 45^o = 5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$y = r \sin \alpha = 5 \sin 45^o = 5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Jadi R ($\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}$)

b. S (9 , 135^o)

r = 9 dan $\alpha = 135^o$

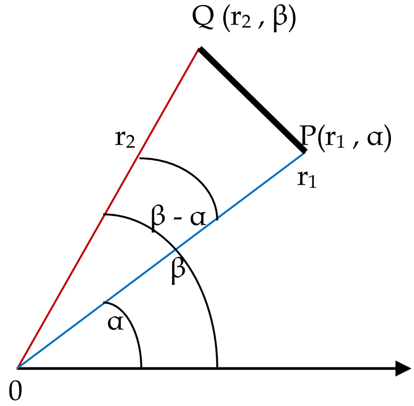
maka : $x = r \cos \alpha = 9 \cos 135^o = 9 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{9}{2}\sqrt{2}$

$y = r \sin \alpha = 9 \sin 135^o = 9 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$

Jadi R ($-\frac{9}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{2}\sqrt{2}$)

D. Jarak Antara Dua Titik Pada Sistem Koordinat Polar

Jarak P(r_1 , α) dan Q (r_2 , β) dapat ditentukan sebagai berikut:



Perhatikan gambar disamping:
Dengan menggunakan Rumus Cosinus:

Jarak PQ = $\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha - \beta)}$

Contoh :

Tentukan jarak titik P(3, 30°) dan titik Q(7,60°) ?

Jawab :

Jarak PQ = $\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2.3.7\cos(60-30)^0}$

$= \sqrt{3^2 + 7^2 - 2.3.7\cos(60-30)^0} = \sqrt{9 + 49 - 42Cos30^0}$

$= \sqrt{58 - 21\sqrt{3}} = \sqrt{58 - 36{,}37} = \sqrt{21{,}63} = 4{,}65$

SOAL LATIHAN

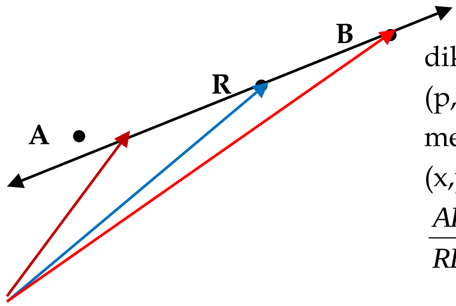
1. Tentukan letak titik-titik : A(3), B(-5), C(6), dan (-3) dalam system koordinat satu demensi ?
2. Tentukan letak titik-titik yang koordinatnya memenuhi :
   x| = 2 , |x- - 1| = 3 , |1 - x| = 2, dan |2 + x| = 2
3. Tentukan lokasi titik-titik yang koordinatnya memenuhi ketidaksamaan dibawah ini :
   a. x > 2
   b. x – 3 < 0
   c. x^2-8x+15 ≤ 0

d. $\dfrac{2-x}{x-1} > 0$

4. Tentukan jarak antara titik-titik dibawah ini :
   a. A(-1) dan B(5)   c. P(-4) dan Q(-7)
   b. R(9) dan S(-6)   d. M(7) dan N(4)
5. Selidiki secara geometris letak titik-titik yang koordinatnya memenuhi ketidaksmaan dibawah ini :
   a. $|x| < 1$ b. $|x-5| \leq 1$ c. $|x+3| \geq 2$
6. Teletak di kwadran berapa titik berikut ini :
   a. A(2,3)   b. B(2,-5)
   c. C(-2,4)   d. D(-2,-3)
7. Tentukan absis dan ordinat dari titi-titik berikut ini :
   a. A(2,3)   b. B(2,-5)
   c. C(-2,4)   d. D(-2,-3)
8. Gambarlah dalam koordinat Cartesian demensi dua, titik dibawah ini :
   a. P(3,45°)   b. Q(5,90°)
   c. R(4,60°)   d. S(2,330°)
9. Tentukan jarak antara titik-titik berikut ini :
   a. M(3,45°) dan Q(5,90°)   b. R(4,60°) dan S(2,330°)
   c. Q(5,90°) dan S(2,330°)   d. P(3,45°) dan R(4,60°)
10. Nyatakan dalam koordinat kutub titik berikut ini :
    a. A(2,3)   b. B(2,-5)
    c. C(-2,4)   d. D(-2,-3)
11. Nyatakan dalam koordinat Cartesian titik berikut ini :
    a. P(3,45°)   b. Q(5,90°)
    c. R(4,60°)   d. S(2,330°)

E. Pembagian Segmen Garis Dalam Perbandingan Tertentu

Perhatikan gambar dibawah ini :



diketahui koordinat titik A (p,q) dan B (r,s), kita bisa mencari koordinat titik R (x,y), jika perbandingan $\frac{AR}{RB} = \frac{m}{n}$

Dengan cara operasi pada vektor ,

$$\vec{0A} + \vec{AR} = \vec{0R} \Leftrightarrow \vec{AR} = \vec{0R} - \vec{0A} \text{ dan } \vec{0R} + \vec{RB} = \vec{0B} \Leftrightarrow \vec{RB} = \vec{0B} - \vec{0R}$$

$$\vec{OA} = (p-0)i + (q-0)j = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \vec{AR} = (x-p)i + (y-q)j = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

$$\vec{OR} = (x-0)i + (y-0)j = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{RB} = (r-x)i + (s-y)j = \begin{pmatrix} r-x \\ s-y \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} = (r-0)i + (s-0)j = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\vec{AR} = \vec{0R} - \vec{0A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{RB} = \vec{0B} - \vec{0R} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-x \\ s-y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \vec{AR} = \frac{m}{n}\vec{RB} \Leftrightarrow n\,\vec{AR} = m\,\vec{RB}$$

$$n \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} r-x \\ s-y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} nx-np \\ ny-nq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mr-mx \\ ms-my \end{pmatrix}$$

$$nx - np = mr - mx \Leftrightarrow (n+m)x = np+mr \Leftrightarrow x = \frac{np+mr}{n+m}$$

$$ny - nq = ms - my \Leftrightarrow (n+m)y = nq+ms \Leftrightarrow y = \frac{nq+ms}{n+m}$$

Jadi koordinat R $= \left(\dfrac{np+mr}{n+m}, \dfrac{nq+ms}{n+m}\right)$

Contoh :

Diketahui titik P(-2,7) dan titik Q(5,2). Titik R terletak diantara titik P dan titik Q sehingga : $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{3}{7}$ Tentukan koordinat titik R ?

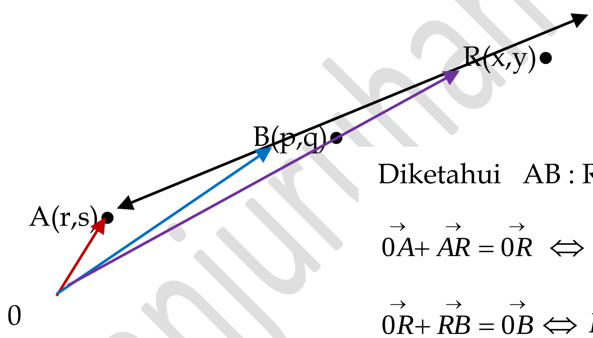
Jawab :

Dari soal diketahui : m = 3 , n = 7 , p = -2 , q = 7 , r = 5 , dan s= 2

Jadi koordinat titik R = $\left(\dfrac{np+mr}{n+m}, \dfrac{nq+ms}{n+m}\right) = \left(\dfrac{7.(-2)+3.2}{7+3}, \dfrac{7.7+3.2}{n+m}\right) =$

$\left(\dfrac{-8}{10}, \dfrac{55}{10}\right)$

Bagaimana jika m terletak diperpanjangan garis AB atau garis BA ?



Diketahui AB : RB = m : n

$\vec{0A} + \vec{AR} = \vec{0R} \Leftrightarrow \vec{AR} = \vec{0R} - \vec{OA}$

$\vec{0R} + \vec{RB} = \vec{0B} \Leftrightarrow \vec{RB} = \vec{0B} - \vec{OR}$

$$\vec{AR} = \vec{0R} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r-0 \\ s-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-r \\ y-s \end{pmatrix}$$

$$\vec{RB} = \vec{0B} - \vec{OR} \Leftrightarrow \vec{RB} = \begin{pmatrix} p-0 \\ q-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-x \\ q-y \end{pmatrix}$$

Karena : $\dfrac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow n\,\vec{AR} = m\,\vec{RB} \Leftrightarrow$ n$\begin{pmatrix} x-r \\ y-s \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} p-x \\ q-y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} nx - nr \\ ny - ns \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mp - mx \\ mq - my \end{pmatrix}$$

Sehingga :

nx – nr = mp - mx $\Leftrightarrow$ (n+m)x = (mp+nr) $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{mp+nr}{n+m}$

ny – ns = mq – my $\Leftrightarrow$ (n+m)y = mq+ns $\Leftrightarrow$ y = $\dfrac{mq+ns}{n+m}$

Jadi Koordinat R = $\left(\dfrac{mp+nr}{n+m}, \dfrac{mq+ns}{n+m}\right)$

Contoh :

Diketahui titik A (-2,-3) dan titik B (4,5). Pada perpanjangan AB terdapat titik R sedemikian rupa sehingga AR : RB = 8 : 3. Tentukan koordinat titik R ?

Jawab :

Diketahui : p = -2, q = -3 , r = 4, s = 5 , m = 8 dan n = 3

Tentukan koordinat titik R ?

Koordinat R = $\left(\dfrac{mp+nr}{n+m}, \dfrac{mq+ns}{n+m}\right) = \left(\dfrac{8(-2)+3.4}{3+8}, \dfrac{8(-3)+3.5}{3+8}\right) = \left(\dfrac{-4}{11}, \dfrac{-9}{11}\right)$

SOAL LATIHAN

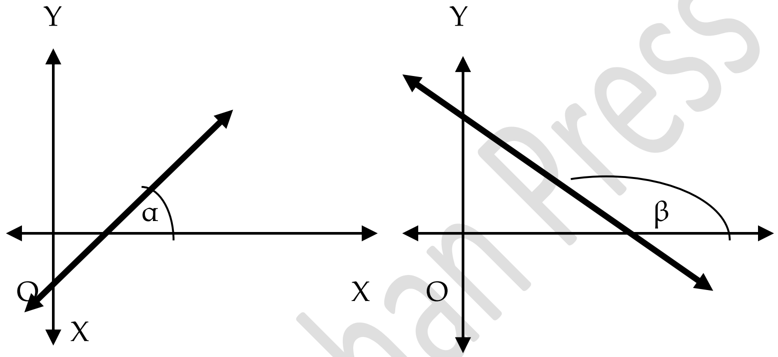
1. Diketahui titik P (-9,7) dan Q (5,2).
   Tentukan :
   a. Titik tengah ruas garis PQ ?
   b. Titik R di antara PQ sehingga PR : RQ = 7 : 5 ?
   c. Titik R diperpanjangan garis PQ sehingga PR : RQ = 15 : 5 ?
   d. Titik R diperpanjangan garis QP sehingga QR : RP = 11 : 7 ?
2. Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut A (-1,2) , B(2,7), dan C(5,-1)
   Tentukan :
   a. Titik tengah sisi-sisinya ?
   b. Titik pusat segitiga tersebut ?

BAB IV

GRADIEN (KOEFISIEN ARAH) DAN KESAMAAN GARIS LURUS

A. Gradien (Koefisien Arah) Garis Lurus

Perhatikan gambar berikut ini :



Sudut α adalah sudut lancip yang dibentuk oleh sumbu x positip dan garis tersebut. A disebut sudut inklinasi garis tersebut.

Besar sudut inklinasi sebuah garis lurus = $\alpha \pm k.\pi$, untuk k = 0 , 1 , 2 , 3 , . . .

Dalam hal garis sejajar dengan sumbu x, sudut inklinasi = 0.

Sudut inklinasi diambil dari sudut yang terkecil dari α.

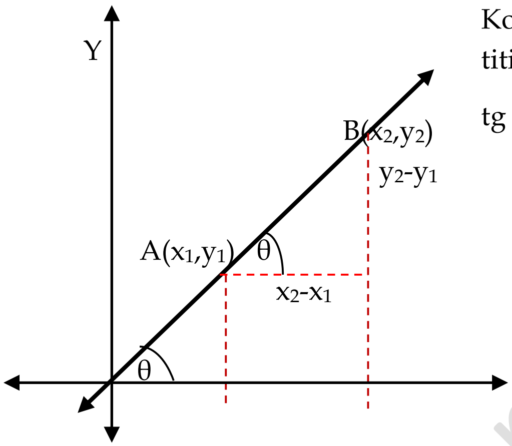
Definisi : Tangen sudut inklinasi suatu garis lurus disebut Koefeisien arah garis lurus tersebut .

Dengan menyatakan koefisien arah dengan huruf m, definisi diatas dapat ditulis secara simbolis :

$m = tg\ \alpha$

Jika $\alpha = 0$,maka $m = 0$, ini berarti koefisien arah garis lurus yang sejajar dengan sumbu X sama dengan nol.

Jika α = $\frac{\pi}{2}$, maka m = tg α tidak mempunyai arti aritmatika (tidak diwakili oleh bilangan), artinya koefisien arah garis lurus tersebut gagal adanya .



Koefisien arah garis lurus melalui titik $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ adalah :

tg θ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ atau tg θ= $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Contoh :

Tentukan Gradien (koefisien arah) garis lurus yang melalui titik-titik berikut ini:

1. A(-3 , 7) dan B (9 , 0)
2. M(-4 , -8) dan N (10 , -3)

Jawab :

1. m = tg θ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-7}{9-(-3)} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12}$

   atau :

   m = tg θ = $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{7-0}{-3-9} = \frac{7}{-12} = -\frac{7}{12}$

2. m = tg θ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-8)}{10-(-4)} = \frac{5}{14}$

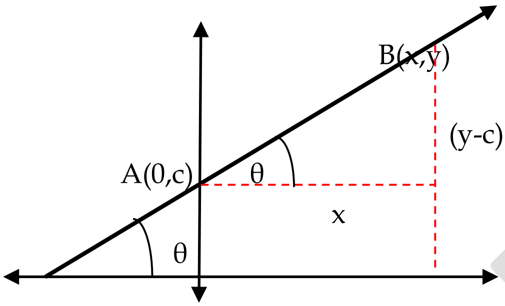
   atau :

   m = tg θ = $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-8-(-3)}{-4-10} = \frac{-5}{-14} = \frac{5}{14}$

B. Persamaan Slope/koefisien Ruas Garis Lurus

1. Persamaan Garis Lurus yang melalui titik (x,y) dan mempunyai gradien = m

Perhatikan gambar berikut ini :



Dari gambar disamping :

$$m = \text{tg}\ \theta = \frac{y-c}{x}$$

$$xm = y - c$$

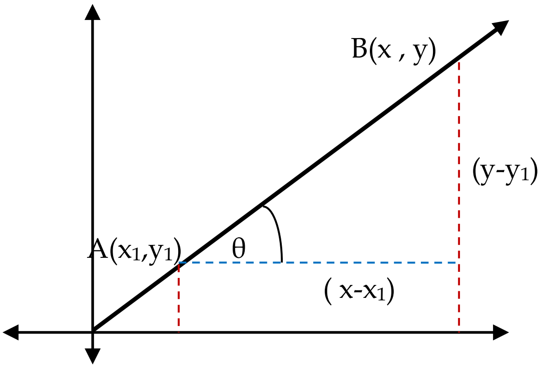
$$y = mx - c \text{................}(1)$$

Inilah persamaan umum garis yang mempunyai gradien = m dan melelui titik (x , y)

Contoh 1 :
Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-9,6) dan memiliki gradien = -7 ?

Jawab :
y = mx + c
karena gradien m = -7, maka persmaan garis ;
y = -7 x + c
dan melalui (-9 , 6), maka :
6 = -7(-9) + c
c =- 63 + 6 =- 57
jadi persaman garis tersebut :
y = -7x - 57

Dapat pula dicari dengan cara berikut :



Dari gambar disamping :

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

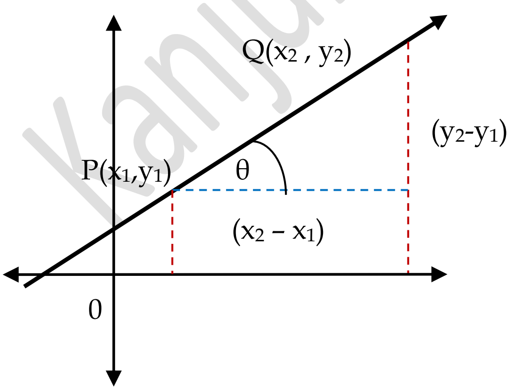
$$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

………………(2)

Dengan menggunakan rumus (2) , kita dapat menyelesaikan contoh soal diatas.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 6 = -7(x - (-9))$$
$$y = -7(x + 9) + 6$$
$$y = -7x - 63 + 6$$
$$y = -7x - 57$$

2. ***Persamaan Garis Yang Melalui Dua Buah Titik***



Gardien garis disamping adalah :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sehingga rumus (2), menjadi:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \textit{atau}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{..........(3)}$$

Contoh :

Tentukan persmaan garis yang melalui :

a. Titik pusat dan titik (-9, 6) ?
b. Titik (-2,6) dan (7,-5) ?

Jawab :

a. m = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-0}{-9-0} = -\dfrac{6}{9}$

Jadi persamaan garis tersebut :

$$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 0 = -\frac{6}{9}(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{6}{9}x$$

b. m = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-5-6}{7-(-2)} = -\dfrac{11}{9}$

Jadi persamaan garis tersebut :

$$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 6 = -\frac{11}{9}(x - (-2)) -$$

$$\Leftrightarrow y - 6 = -\frac{11}{9}x - \frac{22}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9y - 54 = -11x - 22$$

$$\Leftrightarrow 11x + 9y = -32$$

3. Cara mencari persamaan garis lurus yang melalui dua titik dengan deter minan matrik:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

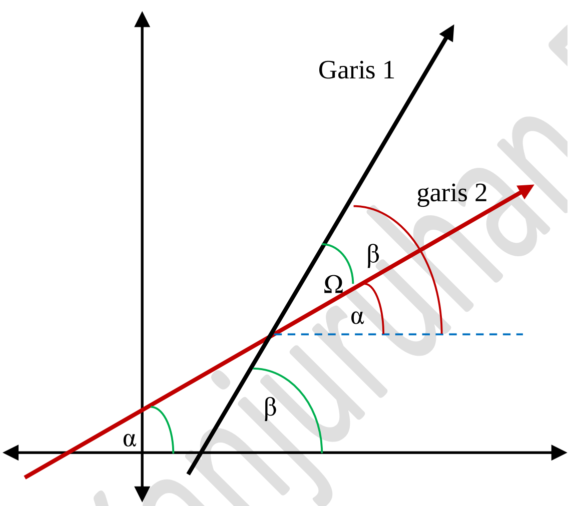
Contoh :

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (-9,7) dan (8,2)?

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -9 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ -9 & 7 & 1 & -9 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 7x + 8y - 18 - (56 + 2x - 9y) = 5x + 17y - 74$

C. Sudut Antara Dua Garis Lurus



Dari gambar disamping :

Gradien garis 1 = tg β = m_1

Gradien garis 2 = tgα = m_2

Sudut antara garis 1 dan garis 2= Ω

Ω = β - α

Tg Ω = tg (β - α)=

$$\frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha . tg\,\beta}$$

Atau

Tg (β-α)= $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$

Karena yang diambil sudut lancip, maka:

Tg Ω = $\left| \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1} \right|$

Catatan :

1. Jika dua garis sejajar, maka Ω = 0^o

   Sehingga :

   Tg Ω = $\left| \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1} \right| \Leftrightarrow 0 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \Leftrightarrow m_2 - m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2 = m_1$

   Jadi syarat dua garis sejajar :

   $m_2 = m_1$

2. Jika dua garis saling tegak lurus, maka $\Omega = 90^o$
   Sehingga :

$$\text{Tg } \Omega = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1} \right| \Leftrightarrow \infty = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

   Hal ini hanya mungkin jika penyebutnya = 0
   $1 + m_2 . m_1 = 0$
   $m_2 . m_1 = -1$
   Jadi syarat dua garis saling tegak lurus :
   $m_2 . m_1 = -1$

Contoh :

Tentukan sudut antara garis: $y = -\frac{1}{7}x + 2 \;\; dan \;\; y = \frac{3}{4}x + 3$?

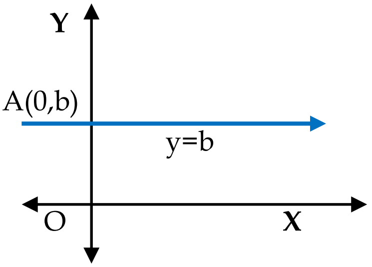
Jawab :

$m_1 = -\frac{1}{7}$ dan $m_2 = \frac{3}{4}$

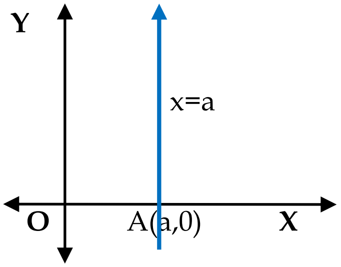
$$tg \;\; \Omega = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1} \right| \Leftrightarrow tg \;\; \Omega = \left| \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4} . (-\frac{1}{7})} \right| = \left| \frac{-4 - 21}{28 - 3} \right| = 1$$

$\text{Tg } \Omega = 1$
$\Omega = 45^o$
Jadi sudut antara dua garis tersebut adalah = 45^o

D. Garis lurus sebagai kurva derajat satu



(gambar : 1)



(gambar : 2)

Bentuk umum garis lurus

Bentuk umum garsi lurus sebagai kurva derejat satu adalah :

Ax + By + C = 0

1. Jika A = 0

   Maka By + C = 0

   $$y = \frac{-C}{B}$$

   Grafik sejajar dengan sumbu x, dan melalui titik (0, -C/B)

   Grafiknya terlihat pada gambar 1 diatas .

2. Jika B = 0

   Maka Ax + C = 0

   $$x = \frac{-C}{A}$$

   Grafiknya sejajar dengan sumbu y, dan melalui titik (-C/A, 0)

   Grafiknya terlihat pada gambar 2 diatas.

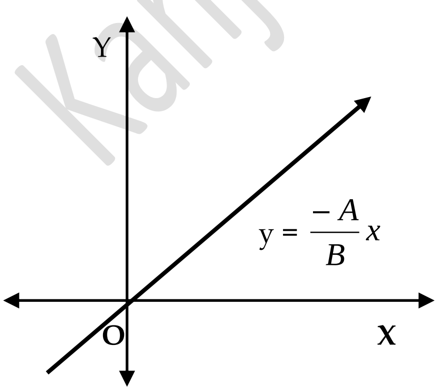
3. Jika C = 0

   Maka persamaan garis :

   Ax + By = 0

   $$y = \frac{-A}{B}x$$

   Grafik melalui titik O (0,0)



Catatan :

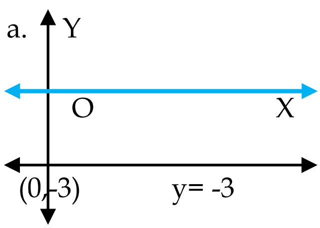
Jika m = $\frac{-A}{B} > 0$, maka grafik miring ke kanan

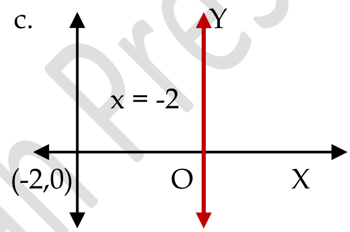
Jika m = $\frac{-A}{B} < 0$, maka grafik miring ke kiri

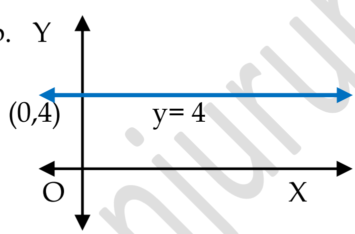
Contoh :

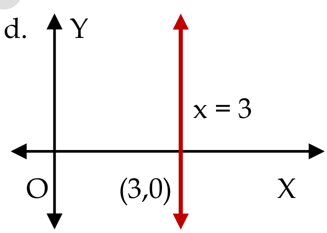
1. Gambarlah grafik dari :
    a. $y = -3$
    b. $y = 4$
    c. $x = -2$
    d. $x = 3$
    e. $y = 2x$
    f. $x + 3y = -1$
2. Tentukan Gradien dari garis soal no. 1 diatas ?

Jawab :

1. a.


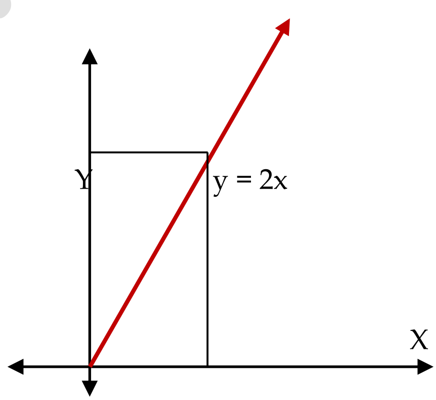
c.


b.


d.


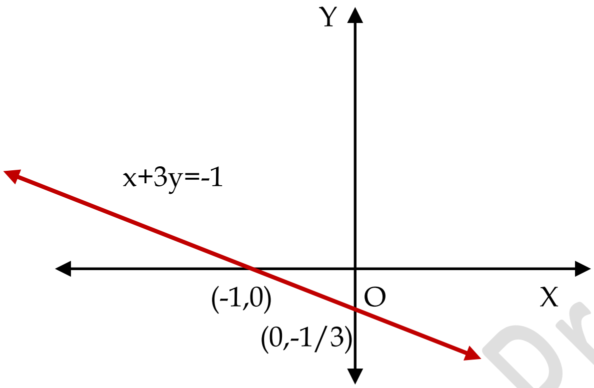
e. $y = 2x$

x	0	3
y	0	6



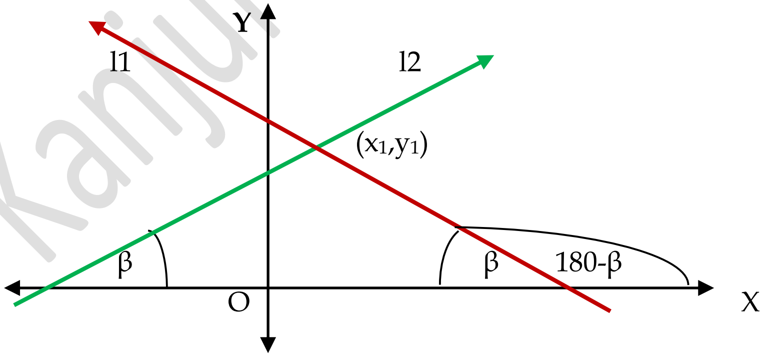
f. $x + 3y = -1$

x	0	-1
y	-1/3	0



E. Persamaan garis yang membentuk sudu β dengan sumbu x dan sumbu y dan melalui titik (x_1, y_1)

1. Yang membentuk sudut β dengan sumbu x

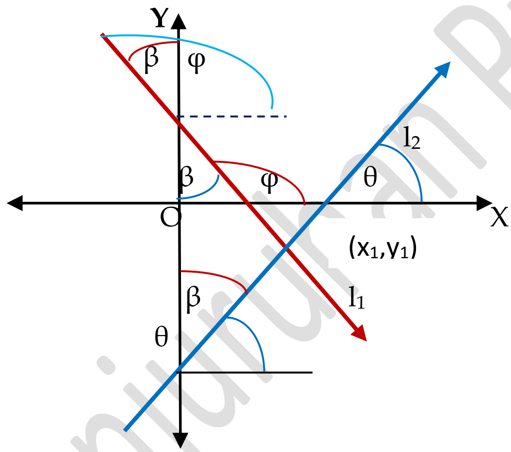


Perhatikan garis l1 :
$m = tg\ \beta$, dan melalui titik (x_1 , y_1) maka:
persamaan garis l1 :
$y - y_1 = tg\ \beta\ (x - x_1)$............(1)

Persaman garis l2 :
$m = tg\,(180\text{-}\beta\,) = -\,tg\,\beta$ dan melalui $(x_1\,,\,y_1)$
$y\text{-}y_1 = \text{-}tg\,\beta\,(x - x_1)$............(2)

Jika persamaan (1) dan (2) digabung, maka :
Persamaan garis yang membentuk sudut β dan melalui $(x_1\,,\,y_1)$ adalah :
$\mathbf{y\text{-}y_1 = \pm tg\,\beta\,(x - x_1)}$

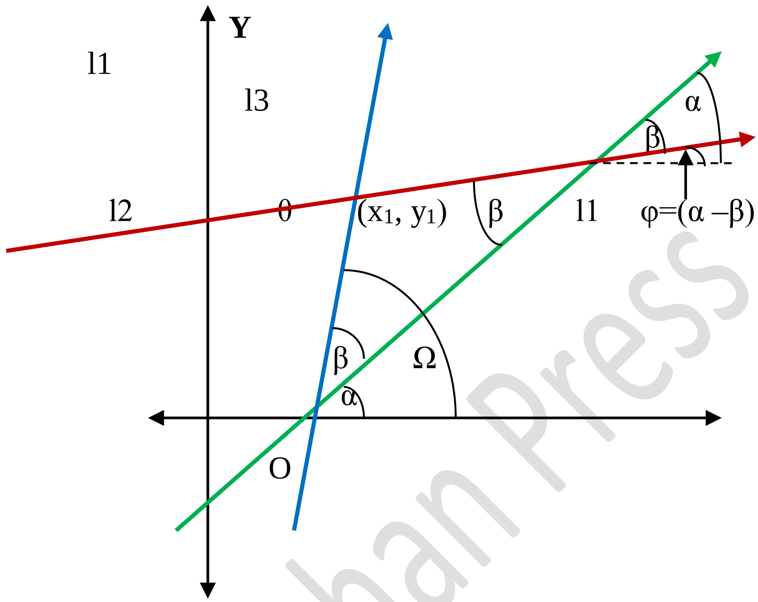
2. Persamaan garis lurus yang membentuk sudut β terhadap sumbu y



Persamaan garis l_2 :
$m_2 = tg\,\theta = tg(90^o\text{-}\beta) = ctg\,\beta$, dan melalui (x_1,y_1)

$y\text{-}y_1 = ctg\,\beta\,(x - x_1)$............(1)
Persamaan garis l_1:
$m_1 = tg(90^o\text{-}\beta) = \text{-}ctg\,\beta$
$y\text{-}y_1 = \text{-}ctg\,\beta\,(x - x_1)$...........(2)
Jika (1) dan (2) digabung, maka persmaan garis yang membentuk sudut β terhadap sumbu y adalah :
$\mathbf{y\text{-}y_1 = \pm\,ctg\,\beta\,(x - x_1)}$

3. Persamaan garis lurus yang membantuk sudut β dengan garis lain yang berpotongan dan melalui titik (x_1 , y_1)



Persamaan garis l1, misalkan mempunyai gradien m_1= tg α
Gradien garis l3= m3 = tg Ω =tg(α - β)
gradien garis l3 = m3=
tg φ = tg (α + β)

Jadi Persamaan garis l3 :
$\mathbf{y-y_1 = tg(\alpha - \beta)(x-x_1)}$

dan persamaan garis l2 :
$\mathbf{y-y_1 = tg\ (\alpha + \beta)(x-x_1)}$

Contoh 1 :
Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-3 , 4) dan :

a. Sejajar dengan sumbu x ?
b. Sejajar dengan sumbu y ?
c. Mempunyai gradien = -3 ?
d. Membentuk sudut 30^o terhadap sumbu x ?
e. Membentuk sudut 45^o terhadap sumbu y ?
f. Membentuk sudut 45^o terhadap garis 2x – y = 8 ?

Jawab :

a. Absis dari titik (-3 , 4) adalah x = -3.
   Jadi garis yang dimaksud adalah x = -3
b. Ordinat dari titik (-3 , 4) adalah y = 4.
   Jadi garis yang dimaksud adalah y = 4
c. Garis lurus yang melalui titik (-3 , 4) dan mempunyai gradien = -3:
   $y - y_1 = m(x - x_1)$
   $y - 4 = -3(x - (-3))$
   $y - 4 = -3x - 9$
   $y = -3x - 5$
d. Garis lurus yang membentuk sudut 30^o terhadap sumbu x :
   Gradien = m = tg β = tg 30^o = $\frac{1}{\sqrt{3}}$
   Sehingga garis tersebut adalah :
   $y - y_1 = \pm \text{tg}\ \beta\ (x - x_1)$
   $y - 4 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (x - (-3))$
   $\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = \pm(x + 3)$
e. Garis lurus yang membentuk sudut 45^o terhadap sumbu y :
   Gradien = m = ctg β = ctg 45^o = 1
   Sehingga garis tersebut adalah :
   $y - y_1 = \pm \text{ctg}\ \beta\ (x - x_1)$
   $y - 4 = \pm 1\ (x + 3)$
   $y - 4 = \pm(x + 3)$
f. Garis lurus yang membentuk sudut 45o terhadap garis 2x – y = 8 :
   tg 45^o = 1
   $2x - y = 8$
   $y = 2x - 8$
   Jadi m_1 = tg α = 2

Garis l3 :

tg (α - β) = $\dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha . tg\beta} = \dfrac{2-1}{1+2.1} = \dfrac{1}{3}$

y- y_1 = tg(α - β)(x-x_1)

y – 4 = $\dfrac{1}{3}(x+3)$

3y – 12 = x + 3

x – 3y +15 = 0

Garis l2

tg (α + β) = $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta} = \dfrac{2+1}{1-2.1} = \dfrac{3}{-1} = -3$

Jadi persaman l2 :

y – y1 = tg(α + β) (x – x1)

y - 4 = -3 (x + 3)

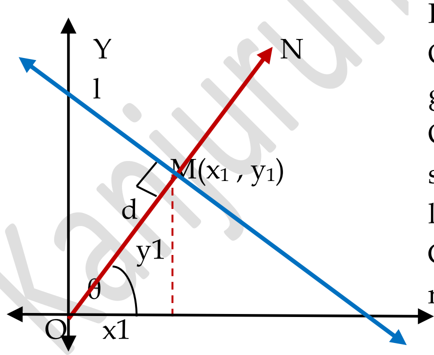
3x + y - 5 = 0

SOAL LATIHAN

1. Tentukan persmaan garis lurus yang :
   a. Melalui titik (9,-3) dan sejajar sumbu x?
   b. Melalui titik (-8,9) dan sejajar sumbu x ?
   c. Melalui titik (4,-3) dan sejajar sumbu y ?
   d. Melalui tiitk (-3, 5) dan sejajar sumbu y ?
   e. Melalui titik (-9,2) dan mempunyai gradien = 7 ?
   f. Melalui titik (0,0) dan mempunyai gradien = -5 ?
   g. Melalui titik (3,4) dan membentuk sudut 60^o terhadap sumbu x ?
   h. Melalui titik (-4,-2) dan membentuk sudut 30^o terhadap sumbu x ?
   i. Melalui titik (3,4) dan membentuk sudut 60^o terhadap sumbu y ?
   j. Melalui titik (-4,-2) dan membentuk sudut 30^o terhadap sumbu y?
   k. Melalui titik (0,9) dan membentuk sudut 30^o terhadap garis -3x-y =3 ?
   l. Melalui titik (-1,9) dan membentuk sudut 30^o terhadap garis y = 5x ?

2. Tentukan persamaan garis lurus yang :
   a. Melalui titik potong garis x – 2y = 8 dan 2x + 3y = 23 dan mempunyai gradien = -4 ?
   b. Melalui titik potong garis 3x – y = 8 dan sumbu y, dan mempunyai gradien = 2 ?
   c. Melalui titik potong garis 3x – y = 3 dan sumbu x, dan mempunyai gradien = -2 ?
   d. Melalui titik potong garis 3x – y = 8 dan x – 5y = -7, dan membentuk sudut 30° terhadap sumbu x ?
   e. Melalui titik potong garis x + 4y = 9 dan 5x – 2y = 1 , dan membentuk sudut 60° terhadap garis 6x + y = -1 ?
   f. Melalui titik potong garis 3x - 4y = 2 dan 5x – 2y = 8 , dan membentuk sejajar dengan garis 6x + y = -1 ?
   g. Melalui titik potong garis 4x + 2y = 10 dan 5x – y = 9 , dan membentuk tegak lurus dengan garis 6x + y = -1 ?

F. Persamaan Normal Hesse



Perhatikan gambar disamping :
OM = d adalah jarak titik O ke garis l .
Θ adalah sudut antara OM dan sumbu x positip. Dan OM tegak lurus dengan garis l.
Garis ON disebut dengan garis normal dari garis l tersebut

Koefisien arah garis normal = tg θ.
Karena garis ON tegak lurus dengan garis l , maka koefisien arah dari garis l

adalah = - $\dfrac{1}{tg\,\theta}$

jadi persamaan garis l adalah : y – y1 = - $\frac{1}{tg\,\theta}$ (x – x1)………..(1)

Dari gambar diatas:

sin θ = $\frac{y_1}{d} \Leftrightarrow y_1 = d.\sin\ \ \theta$

cos θ = $\frac{x_1}{d} \Leftrightarrow x_1 = d.\cos\ \ \theta$

sehingga persamaan (1), manjadi :

$$y - y1 = -\frac{1}{tg\,\theta}(x - x1)$$

y – d.sin θ = - $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$

y.sin θ – d. sin²θ = -x cos θ + cos²θ

x cos θ + y sin θ = d(cos2θ + sin2θ)

x cos θ + y sin θ – d = 0 …………………………..(2)

Persamaan (2), disebut dengan persamaan normal Hesse.

Contoh :

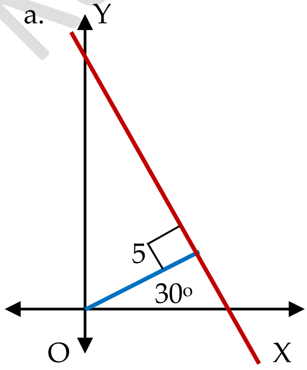
Lukislah garis-garis dan tulis persamaan normal Hesse jika diketahui :

a. d = 5 , dan θ = 30° ?

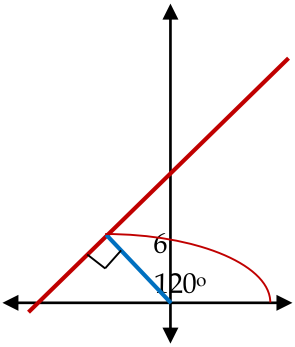
b. d = 6 , dan θ = 120° ?

Jawab :

a.



b.



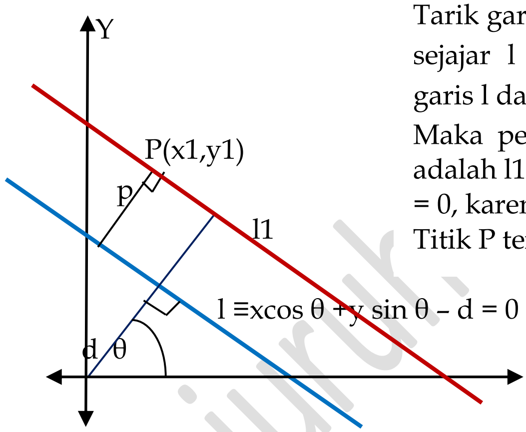
Persamaan normal Hesse garis-garis diatas adalah :

a. $x \cos 30^o + y \sin 30^o - 5 = 0$ atau $\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$

b. $x \cos 120^o + y \sin 120^o - 6 = 0$ atau $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 6 = 0$

G. Jarak sebuah titik ke garis lurus

Untuk menemukan jarak antara titik P (x1 , y1) dengan garis $l \equiv x \cos \theta + y \sin \theta - d = 0$ adalah sebagai berikut (lihat gambar dibawah ini) :



Tarik garis l1 melalui titik P (x1,y1) sejajar l . Nyatakan jarak antara garis l dan titik P dengan p.

Maka peresamaan normal dari l1 adalah $l1 \equiv x \cos \theta + y \sin \theta - (d+p) = 0$, karena l1 // l .

Titik P terletak pada l1, maka:

$x1 \cos \theta + y1 \sin \theta - (d+p) = 0$

$p = x1 \cos \theta + y1 \sin \theta - d$ ……………………………….(1)

Rumus (1) adalah rumus jaran titip P (x1 , y1) terhadap garis l

H. Pernyataan persamaan umum garis lurus dalam bentuk persamaan normal

Ambilah $Ax + By + C = 0$ dan $x \cos \theta + y \sin \theta - d = 0$ masing-masing sebagai persamaan umum dan persamaan normal Hesse dari suatu garis lurus sembarang. Karena kedua persamaan ini mewakili satu garis lurus maka keduanya ekwivalen, akibatnya :

$$\frac{\cos\theta}{A} = \frac{\sin\theta}{B} = \frac{-d}{C} = k$$

$\Leftrightarrow kA = Cos\theta \;, kB = Sin\theta, \;\; dan \;\; kC = -d$................................(1)

Untuk memperoleh harga k, kita kwaderatkan dan tambahkan kedua persamaan pertama dari (1), maka :

$$(kA)^2 + (kB)^2 = Cos^2\theta + Sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow k^2(A^2 + B^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Jadi Cos θ = $\dfrac{A}{k} = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ dan Sin θ = $\dfrac{B}{k} = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, serta:

-d $= kC = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$

Jika Ax + By + C dikalikan k, maka:

K (Ax + By + C) =

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By + C) \equiv x\cos\theta + y\sin\theta - d = 0$$

berarti :

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By + C) = 0 \text{ ....(2)}$$

Persamaan ini merupakan persamaan normal garis lurus .

Jarak antara garis (2) dan titik P (x1,y1) adalah :

p = $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax_1 + By_1 + C)$

Rumus ini merupakan rumus jarak titik P(x1,y1) dan garis Ax + By + C = 0

Contoh :

Tentukan Jarak titik P(-3 , 9) dengan garis 4x – 7y + 7 = 0

Jawab :

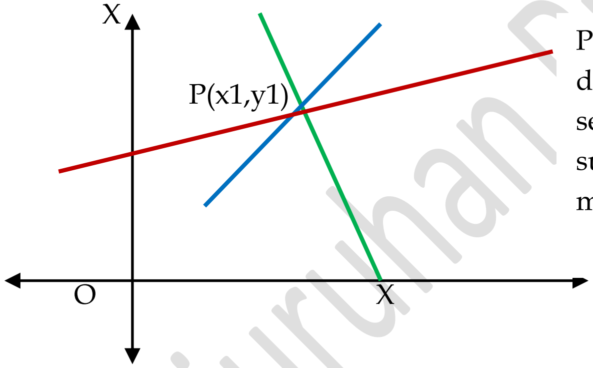
$$p = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}(Ax_1+By_1+C) = \frac{1}{\pm\sqrt{4^2+(-7)^2}}(4.(-3)-7(9)+7 = \frac{-68}{\pm\sqrt{65}}$$

karena jarak selalu positif, maka :

$$p = \frac{68}{\sqrt{65}}$$

I. Berkas Garis

Berkas garis adalah himpunan garis-garis yang melalui satu titik. Perhatikan gamabar berikut ini :



Pada gambar disamping, terlihat semua garis (selain sumbu koordinat) melalui titik P (x1,y1).

Bentuk umum persamaan berkas garis adalah :

$Ax + By + C + \lambda (Px + Qy + R) = 0$

Contoh 1:

Diketahui garis 2x + 3y – 5 =- 0 dan garis 7x + 15y +1 = 0 berpotongan di Titik M. Tentukan persamaan garis yang melalui S dan tegak lurus dengan garis : 12 x – 5y -1 = 0 ?

Jawab:

Untuk menjawab soal tersebut selain dengan yang kita pelajari sebelumnya, juga bisa dikerjakan dengan rumus berkas garis.

$2x + 3y - 5 + \lambda (7x + 15y + 1) = 0$

$(2 + 7\lambda)x + (3+15\lambda)y (-5+\lambda) = 0$..............................(1)

Garis (1), mempunyai koefisien arah = $\dfrac{-(2+7\lambda)}{3+15\lambda}$

Garis ke tiga mempunyai koefisien arah = $\dfrac{12}{5}$

Kedua garis saling tegak lurus, jika m1. m2 = -1

$$\frac{-(2+7\lambda)}{3+15\lambda} \cdot \frac{12}{5} = -1$$

$$-24 - 84\lambda = -15 - 75\lambda$$

$$-9\lambda = 9$$

$$\lambda = -1$$

Jadi persamaan garis yang dicari adalah :

$(2 + 7\lambda)x + (3+15\lambda)y\ (-5+\lambda) = 0$

$(2 + 7(-1))x + (3+15(-1))y\ (-5+(-1)) = 0$

$-5x - 12y - 6 = 0$

Contoh 2:

Diketahui berkas garis : β(3x + y – 1) + θ(2x – y – 9) = 0

Buktikan bahwa garis : x + 3y + 13 =0 adalah salah satu anggota berkas garis tersebut ?

Bukti :

β(3x + y – 1) + θ(2x – y – 9) = 0

(3β + 2θ)x +(β-θ)y + (-β - 9θ) = 0……………………………………(1)

Jika x + 3y + 13= 0 adalah salah satu anggota berkas, maka kita dapat menentukan perbandingan β dan θ sedemikian sehinga (1) ekwivalen

dengan x + 3y + 13 = 0…………………..(2)

Jika (1) ekwivalen dengan (2), maka :

$$\frac{3\beta+2\theta}{1} = \frac{\beta-\theta}{3} = \frac{-(\beta+9\theta}{13} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari persamaan (3)

$\frac{3\beta+2\theta}{1}=\frac{\beta-\theta}{3}\Leftrightarrow \beta-\theta=9\beta+6\theta \Leftrightarrow 8\beta=7\theta \Leftrightarrow \beta=\frac{7}{8}\theta$ Kita substitusikan $\beta=\frac{7}{8}\theta$ ke persamaan (1), diperoleh:

$(3\beta + 2\theta)x + (\beta-\theta)y + (-\beta - 9\theta) = 0$..(1)

$$(3(\frac{7}{8}\theta)+2\theta)x+(\frac{7}{8}\theta-\theta)y-\frac{7}{8}\theta-9\theta=0$$

$$(\frac{(21+16)\theta}{8})x+(\frac{7\theta-8\theta}{8})y-\frac{7\theta+72\theta}{8}=0$$

$$(37x-y-79)\theta=0$$

$$37x-y-79=0$$

Karena

x + 3y + 13 =0 dan 37x – y – 79 tidak ekwivalen, maka x + 3y + 13 =0 bukan

anggota berkas garis tersebut.

SOAL SOAL LATIHAN

1. Tentukan koordinat titik potong garis : 2x – 4y -29 = 0 dan 2x + 5y +19 = 0 ?
2. Persamaan sisi-sisi AB, BC dan AC suatu segitiga berturut-turut : 4x -3y-5=0, x – 3y +10 = 0 dan x – 2 = 0.
   Tentukan koordinat titik-titik sudutnya ?
3. 8x + 3y +1 = 0 dan 2x +y – 1= 0 merupakan dua sisi dari jajaran genjang dan 3x +2y + 3 = 0 merupakan persamaan salah satu diagonalnya. Tentukan koordinat ke empat titik-tik sudutnya ?
4. Sisi-sisi suatu segitiga terletak pada garis –garis :
   X + 5y – 7 = 0, 3x – 2y – 4 = 0, dan 7x + y + 19 = 0
   Carilah luas segitiga tersebut ?
5. Luas suatu segitiga ABC = 8 satuan luas. Dua titik sudutnya yaitu: A(2,-3) dan B(3,-2). Titik sudut C terletak pada garis 2x + y -2 = 0. Tentukan koordinat C ?

6. Tentukan koefisien arah dan titik potong dengan sumbu x dan y dari garis berikut ini :
   a. $5x + 3y = 7$
   b. $-6x - 6y = 9$
   c. $y - 3 = 0$
   d. $3x = -4$
7. Diketahui garis $2x - 4y - 9 = 0$. Tentukan koefisien arah garis yang:
   a. sejajar dengan garis tersebut ?
   b. Tegak lurus dengan garis tersebut ?
8. Ditentukan garis $5x - 2y - 8 = 0$. Tulislah persamaan dari garis lurus yang melalui titik P (-2, -4) yang :
   a. Sejajar dengan garis tersebut ?
   b. tegak lurus pada garis diatas ?
9. Carilah persamaan garis lurus yang melalui titik Q yang tegak lurus Pada segmen garis PQ, jika P (-2,4) dan Q (-5, -2)?
10. Tentukan sudut antara garis – garis berikut ini :
    a. $5x - y + 7 = 0$ dan $2x + 2y = 0$
    b. $-3x - 9y = -4$ dan $x - 2y + 7 = 0$
11. Carilah persamaan garis yang membentuk sudut 45^o dengan sumbu y ?
12. Carilah persamaan garis lurus yang membentuk sudut 75^o dengan sumbu x
13. Carilah persamaan garis yang membuat sudut 60o dengan garis $2x + 3y + 4 = 0$ dan melalui titik M (2 , 1) ?
14. Tentukan harga a dan b sehingga garis :
    $ax - 2y - 1 = 0$ dan $6x - 4y - b = 0$
    a. mempunyai satu titik perseketuan ?
    b. sejajar ?
    c. berimpit ?
15. Tentukan bentuk persamaan normal Hesse dari garis-garis berikut ini
    a. $4x - 3y - 10 = 0$
    b. $12x - 5y + 13 = 0$
    c. $x + 3 = 0$
    d. $2x - 5y = 0$
16. Tentukan jarak titik dan garis dibawah ini :
    a. A(2 , -1) dan $4x + 3y + 10 = 0$
    b. B(0 , -3) dan $5x - 12y - 23 = 0$
    c. Q(-2, -1) dan $x - 7y + 7 = 0$

17. Tentukan anggota berkas garis α (x + 2y -5) + β (3x -2y + 1) = 0, yang
    a. melalui titik P (3 , -1) ?
    b. melalaui titik asal ?
    c. sejajar dengan sumbu x ?
    d. sejajar dengan sumbu y ?
    e. sejajar dengan garis 4x + 3y – 5 = 0 ?
    f. tegak lurus pada garis 2x + 3y + 7 = 0 ?
18. Tentukan persamaan garis melalui titik potong 2x – 7y – 8 = 0, 3x + 2y + 5 = 0 dan membentuk sudut 45o dengan garis 2x + 3y – 7 = 0 ?

BAB V
TRANSFORMASI GEOMETRI

Jenis-jenis Transformasi Geometri

Transformasi geometri digunakan untuk memindahkan suatu titik atau bangun pada suatu bidang. Transformasi geometri adalah bagian dari geometri analitik yang membahas tentang perubahan (letak, bentuk, penyajian) yang didasarkan dengan gambar dan matriks Transformasi pada bidang terdiri dari 4 macam:

1. Pergeseran (Translasi)
2. Pencerminan (Refleksi)
3. Perputaran (Rotasi)
4. Perkalian (Dilatasi)

A. Pergeseran (Translasi)

Perpindahan ttik-titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu yang diwakili oleh ruas garis berarah (vektor) $\overrightarrow{PQ}$ atau dengan suatu pasangan bilangan $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Translasi T = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ memetakan titik A $x_1, y_1)$ ke titik A′ = $(x_1 + p, y_1 + q)$ yang dinotasikan dengan :

T = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} : A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x_1 + p, y_1 + q)$

Dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix}$$

Contoh 1:

Tentukan bayangan titik P(-3, 8) oleh translasi $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Jawab :

T = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} : P(x_1, y_1) \to A'(x_1 + p, y_1 + q)$

= $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} : P(-3,8) \to A'(-3-4, 8+7)$

= $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} : P(-3,8) \to A'(-7,15)$

Atau dengan menggunakan matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+(-4) \\ 8+7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik P (-3 , 8) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ adalah P' (-7 , 15).

Contoh 2:

Tentukan bayangan garis 4x – 7y -5= 0 oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Jawab :

Bayangan titik (x , y) oleh translasi T=$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ adalah :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p \\ y_1 + q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y-5 \end{pmatrix}$$

x' = x + 4 $\Leftrightarrow x = x' - 4$

y' = y - 5 $\Leftrightarrow y = y' + 5$

Dengan mensubstitusi $x = x' - 4$ dan $y = y' + 5$, kedalam 4x – 7y -5= 0, kita peroleh :

4(x' - 4) – 7 (y'+ 5) – 5 = 0

4x' -7y' - 56 = 0

Jadi bayangan garis 4x – 7y -5= 0 oleh translasi T= $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ adalah :

4x - 7y - 56 = 0

Secara Umum bayangan garis ax + by + c = 0 oleh translasi T= $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,

adalah :

x' = x + p $\Leftrightarrow x = x' - p$

y' = y + q $\Leftrightarrow y = y' - q'$

Kita substitusi ke garis ax + by + c = 0, kita peroleh:

a(x ' - p) + b(y' – q) + c = 0

ax' – ap + by' – bq + c = 0

ax' + by' = ap + bq – c.

Jadi bayangan garis ax + by + c = 0 oleh translasi T= $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, adalah :

ax + by = ap + bq – c. . ……………..(1)

Dengan rumus (1) , contoh 2 bisa diselesaikan dengan cepat :

4x – 7y -5= 0 oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

a = 4 , b = -7 , c = -5 , p = 4 , dan q = -5

Jadi bayangannya adalah :

ax + by = ap + bq – c.

4x – 7y = 4.4 + -7(-5) – (-5)

4x – 7y – 56 = 0

Contoh 3 :

Tentukan bayangan ellips : $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ oleh translasi T=$\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$?

Jawab :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+p\\y_1+q\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-5\\y-7\end{pmatrix}$$

x′ = x – 5 $\Leftrightarrow x = x'+5$

y′ = y - 7 $\Leftrightarrow y = y'+7'$

$$\frac{(x'+5)^2}{5}+\frac{(y'+7)}{4}=1$$

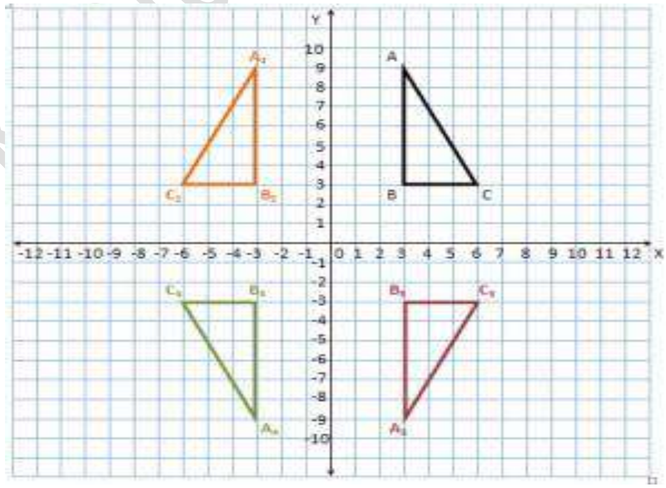
Jadi bayangan $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ oleh translasi T=$\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$, adalah

$$\frac{(x'+5)^2}{5}+\frac{(y'+7)}{4}=1$$

Yang tidak lain adalah ellips dengan pusat (-5 , -7)

B. Pencerminan (Refleksi)

Pencerminan adalah Transformasi yang memindahkan titik-titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin.



Gambar: pencerminan terhadap sumbu x dan sumbu y

a. Pencerminan terhadap sumbu X (dilambangkan dengan M_x)

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(x, -y)$

Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

b. Pencerminan terhadap sumbu Y (dilambangkan My)

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-x, y)$

Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

c. Pecencerminan terhadap titim asal O(0,0) (dilambangkan Mo)

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-x, -y)$

Dalam bentuk metric :

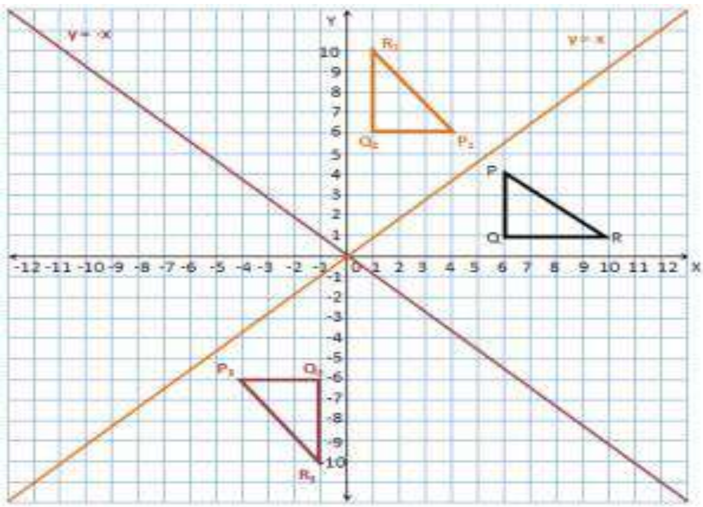
$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

d. Pencerminan terhadap garis y = x (dilambangkan $M_{(y=x)}$)

$M_{(y=x)=}$ $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(y, x)$

Dalam bentuk metric :

$$\text{Mx} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



Gambar : Pencerminan terhadap garis y = x dan y = -x

e. ***Pencerminan terhadap garis y = -x (dilambangkan $M_{y=-x}$)***

$M_{y=-x}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-y, -x)$

Dalam bentuk metric :

$$Mx = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

f. ***Pencerminan terhadap garis x = h (dilambangkan $M_{x=h}$)***

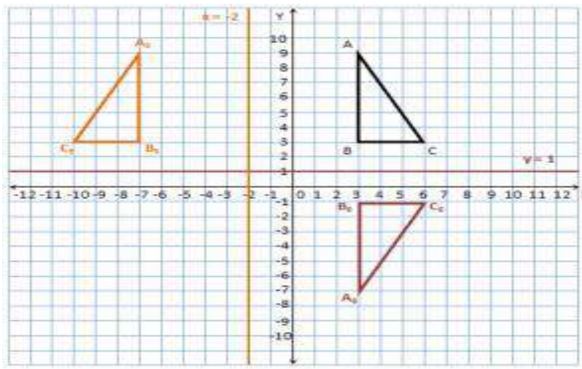
$M_{x=h}$= $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(2h - x, y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h - x \\ y \end{pmatrix}$$

g. ***Pencerminan terhadap garis y = k (dilambangkan $M_{y=k}$)***

$M_{y=k}$- = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(x, 2k - y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2k - y \end{pmatrix}$$



Gambar : Pencerminan terhadap garis x = -2 dan garis y = 1

h. Pencerminan terhadap titik (a , b) (dilambangkan $M_{(a,b)}$)

$M_{(a,b)}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(2a - x, 2b - y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - x \\ 2b - y \end{pmatrix}$$

Contoh 1 :

Tentukan bayangan titik A(-4 , 7) jika dicerminkan terhadap garis y = x, dan dilanjutkan oleh translasi T= $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$?

Jawab :

Dicerminkan terhadap garis y = x, maka :

$M_{y=-x}$ = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(-y, -x)$ = A′(-7 , 4)

Dilanjutkan translasi T= $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, maka :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + p \\ y' + q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 + 5 \\ 4 + 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Contoh 2 :

Tentukan bayangan garis $5x - 7y = 9$, jika di cerminakn terhadap sumbu x dan dilanjutkan dicerminkan terhadap garis y = -x ?

Jawab :

Dicermikan terhadap sumbu x , maka :

Mx = $A(x_1, y_1) \rightarrow A'(x', y') = A'(x, -y)$

Dilanjutkan dicerminan terhadap garis y = -x maka :

$M_{y=-x}$ = $A'(x', y') \rightarrow A''(x'', y'') = A''(-y', -x') = A''(y, -x)$

Jadi bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, jika di cerminakn terhadap sumbu x dan dilanjutkan dicerminkan terhadap garis y = -x, adalah :

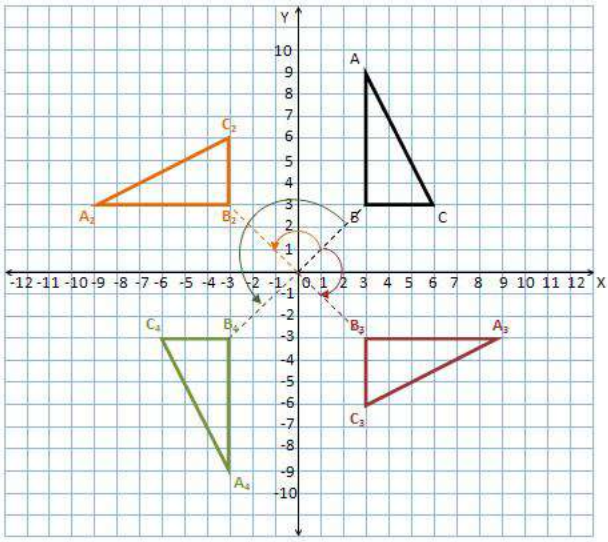
$$5y - 7(-x) = 9 \Leftrightarrow 7x + 5y = 9$$

C. Putaran (Rotasi)

Rotasi adalah memindahkan titik-titik dengan memutar titik-titik tersebut sejauh β terhadap titik pusat Rotasi.

Suatu rotasi dengan pusat A dan sudut Rotasi β dinotasikan:

R(A , β).



Gambar : Rotasi searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam

a. *Rotasi terhadap titik pusat O (0,0) (dilambangkan R(O, β)*

Jika titik A(x,y) dirotasikan sebesar β berlawanan arah dengan jarus jam terhadap titik pusat O(0,0), maka diperoleh bayangan : A′(x′ , y ‘).

R(O, β) = A(x,y)$\rightarrow$P′(x′,y′)= P′(x cos β - y sin β , x sin β + y cos β)

Persamaan matriksnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Untuk β = 90^o . -90^o, 180^o, 270^o , -270^o dengan memasukkan nilai β tersbut diperoleh tabel sebagai berikut :

ROTASI	**MATRIK**	**BAYANGAN**
R(O, 90^o)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(-y , x)
R(O, -90^o)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	(y , -x)
R(O, 180^o)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	(-x , -y)
R(O, 270^o)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	(y , -x)
R(O, -270^o)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(- y , x)

b. Rotasi terhadap titik pusat P (a, b)

Jika suatu titik P(x,y) diputar sejauh β berlawanan arah jarum jam terhadap

titik pusat A (a,b) maka bayangan nya adalah P′ (x′ , y′) dengan :

x′ – a = (x-a) cos β - (y-b) sin β

y′ – b = (x-a) sin β + (y-b) cos β

persamaan matriksnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh :

Titik P (6√2, 10√2) diputar dengan arah berlawanan jarum jam sejauh 45° menghasilkan titik P'. Tentukan koordinat dari titik P'.

<u>Pembahasan</u>

Rotasi sebuah titik dengan sudut sebesar α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^o & -\sin 45^o \\ \sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matematikastudycenter.com

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(6\sqrt{2}) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(10\sqrt{2}) \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(6\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(10\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

D. Perkalian (Dilatasi)

Dilatasi adalah Transfomasi yang mengubah jarak titik-titik dengan factor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.

Perkalian atau dilatasi ini ditentukan oleh factor skala k dan pusat dilatasi.

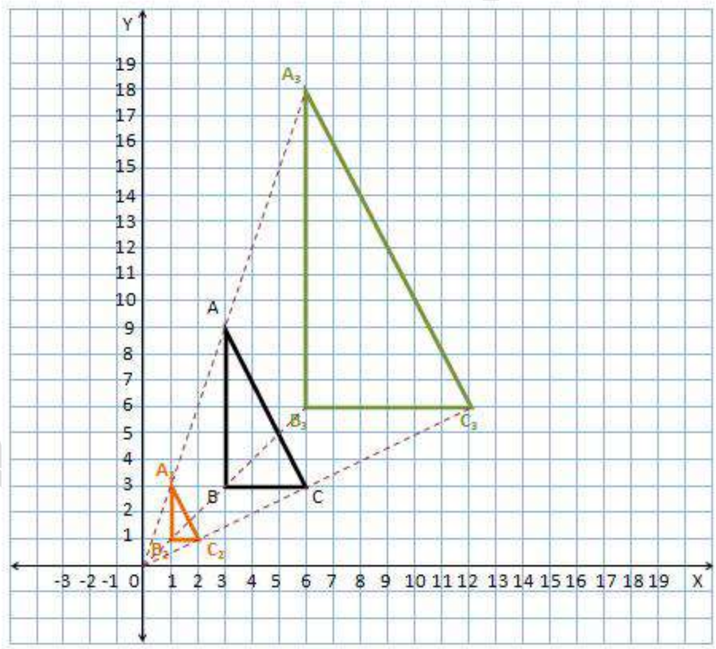
a. Dilatasi terhadap titik pusat O (0,0)

Pemetaaannya :

$$[O.k] = P(x, y) \to P'(kx, ky)$$

Persamaan matriknya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$



Gambar : Dilatasi terhadap O(0,0)

b. *Dilatasi terhadap titik pusat A (a,b)*

Titik P(x,y) di dilatasi terhadap titik pusat P(a,b) , dengan factor skala
k, diperoleh bayangan :
$x' - a = k(x - a)$ dan $y' - b = k(y - b)$
Persamaan matriksnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Tentukan bayangan persegi panjang ABCD dengan A(2,2) , B(-2,2), C(-2,-2) dan D(2,-2) jika dilakukan transformasi Dilatasi pusat O dan skala 3 ?

Jawab :
Jadi hasilnya A'(6,6) , B'(-6,6) , C'(-6,-6) dan D'(6,-6)

2. Tentukan bayangan garis x - y - 3 = 0 oleh D(O,4) ?

Jawab :
Transformasinya adalah Dilatasi dengan pusat O(0,0) dan skala 4

$$x = \frac{x'}{4} \;\; dan \;\; y = \frac{y'}{4}$$

Jadi Bayangannya adalah :

$$\frac{x'}{4} - \frac{y'}{4} - 3 = 0$$

dengan menghilangkan tanda aksen dan mengalikan dengan 4 maka bayangan / peta / hasilnya adalah x - y - 12 = 0

3. Tentukan bayangan garis y = x - 3 karena dilatasi faktor skala 4 dengan pusat A(1,2) adalah .....

Jawab :

$$4(x-1) = x'-1 \Leftrightarrow 4x-4 = x'-1$$

$$4(y-2) = y'-2 \Leftrightarrow 4y-8 = y'-2$$

atau dapat ditulis menjadi

$$x = \frac{x'+3}{4}$$

$$y = \frac{y'+6}{4}$$

sehingga bayangannya adalah :

$$\frac{y'+6}{4} = \frac{x'+3}{4} - 3 \Leftrightarrow y' = x'+15$$

Jadi bayangannya adalah : y = x + 15 atau x - y + 15 = 0

E. Transformasi oleh suatu matriks

Suatu titik A(x,y) ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ menjadi A′(x′ , y′).

Hubungan diatas dapat dituliskan dalam persamaan :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan hasil transformasi matriks $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ terhadap titik B(2 , -3) ?

Jawab :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jadi B′ (-8 , -9)

F. Komposisi Transformasi

Gabungan dari beberapa trnsformasi disebut komposisi transformasi. Transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2 dapat diwakili oleh transformas tunggal yang ditentukan oleh :

Dalam bentuk bagan urutan transformasi dapat diperhatikan sebagai berikut :

$$P(x,y) \xrightarrow{T_1} P'(x',y') \xrightarrow{T_2} P''(x'',y'')$$

Pengerjaan transformasi ini dapat ditulis :

$$T_2 \circ T_1\ P(x,y) \xrightarrow{T_2 \circ T_1} P''(x'',y'')$$

a. Komposisi dua translasi

Jika translasi $T_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $T_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,

Komposisi translasi T_1 dilanjuitkan T_2 dapat diwakili oleh translasi tunggal yang ditentukan oleh:

$$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat Komposisi translasi :

1) Untuk dua translasi berurutan berlaku :
$T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ (Komutatif)

2) Untuk tiga translasi berurutan berlaku :
$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$ (Asosiatif)

Contoh :

Titik B (2,4) translasikan oleh $T_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kemudian dilanjutkan dengan $T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bayangan titik adalah…

Jawab :

$$T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

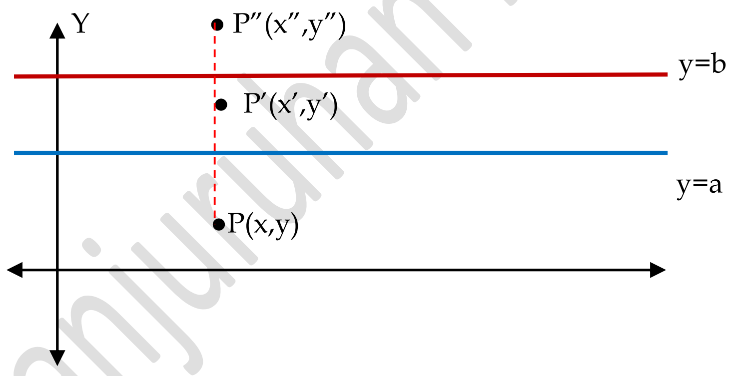
Jadi bayangannya adalah (6,10)

b. ***Komposisi Refleksi***

1) Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu sejajar.

a) Sejajar dengan sumbu x

Jika titik P′(x′,y′) adalah hasil pencerminan terhadap garis y = a dan titik P′(x″,y″) adalah hasil pencerminan titik P′(x′,y′) terhadap garis y = b (lihat gambar):

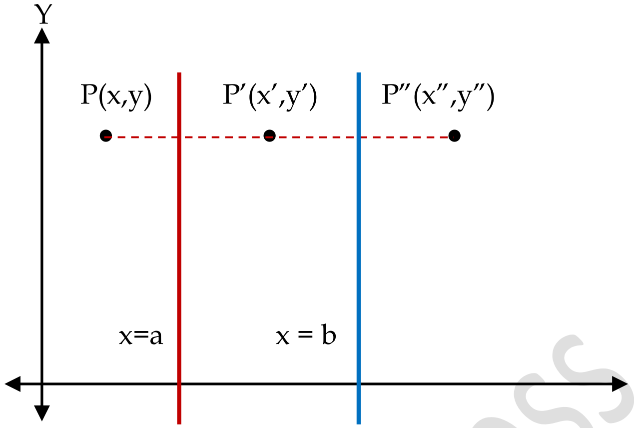


$$P(x,y) \xrightarrow{y=a} P'(x,2a-y)$$

$$P'(x,2a-y) \xrightarrow{y=b} P''(x,\ 2b-(2a-y)) = (x,\ 2(b-a)+y)$$

b) Sejajar terhadap sumbu y

Jika titik P′(x′,y′) adalah hasil pencerminan terhadap garis x = a dan titik P″(x″,y″) adalah hasil pencerminan titik P″(x′,y′) terhadap garis x = b (lihat gambar)

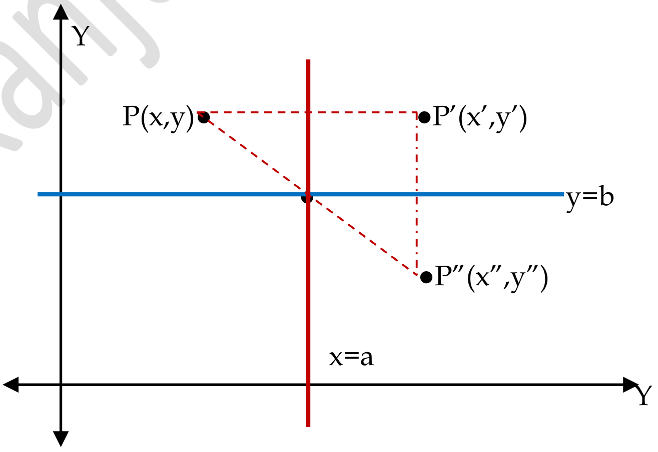


$$P(x,y) \xrightarrow{x=a} P'((2a-x), y)$$

$$P'((2a-x),y) \xrightarrow{x=b} P''(2b-(2a-x),\ y)$$

c) Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu saling tegak lurus

Jika titik P′(x′,y′) adalah hasil pencerminan titik P(x,y) terhadap garis x = a dsn titik P″(x″,y″) adalah hasil pencerminan titik P′x′,y′) terhadap garis y=b.



Maka :

$$P(x,y) \xrightarrow{x = a} P'(x',y')$$

$$P'(x',y') \xrightarrow{y=b} P''(2a-x, 2b-y)$$

d) Komposisi rotasi

Dua rotasi berurutan yang sepusat ekivalen dengan rotasi sejauh jumlah kedua sudut rotasinya terhadap pusat yang sama

Jadi :

Jika $R_1 = R(O,\theta)$ dan $R_2 = R(O,\beta)$, maka :

$R_2 \text{ o } R_1 = R(O, (\theta + \beta)$

e) Komposisi Transformasi dengan Matriks

Jika T_1 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, maka komposisi transformasi :

1) $T_2 o T_1$ adalah perkalian matrik $M_2 . M_1$

$$M_2 . M_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2) $T_1 \text{ o } T_2$ adalah perkalian matriks $M_1 . M_2$

$$M_1 . M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

f) Luas daerah bangun hasil transformasi

Jika matriks transformasi T **=** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mentransformasikan bangun A menjadi A′, maka:

Luas Bangun A′ = $|\det .T|$ x luas bangun A

$|\det .T|$ dinamakan factor pembesaran luas, merupakan nilai mutlak determinan matriks T

RANGKUMAN TRANSFORMASI

NO	TRANSFORMASI	NOTASI	MATRIKS
1	Translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	P(x,y)→P′(x1+a,y1+b)	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2	Pencerminan terhadap sumbu x	**P(x,y) →P′(x,-y)**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu y	**P(x,y) →P′(-x,y)**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap titik asal	**P(x,y) →P′(-x,-y)**	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap garis y=x	**P(x,y) →P′(y,x)**	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	Pencerminan terhadap garis y= -x	**P(x,y) →P′(-y,-x)**	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7	Pencerminan terhadap garis x = h	**P(x,y) →P′(2h-x,y)**	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
8	Pencerminan terhadap garis y= k	**P(x,y) →P′(x, 2k-y)**	
9	Pencerminan terhadap garis titik (a,b)	**P(x,y) →P′2a-x, 2b-y)**	
10	Rotasi terhadap O(0,0) →R(O, θ) berlawanan arah jarum jam	**P(x,y)→P′(xcos** θ - ysin θ , x sin θ + y cos θ)	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

11	**Rotasi terhadap titik pusat P(a,b) →R(P, θ)** berlawanan arah jarum jam	**x'-a =(x-a)cosθ** - (y-b)sinθ y'-b=(x-a)sinθ + (y-b)cosθ	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
12	**Dilatasi terhadap titik pusat O(0,0)**	$[O,k]: P(x,y) \rightarrow P'(kx,ky)$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
13	**Dilatasi terhadap titik pusat A(a,b)**	**x'-a = k(x-a)** **y'-b = k(y-b)**	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

SOAL LATIHAN

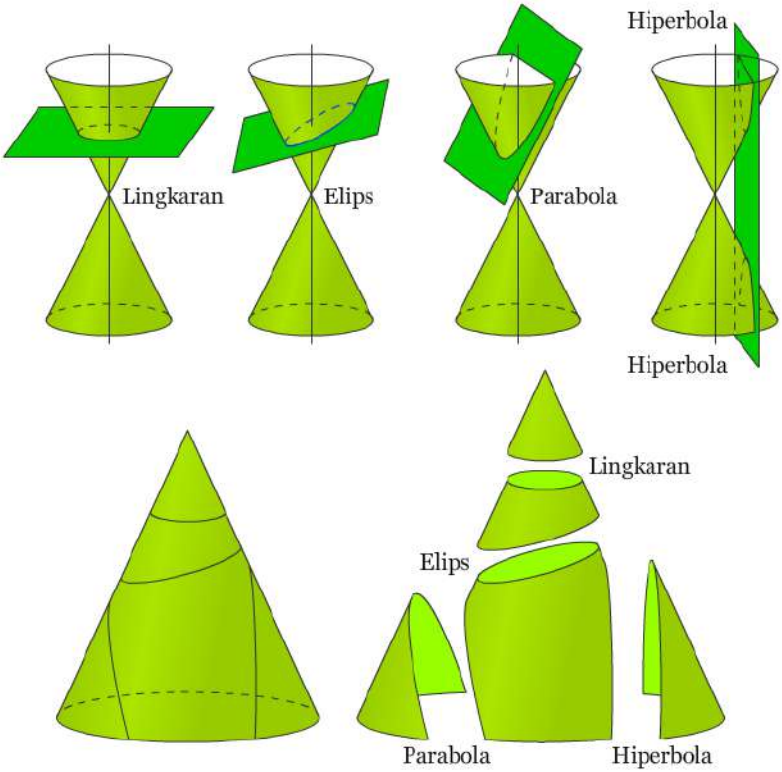
1. Tentukan bayangan garis y = -3x + 4 yang dicerminkan terhadap garis y = x ?
2. Tentukan persamaan bayangan kurva y = x^2 – 2x -3 oleh rotasi (O, 180^o), kemudian dilanjutkan pencerminan terhadap y = -x ?
3. Tentukan persamaan bayangan lingkaran : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ oleh transformasi yang berkaitan dengan matrik $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?
4. T_1 dan T2 adalah transformasi yang masing-masing bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ditentukan T = T_1 o T_2, maka transformasi T bersesuaian dengan matriks ….
5. Ditentukan matriks transformasi T_1 = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan T_2 = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hasil transformasi titik (2,-1) terhadap T_1 dilanjutkan T_2 adalah …..

6. Persamaan bayangan garis y = -8x +1 karena transformasi oleh matrik $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ kemudian dilanjutkan dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ adalah .....
7. Persamaan bayangan parabola y = x^2 + 4 karena rotasi dengan pusat O(0,0) sejauh 180^o adalah ….
8. Titik P(1,2) dan titik Q masing-masing ditransformasikan ke titik P'(2,3) dan ke titik Q''(2,0) oleh matriks A = $\begin{pmatrix} a+2 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Maka koordinat titik Q adalah ………
9. Persamaan bayangan garis 5x – 7y -1 = 0 oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan matriks B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ adalah .....
10. Bayangan kurva y = x^2 -3 jika dicermikan terhadap sumbu x dilanjutkan dengan dilatasin pusat O dan faktor skala 3 adalah .....
11. Pencerminan garis y = -7x – 7 terhadap garis y = -3 menghasilkan garis .....
12. Vektor $\vec{x}$ dicerminkan terhadap garis y =x , kemudian hasilnya diputar terhadap titik asal O sebesar > 0 searah jarum jam menghasilkan vektor $\vec{y}$. Jika $\vec{y}$ = A. $\vec{x}$, maka matriks A = ….
13. Jika M = A^3 dan A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, maka $M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = ...

14. Segitiga ABC dengan A(4,0), B(0,-2), dan C(-2,-4) diputar 60 derajat berlawanan arah dengan jarum jam terhadap titik pusat O(0,0). Hasil transformasi tersebut adalah ….
15. Titik A (2,3) diputar terhadap titik B(-1 , -2) dengan arah berlawanan putaran jarum jam sebesar 45 derajat. Bayangan titik A adalah ….
16. Segitiga ABC dengan A(1,0), B(4,0), dan C(3,4) diputar berlawanan arah jarum jam sebesar 180 derajat dengan pusat P (a,b). Apabila diperoleh bayangan segitiga A'B'C' dengan A'(-1,-2), B'(r,s), C(3,2) , maka koordinat B' adalah …..
17. Bayangan titik A(1,2) oleh pencerminan terhadap y = 2 dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis y = -1 adalah ….
18. Bayangan titik P(-3,4) oleh pencerminan terhadap y = 2 dilanjutkan pencerminan terhadap garis x = -1 adalah…..

BAB VI
IRISAN KERUCUT

A. BENTUK-BENTUK IRISAN KERUCUT

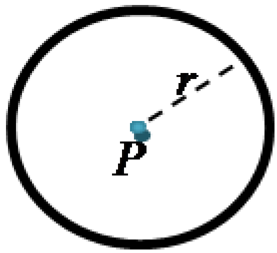


B. PERSAMAAN LINGKARAN

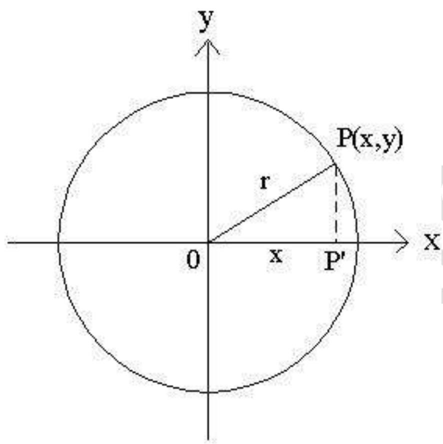
1. ***Definisi Lingkaran :***

   Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut Pusat Lingkaran, sedangkan jarak titik terhadap pusat linkaran disebut jari-jari.

Gambar dibawah ini menunjukkan lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r



2. *Persmaan Lingkaran yang Berpusat di titik O(0,0) dan Berjari-jari = r*



Misalkan titik P(x,y) adalah sebarang titik yang terletak pada keliling lingkaran. TitikP' adalah proyeksi titik P ada sumbu x sehingga $\triangle$ OPP' adalah segitiga siku-siku di P' Dengan menggunakan dalil Pythagoras pada $\triangle$OPP', maka :

OP = $\sqrt{(OP')^2 + (PP')^2}$

Substitusi OP = r, OP' = x dan PP'=y

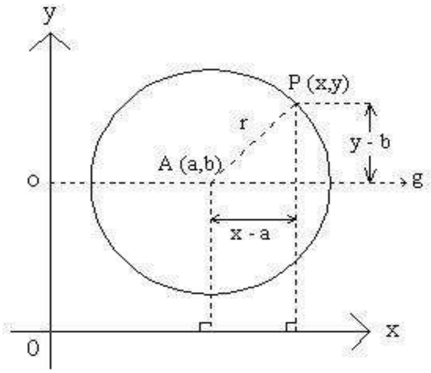
r = $\sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

$r^2 = x^2 + y^2$

Karena titik P(x,y) sebarang, maka persamaan $r^2 = x^2 + y^2$ berlaku untuk semua titik, sehingga persamaan lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r adalah :

$x^2 + y^2 = r^2$ ....(1)

3. *Persamaan Lingkaran yang Berpusat di M(a,b) dan berjari-jari r*



Misalkan titik P(x,y) adalah sebarang titik terletak pada keliling lingkaran. Buat garis g melalui pusat M(a,b) dan sejajar dengan sumbu x. Proyeksi P pada garis g adalah P′, sehingga APP′ adalah segitiga siku-siku di P′ dengan AP′= x-a, PP′ = y-b dan AP = r

Dengan menggunakan dalil Pythagoras pada APP′, diproleh :

$$AP = \sqrt{(AP')^2 + (PP')^2}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Jadi Persamaan lingkaran dengan pusat M(a,b) dan berjari-jari = r adalah :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ……………………..(2)

4. *Bentuk Umum Persamaan Lingkaran*

Bentuk umum persamaan lingkaran dinyatakan dengan :

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, untuk A, B, C anggota bilangan Real

Atau

$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, untuk A, B, C, D anggota bilangan Real, A≠ 0

Menentukan titik pusat dan jari-jari bentuk umum persamaan lingkaran :

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

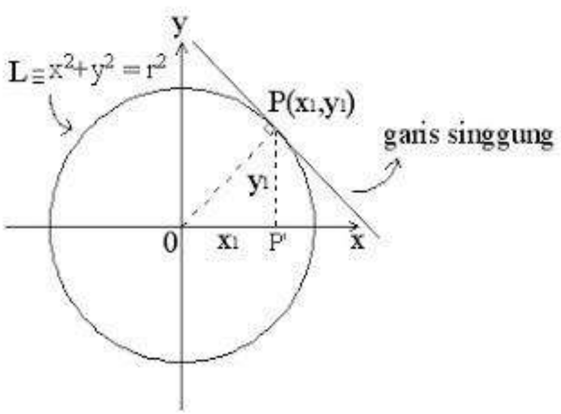
$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$ ....(3)

Berdasarkan persamaan (2), dari persamaan (3), diperoleh :

Pusat lingkaran $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan jari-jari = $\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}$

5. ***Persamaan Garis Singgungg Lingkaran***

   a. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang melalui sutu titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran



Garis singgung dapat ditentukan sebagai berikut :

a. Gradien OP = $m_1 = {}^{y_1}\!/_{x_1}$

b. Karena OP $\perp$ garis singgung, maka :

$m_1 m_2 = -1$

${}^{y_1}\!/_{x_1} . m_2 = -1$

$m_2 = -{}^{x_1}\!/_{y_1}$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran di titik $P(x_1, y_1)$, pada lingkaran adalah :

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

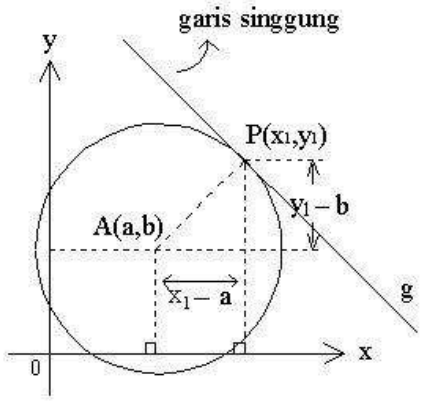
$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y.y_1 - {y_1}^2 = -x.x_1 + {x_1}^2$$

$$x.x_1 + y.y_1 + {x_1}^2 + {y_1}^2 = 0$$

$$x.x_1 + y.y_1 = r^2$$

b. Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran



Garis singgung dapat ditentukan sebagai berikut :

Gradien AP = $m_1 = {(y_1 - b)}/{(x_1 - a)}$

Karena OP $\perp$ garis singgung, maka :

$$m_1 m_2 = -1$$

$$(y_1 - b)/(x_1 - a) . m_2 = -1$$

$$m_2 = -(x_1 - a)/(y_1 - b)$$

Persamaan garis singgung yang melalui $P(x_1, y_1)$ dan gradien $m_2 = -(x_1 - a)/(y_1 - b)$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$y.y_1 - y.b - {y_1}^2 + y_1 b = -x.x_1 + {x_1}^2 + ax - ax_1$$

$$x.x_1 - ax - {x_1}^2 + ax_1 + y.y_1 - {y_1}^2 - by + by_1 = 0$$

$$x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 = {x_1}^2 + {y_1}^2 \text{..............(1)}$$

Karena $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka:

$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$x_1^{\ 2} - 2ax_1 + a^2 + y_1^{\ 2} - 2by_1 + b^2 = r^2$

$x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} = 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 + r^2$...........(2)

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}$..............(1)

$x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 = 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 + r^2$

$(x.x_1 - ax + ax_1 - 2ax_1 + a^2) + (y.y_1 - by + by_1 - 2by_1 - b^2) = r^2$

$(x-a)(x_1 + a) + (y-b)(y_1 - b) = r^2$.............................(3)

Persamaan (3), adalah persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran

c. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Diketahui

1) Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ ***dengan gradian m***

Persamaan garis lurus dengan gradien m adalah y = mx +n

Substitusi y = mx + n ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

Diperoleh :

$x^2 + (mx+n)^2 = r^2$

$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 = r^2$

$(1+m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (2mn)^2 - 4(1+m^2)(n^2 - r^2)$

$D = 4m^2n^2 - 4(n^2 - r^2 + m^2n^2 - mr^2)$

$D = 4m^2n^2 - 4n^2 + 4r^2 - 4m^2n^2 + 4mr^2$

$D = 4(m^2r^2 - n^2 + r^2)$

Karena menyinggung, berarti D= 0

$4(m^2r^2 - n^2 + r^2) = 0$

$$m^2r^2 - n^2 + r^2 = 0$$

$$(m^2 + 1)r^2 = n^2$$

$$n = \pm r\sqrt{m^2 + 1)}$$

Substitusi $n = \pm r\sqrt{m^2 + 1)}$ ke persamaan garis y = mx + n diperoleh :

y = mx ± $r\sqrt{m^2 + 1)}$

Jadi rumus persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah :

y = mx ± $r\sqrt{m^2 + 1)}$

2) **Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dengan gradien m**

Persamaan garis dengan gradien m adalah y = mx +n

Substitusi y = mx +n ke persamaan lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ diperoleh :

$$(x-a)^2 + (mx + n - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + m^2x^2 + n^2 + b^2 + 2mxn - 2mxb - 2nb - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 2(a - mn + bm)x + (a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2) = 0$$

Nilai diskriminan :

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = \{-2(a - mn + bm\}^2 - 4(1 + m^2)(a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2)$$

Karena garis menyingung lingkaran , maka :

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

$$\Leftrightarrow \{-2(a - mn + bm\}^2 - 4(1 + m^2)(a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a-mn+bm)^2-4(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (a-mn+bm)^2-(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2)=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+m^2n^2+b^2m^2-2amn+2abm-2m^2nb-a^2-n^2-b^2+2bn+r^2-$$
$$a^2m^2-m^2n^2-m^2b^2+2m^2bn+m^2r^2=0$$
$$\Leftrightarrow (n^2+a^2m^2+b^2+2amn-2bn-2abm)-r^2(1+m^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (n+am-b)^2-r^2(1+m^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (n+am-b)^2=r^2(1+m^2)$$
$$\Leftrightarrow n+am-b=\pm r\sqrt{1+m^2}$$
$$\Leftrightarrow n=-am+b\pm r\sqrt{1+m^2} \text{..................................(1)}$$

Substitusi persamaan (1) kedalam y = mx +n, diperoleh :

$$y=mx-am+b\pm r\sqrt{1+m^2}$$
$$(y-b)=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$$

3) **Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui sebuah titik diluar lingkaran tersebut .**

Cara untuk menentukan persamaan-persamaan garis singgung yang terletak diluar lingkaran dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 :

Persamaan garis melalui $P(x_1,y_1)$ dengan gradian m adalah:

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$$y=mx-mx_1+y_1 \text{ ....(1)}$$

Langkah 2 :

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh persaman kuadrat gabungan. Kemudian dihitung diskriminan dari persamaan kuadrat tersebut.

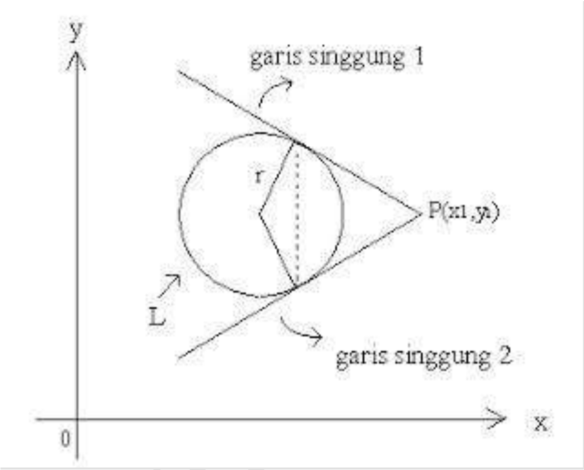
Langkah 3:

Karena garis singgung menyinggung lingakarn, maka D= 0.

Dari syarat D = 0 akan diperoleh nilai-nilai dari m. Nilai-nilai dari m ini selanjutnya di substitusikan ke persamaan garis :

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

Perhatikan gambar berikut ini :



Contoh 1 :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0,0) dan melalui titik A(-3,5) ?

Jawab :

Lingkaran berpusat di O(0,0) dan melalui A(-3,5) , jari-jari lingkaran

r = $\sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

Persamaan yang dimaksud adalah :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 34$$

Contoh 2 :

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$

Jawab :

A = 4 , B= -10 , C = 13

Pusat lingkaran $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ = $(-\frac{4}{2}, -\frac{-10}{2})$ = (-2,5)

jari-jari r = $\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \sqrt{\frac{4^2 + (-10)^2 - 4.13}{4}} = \sqrt{16} = 4$

Contoh 3 :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran : $x^2+y^2= 13$ yang melalui titik (-3,2) ?

Jawab :

Titik (-3,2) kita substitusi ke lingkaran tersebut , maka

$x^2 + y^2 = 13 \Leftrightarrow 9 + 4 = 13$

berarti titik (-3,2) terletak pada lingkaran.

Jadi persamaan garis singgung yang melalui titik (-3,2) pada lingkaran adalah :

$$x.x_1 + y.y_1 = r^2$$
$$-3x + 2y = 13$$

Contoh 4 :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ yang melalui titik (7,2) ?

Jawab :

Jika titik (7,2) kita substitusikan ke persamaan lingkaran tersebut :

$(7-3)^2 + (2+1)^2 = 25 \Leftrightarrow 16 + 9 = 25$

Jadi titik (7,2) terletak pada lingkaran, sehingga persamaan garis singgungnya :

$$(x-a)(x_1+a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$$
$$(x-3)(7-3) + (y+1)(2+1) = 25$$
$$4x - 12 + 3y + 3 = 25$$
$$4x + 3y - 34 = 0$$

Contoh 5 :

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran x2 + y2 = 16, jika diketahui mempunyai gradien = 3 ?

Jawab :

Rumus persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah : y = mx $\pm\ r\sqrt{m^2+1)}$

Jadi persmaan garis singgung tersebut adalah :

y = mx $\pm\ r\sqrt{m^2+1)} \Leftrightarrow$ y = 3x $\pm\ 16\sqrt{3^2+1)} \Leftrightarrow$ y = 3x ±16 $\sqrt{10}$

y = 3x +16 $\sqrt{10}$ dan y = 3x -16 $\sqrt{10}$

Contoh 6:

Tentukan persmaan garis singgung lingkaran (x-1)^2+(y+2)^2=9 yang mempunyai gradien m = 5/12

Jawab :

Persamaan garis singgung nya :

$$(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$(y+2) = \frac{5}{12}(x-1) \pm 9\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}$$

$$5x - 12y - 29 \pm 39 = 0$$

Jadi persmaan garis singgungnya adalah :

5x – 12y +10 = 0 dan 5x -12y -68 = 0

6. **Berkas Lingkaran**

   Definisi Berkas Lingkaran

   Berkas lingkaran adalah sembarang lingkaran yang dibuat melalui dua buah titik potong dari dua lingkaran. Misalnya lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di titik A dan B , maka persamaan berkas lingkaran yang melalui titik A dan B adalah

$L_1+\lambda\, L_2=0$ atau $L_1+\lambda h = 0$ atau $L_2+\lambda h = 0$ dimana garis h adalah garis potong L_1 dan L_2

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui kedua titik potong $L_1 \equiv x^2+ y^2 = 25$ dan $L_2 \equiv x^2+ y^2 = 31$, serta melalui titik (7,6) ?

Jawab :

Persamaan berkas lingkaran adalah :

$L_1+\lambda\, L_2=0$

$x^2+ y^2 - 25 + \lambda\,(x^2+ y^2 - 31) = 0$………..(1)

karena melalui titik (7,6), maka :

$x^2+ y^2 - 25 + \lambda\,(x^2+ y^2 - 31) = 0$

$7^2+ 6^2 - 25 + \lambda\,(7^2+ 6^2 - 31) = 0$

$60 + \lambda .54 = 0$

$$\lambda = \frac{-60}{54}$$

Kita substitusikan λ kedalam persamaan (1), kita peroleh :

$$x^2+ y^2 - 25 + \frac{-60}{54}(x^2+ y^2 - 31) = 0 \quad \text{(kita kalikan 54)}$$

$54x^2+ 54y^2 - 1350 - 60x^2 - 60y^2 +1860 = 0$

$-4x^2 - 4y^2 + 510 = 0$

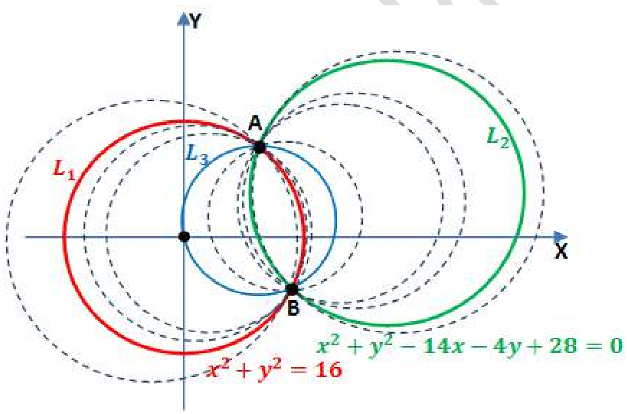
$x^2+ y^2 = 127{,}5$

Contoh 2 :

Pada gambar di bawah ini lingkaran berwarna merah $L_1 \equiv x^2 + y^2 = 16$, Lingkaran berwarna hijau $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$, dan lingkaran yang berwarna biru semuanya berpotongan di titik A dan B .

a. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B
b. Tentukan persamaan dari semua lingkaran yang berwarna biru
c. Salah satu lingkaran biru L_3 melalui titik asal, tentukan Persamaannya

Jawab :



a. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B
Titik A dan B adalah titik potong kedua lingkaran merah L_1 dan lingkaran hijau L_2 Persamaan garis melalui kedua titik potong lingkaran adalah garis potong. Langkah pertama kita cari garis potong dari L_1 dan L_2 :
$L_1 - L_2 = 0$
$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28) = 0$
$-16 + 14x + 4y - 28 = 0$
$7x + 2y - 22 = 0$, yang merupakan garis potong h

b. Tentukan persamaan dari semua lingkaran yang berwarna biru Persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran adalah berkas lingkaran dari kedua lingkaran itu.

Persamaan berkas lingkarannya adalah :

$L_1 + \lambda h = 0 \leftrightarrow (x^2 + y^2 - 16) + \lambda(7x+2y-22) = 0$

$x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16=0$

c. Salah satu lingkaran biru L_3 melalui titik asal, tentukan persamaannya Lingkaran biru L_3 adalah salah satu berkas lingkaran, jadi persamaannya :

$x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16=0$

Untuk mencari nilai λ kita substitusikan titik asal (0,0) ke berkas lingkaran :

$(0,0) \rightarrow x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16=0$

$0^2+0^2+7\lambda(0)+2\lambda(0)-22\lambda-16=0$

$-22\lambda=16$

$\lambda=-\dfrac{8}{11}$

Jadi persamaan lingkarannya adalah :

$x^2 + y^2 + 7\lambda x + 2\lambda y - 22\lambda - 16=0$

$x^2 + y^2 + 7(-\dfrac{8}{11})x + 2(-\dfrac{8}{11})y - 22(-\dfrac{8}{11}) - 16=0$

$x^2 + y^2 - 56x - 16y = 0$

Contoh 3 :

Pada gambar di bawah ini lingkaran merah $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 20x - 14y + 113 = 0$, lingkaran biru $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$, lingkaran coklat L_3, dan lingkaran hijau L_4 dan L_5 semuanya berpotongan di titik A dan B

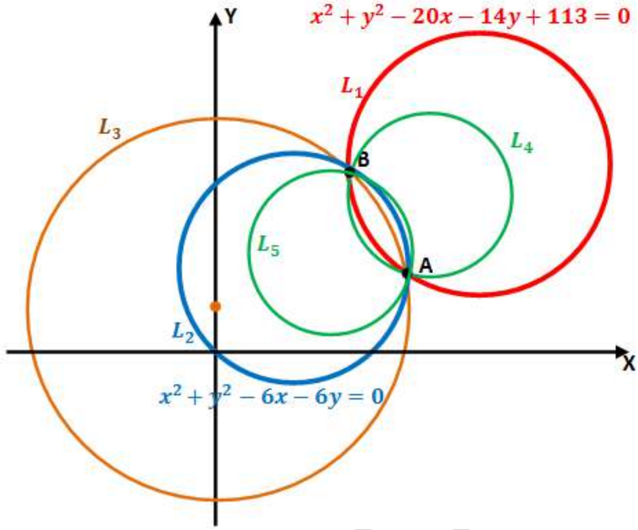
Tentukan:

a. Persamaan L_3 , L_4 dan L_5 dalam parameter λ

b. Jika lingkaran L_3 berpusat di sumbu Y , maka tentukan Persamaannya ?

c. Jika lingkaran L4 dan L5 berjari-jari $\frac{1}{2}\sqrt{43}$, maka tentukan persamaannya ?

Jawab :



a. Persamaan L_3 , L_4 dan L_5 dalam parameter λ

   L_3 , L_4 dan L_5 adalah anggota berkas lingkaran:

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 20x - 14y + 113 = 0$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$

   Persamaan garis potong kedua lingkaran

   $L_1 - L_2 = 0$

   $(x^2 + y^2 - 20x - 14y + 113) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y) = 0$

   $14x + 8y - 113 = 0$

   (persamaan garis melalui A dan B)

   Persamaan berkas lingkaran nya :

   $L_2 + \lambda h = 0$

   $(x^2 + y^2 - 6x - 6y) + \lambda(14x + 8y - 113) = 0$

   $(x^2 + y^2 - 6x - 6y) + 14\lambda x + 8\lambda y - 113\lambda) = 0$

   (persamaan berkas lingkaran melalui L_1 dan L_2)

b. Jika lingkaran L_3 berpusat di sumbu Y , maka tentukan persamaannya. L_3 adalah salah satu berkas lingkaran yang mempunyai persamaan :

   $(x^2 + y^2 - 6x - 6y) + 14\lambda x + 8\lambda y - 113\lambda) = 0$

$x^2 + y^2 + (14\lambda - 6)x + (8\lambda - 6)y - 113\lambda) = 0$………(1)

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ pusatnya $(-A/2, -B/2)$, sehingga pusat dari lingkaran (1) adalah

Pusat lingkarannya $\left(-\frac{14\lambda - 6}{2}, -\frac{8\lambda - 6}{2}\right)$

Karena pusatnya pada sumbu , maka absisnya x = 0

$$-\frac{14\lambda - 6}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{7}$$

Substitusikan $\lambda = \frac{3}{7}$, maka persamaan (1) menjadi :

$x^2 + y^2 + (14\lambda - 6)x + (8\lambda - 6)y - 113\lambda = 0$

$x^2 + y^2 + (14(\frac{3}{7}) - 6)x + (8(\frac{3}{7}) - 6)y - 113(\frac{3}{7}) = 0$

$x^2 + y^2 + 0x + (-\frac{18}{7})y - 113(\frac{3}{7}) = 0$

$7x^2 + 7y^2 - 18x - 339 = 0$

c. Jika lingkar an L_4 dan L_5 berjari-jari $\frac{1}{2}\sqrt{43}$, maka tentukan persamaannya L_4 dan L_5 adalah salah satu berkas lingkaran yang mempunyai persamaan :

$x^2 + y^2 + (14\lambda - 6)x + (8\lambda - 6)y - 113\lambda) = 0$

$x^2 - 6x + 14\lambda x + y^2 - 6y + 8\lambda y = 113\lambda$

$(x - 3 + 7\lambda)^2 - (-3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 - (-3 + 4\lambda)^2 = 113\lambda$

$(x - 3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 = (-3 + 7\lambda)^2 + (-3 + 4\lambda)^2 + 113\lambda$

$(x - 3 + 7\lambda)^2 + (y - 3 + 4\lambda)^2 = \underbrace{65\lambda^2 + 47\lambda + 18}_{r^2}$

Karena jari-jarinya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{43}$, maka :

$65\lambda^2+47\lambda+18= (\frac{1}{2}\sqrt{43}\ )^2$

$65\lambda^2+47\lambda+18 = \frac{43}{4}$

$160\ \lambda^2+ 118\lambda+29 = 0$

$(2\lambda+1)(130\lambda+29)\ = 0$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ atau $\lambda= \frac{-29}{30}$

Substitusikan nilai dari λ yang didapat ke persamaan lingkaran terakhir :

$(x - 3 + 7\ \lambda)^2 + (y - 3 + 4\ \lambda)^2\ = 65\ \lambda^2 + 47\ \lambda + 18$

$\lambda = -\frac{1}{2}$, maka $(x-\frac{13}{2})^2+(y-5)^2 = \frac{43}{4}$ (persamaan L_4)

$\lambda=\frac{-29}{30}$, maka $(x-\frac{593}{130})^2+(y-\frac{506}{130})^2 = \frac{43}{4}$ (persamaan L_5)

SOAL LATIHAN

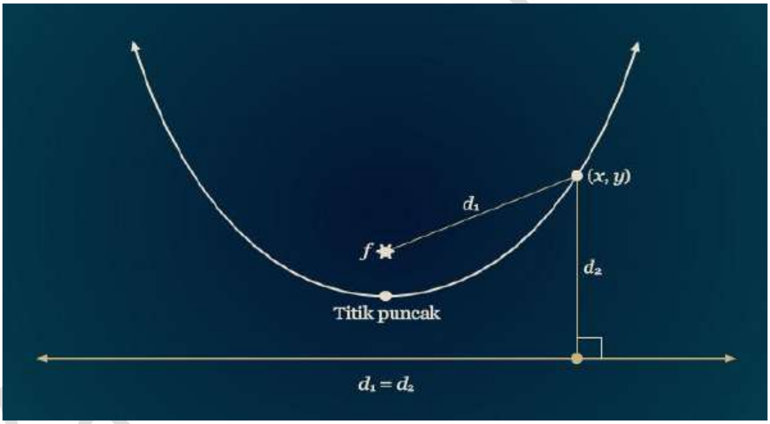
1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran $x^2+\ y^2=25$ dan $x^2+y^2+6x+2y-55=00$ serta melalui titik A(10,10) ?
2. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui dua titik potong lingkaran $x^2+ y^2-2x =35$ dan $x^2+ y^2 -2y = 24$ serta melalui titik (4,-3) ?
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat pada garis x + y = 10 dan melalui titik potong kedua lingkaran $x^2+ y^2-2x-2y=34$ dan $x^2+ y^2 + 8x - 2y -100=0$?
4. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung lingkaran $x^2+ y^2-12x-20y+102 = 0$ di titik (3,5) serta melalui (-5,3) ?!
5. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui kedua titik potong lingkaran $x^2+ y^2-100=0$x2+y2-100=0 dan $x^2+ y^2-12x+88=0$x2+y2-12x+88=0 , serta berjari-jari 20

6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran $x^2+ y^2 -6x-6y=7$ dan $x^2+ y^2 +2x+4y$
   $7=0$ serta menyinggung garis x= 234 ?
7. Lingkaran L1 ≡ $x^2+ y^2 - 3x-5y-7=0$, dan $L_2 \equiv x^2+ y^2 +x+2y-3=0$ berpotongan di titik A dan B . Tentukan persamaan lingkaran yang berdiameter ruas garis B?

C. PARABOLA

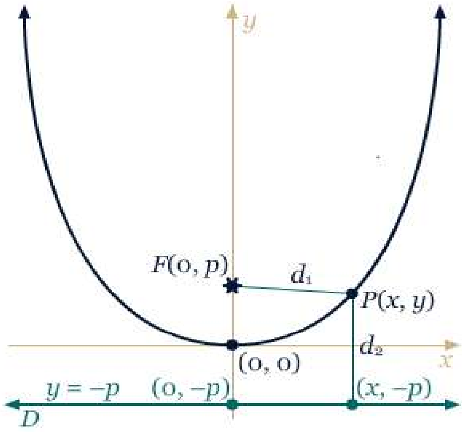
1. Definisi Parabola

Diberikan suatu titik tertentu f dan garis tertentu d dalam bidang. Suatu parabola adalah himpunan semua titik (x, y) sedemikian sehingga jarak antara f dan (x, y) sama dengan jarak antara d dan (x, y). Titik f disebut sebagai fokus parabola dan garis d disebut sebagai direktriks.



2. Parabola Dengan Puncak O(0,0)

Persamaan umum dari suatu parabola dapat diperoleh dengan mengkombinasikan definisi di atas dan rumus jarak. Dengan tidak mengurangi keumuman, kita dapat menganggap parabola yang ditunjukkan pada gambar di atas memiliki titik puncak di (0, 0) dan memiliki titik fokus di (0, p). Seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah, parabola yang dimaksud memiliki direktriks dengan persamaan $y = -p$, sehingga semua titik pada d dapat dituliskan sebagai $(x, -p)$.



Dengan menggunakan rumus jarak dan menerapkan definisi bahwa $d_1 = d_2$, kita mendapatkan,

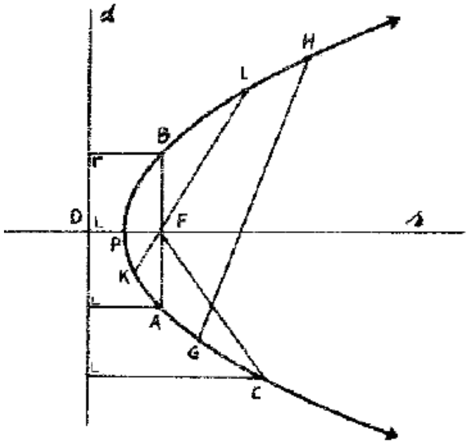
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \; - 2py + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2py$$

Persamaan terakhir di atas disebut *persamaan bentuk fokus-direktriks* dari suatu parabola vertikal dengan titik puncak di (0, 0). Jika parabola di atas diputar sehingga terbuka ke kanan, maka kita akan mendapatkan suatu parabola horizontal dengan titik puncak di (0, 0), dan persamaannya adalah $y^2 = 4px$.

Istilah-istilah yang berhubungan dengan parabola:



s = FD = sumbu simetri

P = Puncak Parabola

F = Fokus (titik api)

d = direktriks

GH = talibusur

KL = Talibusur fokus

AB = Latus rectum

|FC| = Jari-jari fokus

Sifat parabola dengan persamaan $y^2 = 4px$. adalah:

a. Fokus F(p, 0)
b. Direktriks d: x = -p
c. Sumbu simetri - y = o (sumbu x)
d. Puncak o (0, 0) (titik pangkal)
e. Jika p pos itif. parabola membuka ke kanan dan jika p negatif parabola membuka ke kiri.

Contoh 1

Carilah persamaan sederhana parabola yang mempunyai fokus (0, -2) dan puncaknya o (0, 0). Kemudian sebutkan semua sifat tentang parabola ini?

Jawab :

Fokus F(0, -2) dan puncak o (0, 0) berarti p = -2 sehingga persamaan parabola yang dicari adalah $x^2 = 4(-2)x \Leftrightarrow x^2 = -8y$.

Contoh 2 :

Ditentukan parabola dengan persamaan $4y^2 - 25x = 0$

a. Carilah persamaan latus rectum dan koordinat titik ujung dari latus rectum ini!
b. Bicarakan dam sketsa grafiknya!

Penyelesaiannya:

a. Latus reectum ialah talibusur fokus tegak lurus sumbu simetri. Jadi latus rectum ini melalui fokus F dan tegak lurus sumbu simetri. Persamaannya kita cari sebagai berikut:

$$4y^2 - 25x = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{25}{4}x$$

Kalau kita bandingkan dengan parabola $y^2 = 4px$, maka $4p = \frac{25}{4}$ atau $p = \frac{25}{16}$ Jadi fokus F $(\frac{25}{16}, 0)$ dan sumbu x sebagai sumbu simetrinya.

Untuk mencari koordinat titik-titik ujung latus rectum maka kita harus ingat bahwa titik-titik ujung ini terletak pada parabola. dengan kata lain koordinatnya memenuhi persamaan parabola. Kita cari sebagai berikut:

$$y^2 = 4\left(\frac{25}{16}\right)x$$

$$x = \frac{25}{16}$$

$$y^2 = 4\left(\frac{25}{16}\right)^2 = \left(\frac{50}{16}\right)^2$$

$$y = \pm\frac{50}{16} = \pm\frac{25}{8}$$

Jadi titik titik ujung latus rectum adalah:

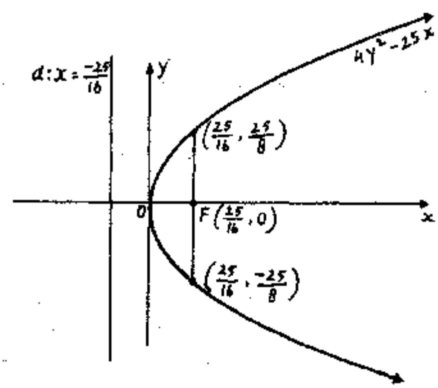
$(\frac{25}{16}, \frac{25}{8})$ dan $(\frac{25}{16}, -\frac{25}{8})$

b. Maksud "bicarakan" dalam hal ini ialah menentukan sifat-sifat dari parabola yaitu mencari fokus direktriks sumbu, simetri puncak latus rectum dan titik-titik ujung latus rectum.

Dari persamaan $y^2 = 4(\frac{25}{16})x$ dan dari hasil a maka kita peroleh:

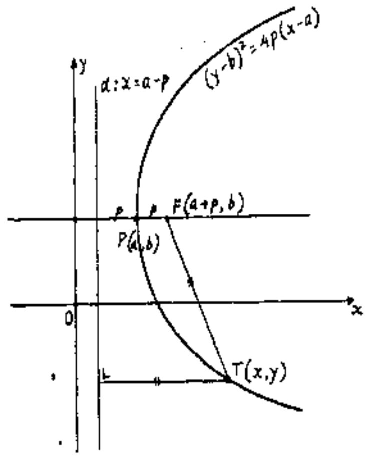
1) Fokus F $(\frac{25}{16} . 0)$

2) Direktriks d: x = $-\frac{25}{16}$
3) Sumbu simetri y = o (sumbu x)
4) Puncak o (0, 0)
5) Persamaan latus rectum x = $\frac{25}{16}$ dan titik-titik ujungnya: ($\frac{25}{16}$, $\frac{25}{8}$) dan ($\frac{25}{16}$, $-\frac{25}{8}$)
6) Parabola membuka ke - kanan
7) Grafiknya (lihat gambar 2.4).



3. Parabola dengan Puncak (a, b) dan sumbu simetri sejajar sumbu koordinat

Bagaimanakah persamaan parabola yang berpuncak pada titik P(a, b). sumbu simetrinya sejajar sumbu x dan jarak dari fokus ke direktriksnya adalah 2/p/? Berarti fokusnya adalah F(a + p. b) dan direktriksnya adalah d: x = a - p. Agar lebih jelas baiklah kita gambar dulu sketsanya! (Lihat gambar 2.5).



Misalkan T(x, y) pada parabola, maka jarak (T, d) = /TF/

$$\left|\frac{x-a+p}{1}\right| = \sqrt{(x-a-p)^2+(y-b)^2}$$

$(x - a + P)^2 = (x - a - p)^2 + (y - b)^2$
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$
Jadi, parabola yang berpuncak di P(a, b) dan berfokus F(a + p. b) memiliki persamaan:
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$

Cara yang sama seperti di atas untuk puncak di P(a, b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu y, maka akan kita peroleh persamaan parabola:
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$.
Kalau kita perhatikan parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$.,

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2a}{4p}x + \frac{a^2+2pb}{4p}$$

dan mengingat fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (secara aljabar), maka jelaslah bahwa grafik fungsi kuadrat adalah berupa parabola dengan sifat-sifatnya dapat ditentukan (fokus. puncak. latus rectum dan sebagainya).

Contoh 1
Carilah persamaan parabola yang berpuncak di titik P(2, 3) dan fokus F(4, 3)!

<u>Jawab :</u>
Puncak P(2, 3), maka a = 2 dan b = 3.
Fokus F(4, 3) = F(2 + 2, 3) berarti p = 2 dan sumbu simetri sejajar sumbu x dan direktriks d: x = 2 - 2 = 0. Kita tahu bahwa. jika puncak P(a, b) dan fokus F(a + p, b) maka persamaan parabolanya: $(y - b)^2 = 4p(x - a)$.

Jadi persamaan parabola yang dicari adalah:
$(y - 3)^2 = 4.2(x - 2) \Leftrightarrow (y - 3)\ 2 = 8(x - 2)$.

Catatan:
Cara lain untuk persamaan parabola dengan fokus dan direktriksnya diketahui ialah dengan menggunakan konsep tempat kedudukan.

Contoh 2
Bicarakanlah parabola $x^2 + 2x - y - 3 = 0$.

Jawab:
$x^2 + 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = y + 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4\tfrac{1}{4}\,(y + 4)$.
Kalau kita bandingkan dengan persaman parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ maka :
$a = -1$. $b = -4$ dan $p = \tfrac{1}{4}$.
Sifat-sifat dari parabola: $(x -1)^2 = 4.\ \tfrac{1}{4}\,(y + 4)$ adalah
a. Puncak $P(-1, -4)$
b. Fokus $F(-1, -4 + , 1) = F(-1, -3\tfrac{3}{4})$
c. Direktriks d: $y - 4 - \tfrac{1}{4} = -4\tfrac{1}{4}$
d. Sumbu simetri $x = -1$
e. Latus rectum, $y = -3\tfrac{3}{4}$ dan titik-titik ujungnya adalah $(-1, -3\tfrac{3}{4})$ dan $(-1\tfrac{1}{2}, -3\tfrac{3}{4})$
f. Titik potong dengan sumbu x di $(-3, 0)$ dan $(1, 0)$ Titik potong dengan sumbu y di $(0, -3)$.
g. Parabola membuka ke atas

4. Garis singgung terhadap Parabola

Kita akan mencari persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola $y^2 = 4px$.
Misalkan garis dengan gradien s memiliki persamaan g: $y = sx + k$. Perpotongan g dengan parabola $y^2 = 4px$ dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} y^2 = px \\ y = sx + k \end{cases}$$

Maka :

$(sx + k)^2 = 4px \Leftrightarrow s^2x^2 + (2ks - 4p)x + k^2 = 0$

dengan deskriminan:

$D = (2ks - 4p^2 - 4k^2s^2$

Jika $D < 0$ garis g tidak memotong parabola,

Jika $D > 0$ garis g memotong parabola pada dua titik

Jika $D = 0$ garis g memotong parabola pada satu titik. berarti g menyinggung parabola. Jadi, syarat agar garis g menyinggung parabola adalah:

$$(2ks - 4p)^2 - 4k^2s^2 = 0 \Leftrightarrow 4k^2s^2 - 16ksp^2 + 16p^2 - 4k^2s^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{p}{s}$$

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola:

$$y^2 = 4px, \quad \text{adalah} \quad y = sx + \frac{p}{s}$$

Bagaimana jika persamaan parabolanya $x^2 = 4px$?

Dengan cara seperti di atas maka akan kita peroeh bahwa persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola $x^2 = 4px$ adalah:

$y = sx - ps^2$ Silakan anda buktikan!

Jika parabolanya $(y - b)^2 = 4p(x, a)$, maka persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola ini adalah:

$y - b = s(x - a) + \dfrac{p}{s}$,dan jika parabolanya

Dan jika parabolanya :

$(x - a)^2 = 4p(y - b)$, maka :

persamaan garis singgungnya adalah:

$y - b = s\,(x - a) - ps^2$

Contoh 1

Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap parabola $y^2 = 8x$ dan terhadap parabola $(x - 3)^2 = -6\,(y + 1)$. Kemudian carilah titik singgungnya dan sketsa grafikya

Jawab :

Persamaan garis singgung dengan gradien garis s terhadap parabola $y^2 = 4px$ adalah $y = sx + \frac{p}{s}$. Dengan mengunakan rumus ini, maka persamaan garis singgung dengan gradien 2 (s = 2) terhadap parabola $y^2 = 8x$ adalah $y = 2x + \frac{2}{2} \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

Dengan menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap parabola $(x- a)^2 = 4p(y - b)$. yaitu: $y - b = s(x - a) – ps^2$, maka:

persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap parabola:

$(x - 3)^2 = -6(y + 1)$ atau $(x - 3)^2 = 4(-\frac{3}{2}) + (y + 1)$ adalah:

$y + 1 = 2(x - 3) - (-\frac{3}{2})\, 2^2 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$

Titik singgung garis $y = 2x + 1$ terhadap parabola $y^2 = 8x$ dicari sebagai berikut:

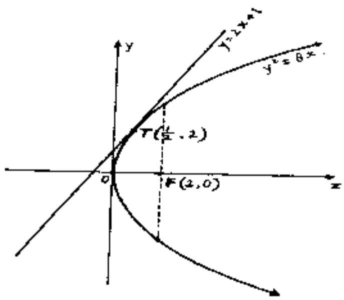
$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

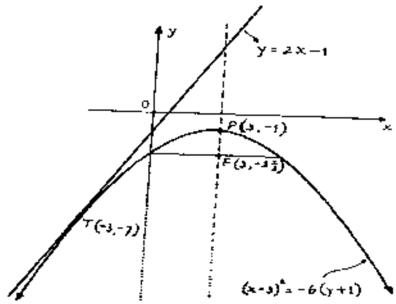
Maka: $(2x + 1)^2 = 8x \Leftrightarrow \quad x = ½.$

Jadi titik singgungnya adalah T(½, 2).

Dengan cara yang sama seperti di atas maka titik singgung garis $y = 2x - 1$ terhadap parabola $(x - 3)^2 = -6(y + 1)$ adalah T (-3. -7)

sketsa grafiknya :





Contoh 2

Buktikan bahwa garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 4px$ adalah $y_1y = 2p(x + x_1)$. Kemudian carilah persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $x^2 = 4py$.

a. Bukti:

Garis singgung melalui titik (x_1, y_1) dan misalkan gradiennya s maka persamaannya dapat ditulis g: $y - y_1 = s(x - x_1)$. Perpotongan garis g dengan parabola y = 4px adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} y - y_1 = s(x - x_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{y - y_1 + sx_1}{s} \\ y^2 = 4px \end{cases}$$

Maka $y^2 = 4p\left(\dfrac{y - y_1 + sx_1}{s}\right) \Leftrightarrow sy^2 - 4py + (4py_1 - 4psx_1) = 0$

Agar garis g menyinggung maka:

$D = 16p^2 - 4s(4py_1 - 4psx_1) = 0 \Leftrightarrow p^2 - py_1s + px_1s^2 = 0.$

$x_1s^2 - y_1s + p = 0$

$$s = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}, \quad yang \ mana \ \ y_1^{\ 2} - 4px_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = \frac{y_1^{\ 2}}{2p}$$

$$s = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{y_1}{\frac{y_1^{\ 2}}{2p}} = y_1 . \frac{2p}{y_1^{\ 2}} = \frac{2p}{y1}$$

Demikian, karena (x_1, y_1) pada parabola sehingga $y_1^2 - 4px_1 = 0$ dan

$x_1 = \frac{y_1^2}{2P}$

Substitusi $s = \frac{2p}{y_1}$ pada persamaan $g: y - y_1 = s(x - x_1)$, maka kita peroleh persamaan garis singgung $g: y_1y = 2p(x + x_1)$.

b. Misalkan gradien singgung adalah s maka persamaan garis singgung

dapat ditulis $y - y_1 = s(x - x_1) \Leftrightarrow y = y_1 + sx - sx_1$. Perpotongan parabola $x^2 = 4py$ dengan garis $y = y_1 + sx - sx_1$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} x^2 = 4py \\ y = y_1 + sx - sx_1 \end{cases}$$

Maka: $x^2 = 4p(y_1 + sx - sx_1) \Leftrightarrow x^2 - 4psx - 4py_1 + 4psx_1 = 0$

Agar - garis menyinggung parabola adalah:

$$D = 16p^2s^2 - 4(4psx_1 - 4py_1) = 0$$
$$p^2s^2 - psx_1 + py_1 = 0$$
$$ps^2 - x_1s + y_1 = 0$$
$$s = \frac{\sqrt{x_1^2 - py_1}}{2p}$$
$$= \frac{x_1}{2p}$$

Catatan:
Karena (x_1, y_1) pada parabola maka $x_1^2 = 4py_1$, atau $x_1^2 - 4py_1 = 0$

Substitusi $s = \frac{x_1}{2p}$ pada persamaan garis $y - y_1 = s(x - x_1)$, maka kita peroleh persamaan garis singgung terhadap parabola $x^2 = 4py$ di titik (x_1, y_1), yaitu $x_1x = 2p(y + y_1)$.

Rangkuman

1) Parabola dengan persamaan sederhana $y^2 = 4px$ memiliki sifat:
   a. Fokus F(p, 0)
   b. Direktriks d: x = -p
   c. Sumbu simetri s: y = 0 (sumbu x)
   d. Puncak O(0,0)
   e. Jika p positif parabola membuka ke kanan dan jika p negatif parabola membuka ke kiri.
2) Parabola dengan persamaan sederhana $x^2 = 4px$ memiliki sifat:
   a. Fokus F(0, p)
   b. Direktriks d: y = -p
   c. Sumbu simetri s : x= 0 (sumbu y)
   d. Puncak O (0, 0)
   e. Jika p positif parabola membuka ke atas dan jika p negatif parabola membuka ke bawah.
3) Parabola dengan persamaan $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ memiliki sifat:
   a. Puncak P(a, b)
   b. Fokus F(a + p, b)
   c. Sumbu s imetri s: y = b
   d. Direktriks d: x = a - p
   e. Latus rectum : x = a + p
4) Parabola dengan persamaan $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ memiliki sifat:
   a. Puncak P(a, b)
   b. Fokus F(a + b, p)
   c. Sumbu simetri s: x = a
   d. Direktriks d: y = b – p
   e. Latus rectum : y = b + p
5) Garis singgung dengan gradien s terhadap parabola:
   a. $y^2 = 4px$ memiliki persamaan $y = sx + \frac{p}{s}$
   b. $x^2 = 4py$ memiliki $y = sx - ps^2$
   c. $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ memiliki persamaan $y - b = s(x - a) + \frac{p}{s}$
   d. $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ memiliki persamaan $y - b = s(x - a) - ps^2$

6) Garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola:

a. $y^2 = 4px$ memiliki persamaan $y_l y = 2p(x + x_1)$
b. $x = 4px$ memiliki persamaan $x_1 x = 2p(y + y_1)$

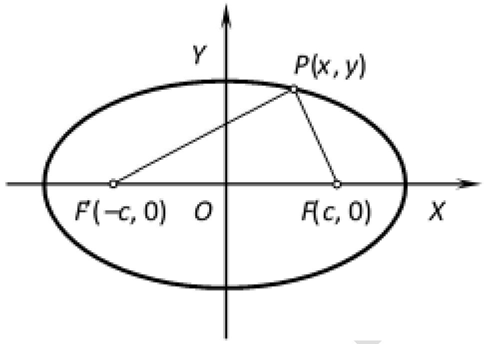
SOAL LATIHAN

1) Carilah persamaan, sederhana parabola yang memenuhi syarat-syarat:
   a. Fokus (0, 3) dan, Puncak O
   b. Fokus (-2, 0) dan Puncak O
   c. Fokus terletak pada sumbu y dan kurvanya melalui (8, -3).
2) Carilah persamaan latus rectum dan koordinat titik ujungnya untuk parabola:
   a. $y^2 - 36 = 0$
   b. $x + 6y = 0$
   c. $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$
   d. $(y + 4)^2 = 4(x - 1)$
3) Bicarakan dan sketsa grafiknya:
   a. $4y^2 - 25x = 0$
   b. $y = x^2 - x - 6$
   c. $(y - 2) = 6(x - 3)$
4) Carilah persamaan parabola dalam bentuk $(x - a)^2 = 4p(y -- b)$ atau. $(y - b) = 4p(x - a)$ yang memenuhi syarat-syarat:
   a. P(-2, 3) sebagai puncak dan F(0, 3) sebagai fokusnya.
   b. Puncak (-2, 4) dan direktriks y = 7.
5) Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap pasabola $x^2 = 8y$ dan terhadap parabola $(y - 3)^2 = -6(x + 1)$. Kemudian carilah koordinat titik singgungnya dan sketsa grafiknya?

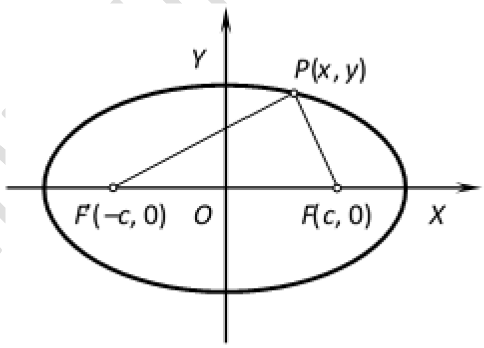
D. ELLIPS

1. Definisi Ellips

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik sedemikian hingga jumlah jaraknya dari pasangan dua titik tertentu yang berbeda adalah konstan. Dua titik tertentu di atas disebut titik fokus (*foci*).



Untuk menurunkan persamaan kurva ellips, dimisalkan kedua fokus berada pada sumbu-x dan sumbu-y menjadi bisektor tegak lurus segmen yang menghubungkan kedua fokus. Misalkan jarak antara kedua fokus adalah $2c$, sehingga titik fokusnya adalah $F(c, 0)$ dan $F'(-c, 0)$ (perhatikan gambar di bawah ini).



Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik yang berada pada ellips, maka menurut definisi akan berlaku

$PF + PF'$ = konstan………………………… (1)

Pada saat titik P (x,y) berada di sumbu x, maka PF + PF′ = a + c + a – c = 2a

Sehingga konstanta tertentu itu adalah $2a$, maka dengan menggunakan rumus jarak untuk menyatakan PF dan PF' diperoleh:

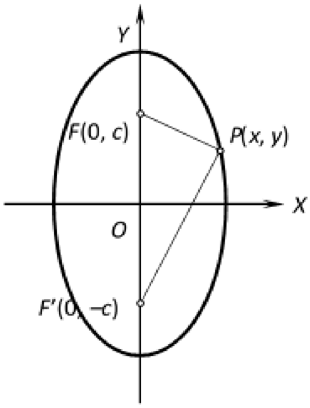
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$
$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1................(2)$$

Pada saat titik P(x,y) berada di sumbu y, maka Segitiga $F'PF$ merupakan segitiga sama kaki, sehingga PF = PF'.
PF = PF' dan PF + PF' = 2a, maka : PF = PF' = a
Sedangkan dalam segitiga OPF , yang mana titik P(x,y) berada di sumbu Y, maka berlaku dalail Pythagoras :
$PF^2 = OP^2 + OF^2$
$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow b^2=a^2-c^2$, dengan syarat b < a…………….(3)
Dari persamaan (2) dan (3) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 ....(4)$$

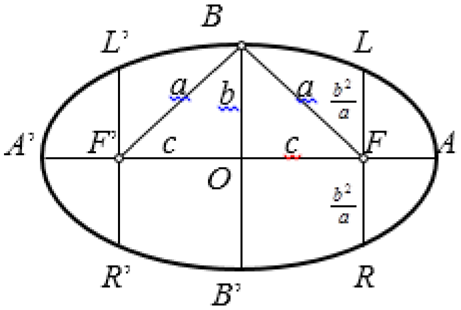
dimana b < a
Persamaan (4) di atas disebut ***persamaan ellips bentuk baku.***
Jika fokus ellips adalah titik-titik (0, *c*) dan (0, –*c*) yang berada di sumbu-*y* (gambar di bawah) maka persamaan ellips bentuk baku adalah

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1. \quad \text{, diamana a > b……………………….. (5)}$$



Dalam hal ini bilangan yang lebih besar adalah berada di bawah suku y^2.

Karakteristik utama suatu ellips persamaan (4) ditunjukkan pada gambar di bawah.



Perhatikan Gambar Ellips diatas :

a. Ellips simetris dengan sumbu-x dan sumbu-y.

b. Ellips memotong sumbu-x di titik (a, 0) dan (–a, 0), dan memotong sumbu-y di titik (0, b) dan (0, –b).

c. Garis yang melalui kedua fokus dinamakan **sumbu utama** ellips.

d. Karakteristik ellips dengan persamaan berbentuk (4):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{, dimana a > b}$$

1) sumbu-x menjadi sumbu utama ellips.

2) Titik potong ellips dengan sumbu utamanya disebut **puncak**. Jadi untuk ellips dalam persamaan (4) puncaknya adalah $A(a, 0)$ dan $A'(-a, 0)$.
3) Titik pada sumbu utama yang terletak di tengah-tengah kedua puncak ellips dinamakan **pusat** ellips. Pusat ellips dengan bentuk persamaan (4) adalah berimpit dengan titik asal.
4) Segmen garis yang menghubungkan kedua puncak disebut **sumbu mayor (sumbu panjang)** ellips dengan panjang $2a$ satuan, dan kita katakan bahwa a adalah satuan panjang setengah panjang sumbu mayor.
5) Pada ellips ini segmen garis yang menghubungkan titik potong ellips dengan sumbu-y yaitu titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$ disebut **sumbu minor (sumbu pendek)** ellips. Panjang sumbu minor adalah $2b$ satuan, sehingga b adalah satuan panjang setengan sumbu minor.
6) Titik-titik tetap F dan F' terletak pada sumbu mayor dan disebut **fokus**, sebagaimana telah disebutkan pada definisi, adalah berjarak c dari pusat ellips.

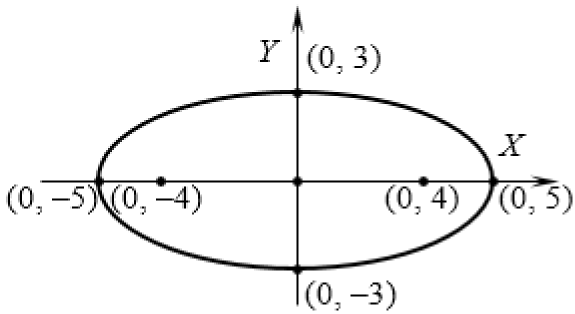
e. Karakteristik dari ellips dengan persamaan (5) secara essensial adalah sama. Pada kenyataannya ellips dengan bentuk persamaan (4) dan (5) adalah identik dalam bentuk dan ukuran, hanya berbeda dalam posisi.

Contoh 1:
Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $9x^2 + 25y^2 = 225$

Jawab:
Pertama nyatakan persamaan yang diberikan ke dalam bentuk baku dengan membagi masing-masing ruas dengan 225 dan diperoleh bentuk baku:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dalam hal ini $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, dan $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, atau $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. Jadi persamaan di atas adalah ellips yang berpusat di (0, 0), puncak ($\pm$5, 0) dan titik fokus ($\pm$4, 0). Sumbu mayor sejajar dengan sumbu-x dan panjangnya 10 satuan, dan sumbu minor panjangnya 6 satuan. Sketsa grafik dapat dilihat di gambar di bawah.



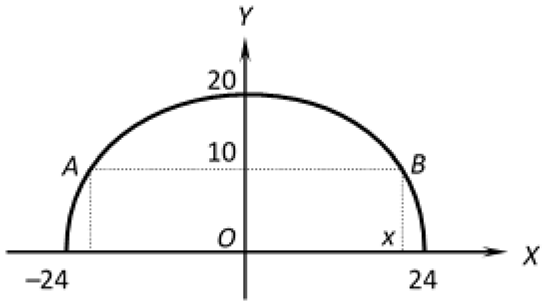
Contoh 2:
Tentukan persamaan ellips dengan pusat (0, 0), salah satu puncak (0, –13), dan salah satu titik fokus (0, 12).

Jawab:
Puncak (0, –13) berarti sumbu mayor sejajar dengan sumbu-y dengan $a = 13$, panjang sumbu mayor = 26 dan karena fokus di (0, 12) berarti $c = 12$. panjang sumbu minor dapat dicari dengan rumus
$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$
Jadi $b = 5$.
Bentuk baku dari persamaan ellips yang dicari adalah

$$\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Contoh 3:
Suatu kelengkungan berbentuk setengah ellips dengan lebar alas 48 meter dan tinggi 20 meter. Berapa lebar kelengkungan itu pada ketinggian 10 meter dari alas ?

Jawab:



Gambar di atas memperlihatkan sketsa lengkungan dan sumbu-sumbu koordinat dapat dipilih sedemikian hingga sumbu-x terletak pada alas dan titik asal adalah titik tengah alas. Maka sumbu utama ellips terletak sepanjang sumbu-x, pusatnya di titik asal, a = ½48 = 24, b = 20. Persamaan ellips berbentuk $\frac{x^2}{576}+\frac{y^2}{400}=1$

Pada ketinggian 10 meter, berarti untuk nilai y = 10 akan diperoleh x yang menyatakan lebar setengah lengkungan pada ketinggian 10 meter. Jadi $\frac{x^2}{576}+\frac{10^2}{400}=1$

sehingga diperoleh:

$x^2 = 432$, $x = 12\sqrt{3}$

Dengan demikian pada ketinggian 10 meter dari alas, lebar kelengkungan adalah AB = $24\sqrt{3}$ meter.

2. Persamaan Umum Ellips

a. Bentuk umum persamaan Ellips adalah :

$Ax^2 + By^2 + C = 0$

Kita akan menyelidiki persamaan $Ax^2 + By^2 + C = 0$ dengan A dan B bertanda sama dan tidak nol.

1) ***Jika C ≠ 0 dan berlainan tanda dengan A dan B***

$Ax^2 + By^2 + C = 0 \Leftrightarrow Ax^2 + By^2 = -C \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \frac{x^2}{\frac{-C}{B}} = 1$

Karena C berlainan tanda dengan A dan B, maka A dan B positif dan kita misalkan $\frac{-C}{A} = a^2$ dan $\frac{-C}{B} = b^2$ dengan a dan b positif. Kita peroleh: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

Ini adalah persamaan sederhana elips yang berpusat di O (0, 0) dan memiliki fokus pada salah satu sumbu koordinat. tergantung pada nila a dan b. Jika a > b maka fokus pada sumbu x. sumbu x adalah sumbu panjang dan jika a < b maka fokus pada sumbu y (sumbu y adalah sumbu panjang). Selanjutnya

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

x real untuk $|y| \le b$

dan $y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$

y real untuk $|x| \le b$

Elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ dapat dibuat grafiknya dan disebut <u>elips real.</u>

2) ***Jika A = B dan C ≠ 0 berlainan tanda dengan A dan B***

$Ax^2 + By^2 + C = 0$. menjadi $Ax^2 + Ay^2 = -C$

$$\frac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \frac{x^2}{\frac{-C}{A}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Bentuk ini adalah, persamaan stardar lingkaran dengan pusat O (o, o) dan jari-jari r = a.

3) ***Jika C = 0***

Persamaan $Ax^2 + By^2 + C = 0$ menjadi $Ax^2 + By^2 = 0$. Grafiknya hanya terdiri dari satu titik real yaitu O (0, 0). Persamaan ini disebut elips titik atau lingkaran titik (dengan r = 0). Kadang-kadang disebut juga elips tidak benar atau lingkaran tidak benar.

4) ***Jika A, B dan C bertanda sama***

Persamaan $Ax^2 + By^2 + C = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \dfrac{x^2}{\frac{-C}{B}} = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \frac{x^2}{\frac{-C}{B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$ x = $\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{-b^2 - y^2}$ (x imajiner)

$\Leftrightarrow$ x = $\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{-a^2 - x^2}$ (y imajiner)

Ternyata tidak ada pasangan (x, y) yang real yang memenuhi persamaan elips di atas maka persamaan ini disebut persamaan elips imajiner (el ips khayal) atau jika A = B disebut lingkaran khayal dengan pusat nyata (titik pangkal 0).

3. Garis Singgung Terhadap Elips

Kedudukan sebuah garis terhadap elips dapat diselidiki sebagai berikut:

Misalkan garis itu adalah g: y = sx + k dan elips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ = 1

Absis titik potong antara g dan elips diperoleh dari:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(sx+k)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow (a^2s^2 + b^2)\, x^2 + 2a^2skx + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$

dengan diskriminan $D = 4a^2b^2\,(a^2s^2 + b^2 - k^2)$

Jika $D < 0$, maka g tidak memotong elips

jika $D > 0$, maka g memotong elips pada dua titik yang nyata dan berlainan

Jika $D = 0$, maka g menyinggung elips

Jadi, syarat agar g menyinggung elips ialah

$D = 4a^2b^2\,(a^2s^2 + b^2 - k^2) = 0 \Leftrightarrow a^2s^2 + b^2 - k^2 = 0$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{a^2s^2+b^2}$

Substitusi $k = \pm\sqrt{a^2s^2+b^2}$ ke persamaan garis g : y = sx + k, maka kita peroleh persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap elips

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ yakni: $y = sx \pm \sqrt{a^2s^2+b^2}$

Jika titik (x_1, y_1) pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, maka persamaan garis singgung di titik

(x_1, y_1) pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ adalah:

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1}$$

Contoh 1

Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap elips $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

Jawab :
Langsung saja kita gunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Dalam hal ini s = ½, a^2 = 4 dan b^2 = 3, maka persamaan garis singgung yang dicari adalah: y = ½ x ± $\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+3}$ ⇔ y = ½ x ± 2

Jadi ada dua garis singgung, yakni
y = ½ x + 2, dan y = ½ x - 2

Contoh 2

Garis y = $x\sqrt{6}$ memotong elips $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ pada dua titik. Carilah persamaan garis singgung di titik-titik potong ini pada elips.

Jawab :
Koordinat titik potong garis dengan elips dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \\ y = x\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} & x^2 + 4(x\sqrt{6})^2 - 16 = 0 \\ & x^2 + 24x^2 = 16 \\ & x^2 = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

⇔ x = $\frac{4}{5}$ dan y = $\frac{4}{5}$ √6

atau x = -$\frac{4}{5}$ dan y = -$\frac{4}{5}$ √6

Jadi titik potong antara garis = dengan elips adaaah di titik ($\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$ √6) dan di titik

($-\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{5}\sqrt{6}$). Persamaan garis singgung di titik ($\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}\sqrt{6}$) pada elips $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ atau $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ adalah $\frac{\frac{4}{5}x}{16} + \frac{\frac{4}{5}\sqrt{6}y}{4} = 1$ ⇔ $x + 4\sqrt{6}\, y = 20$, dan persamaan garis singgung di titik ($-\frac{4}{5}$ = $\frac{4}{5}\sqrt{6}$) adalah $x + 4\sqrt{6}\, y = -20$

Contoh 3

Dari titik P (5, 4) ditarik garis-garis singgung terhadap elips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Carilah persamaan garis-garis singgung tersebut.

Jawab :

Misalkan garis singgung yang dicari adalah g : y = sx + k. Karena g garis singgung maka g: $y = sx \pm \sqrt{4s^2 + 16}$

g melalui titik P(5, 4), maka $4 = 5s \pm \sqrt{4s^2 + 16}$

⇔ $4 - 5s = \pm \sqrt{4s^2 + 16}$

⇔ $16 - 40s + 25s^2 = 4s^2 + 16$

⇔ $21s^2 - 40s = 0$

$s(21s - 40) = 0$

$s_1 = 0$, dan $s_2 = \frac{40}{21}$

Untuk $s_1 = 0$, maka g: y = 4

(y = -A tidak diambi karena tidak memenuhi/ tidak melalui P)

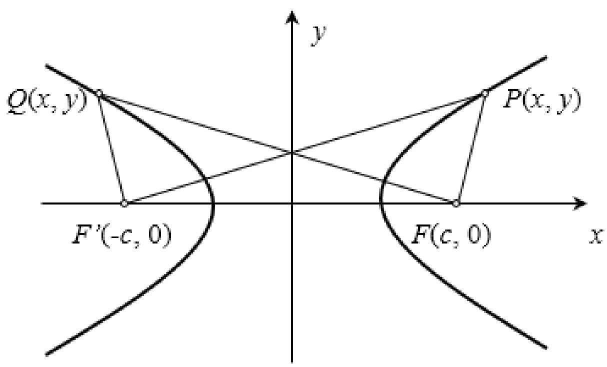
Untuk $s_2 = \frac{40}{21}$, maka g: $\frac{40}{21}$ - $\frac{116}{21}$

(Tanda ⊕ tidak diambil karena tidak memenuhi/ tidak melalui P)

F. HIPERBOLA

1. Pengertian Hiperbola

Hiperbola adalah himpunan semua titik (x, y) pada bidang sedemikian hingga selisih positif jarak titik (x, y) terhadap pasangan dua titik tertentu yang disebut titik *fokus* (*foci*) adalah tetap. Untuk menentukan persamaan hiperbola, misalkan kita pilih titik-titik fokus F dan F' terletak pada sumbu-x. Sedangkan sumbu-y diletakkan di tengah-tengah segmen garis FF'. Misalkan kita tentukan titik fokusnya adalah F'(-c, 0) dan F(c, 0) sedangkan selisih jarak konstan tertentu adalah 2a. (lihat gambar di bawah ini).



Gambar 1

Jika (x, y) merepresentasikan titik pada hiperbola, maka dari definisi diperoleh

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$
$$\sqrt{(x-(-c))^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a$$
$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$-4a^2+4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$-a+\frac{cx}{a} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -a + \frac{cx}{a}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Pada saat titik P(x,y) berada pada sumbu x, maka :
Dalam segitiga *PFF′* terlihat bahwa

$$\overline{PF'} < \overline{PF} + \overline{FF'}$$
$$\overline{PF'} - \overline{PF} < \overline{FF'}$$
$$2a < 2c$$
$$a < c$$
$$c^2 - a^2 > 0$$

Karena $c^2 - a^2$ adalah positif, maka bisa diganti dengan bilangan positif lain, sebut b^2 sehingga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dimana $b^2 = c^2 - a^2$. Ini merupakan bentuk baku persamaan hiperbola.

Kedua sumbu koordinat sumbu-x dan sumbu-y adalah sumbu simetri pada hiperbola dan $(\pm a, 0)$ adalah titik-titik potong dengan sumbu-x. Dalam hal ini tidak memotong sumbu-y, sebab untuk $x = 0$ diperoleh

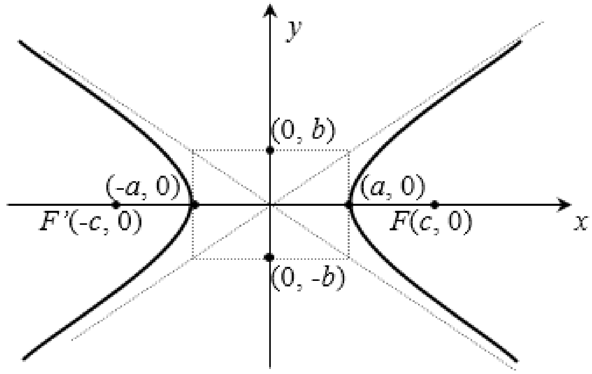
$$-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

yang mana tidak ada bilangan real y yang memenuhi persamaan di atas.

Sumbu-x (yang memuat dua titik dari hiperbola) disebut *sumbu tranversal* (*transverse axis*) dan sumbu-y disebut *sumbu sekawan* (*conjugate axes*). Titik potong hiperbola dengan sumbu trasversal disebut *titik ujung* (dalam hal ini $(\pm a, 0)$) dan perpotongan kedua sumbu simetri disebut *pusat* hiperbola. Jarak antara kedua titik ujung adalah 2*a* dan disebut *sumbu mayor* dan besaran 2*b* disebut *sumbu minor*. Dalam hal ini panjang sumbu mayor **tidak harus lebih besar** dari sumbu minor. Hal ini berbeda pada persamaan ellips.

Sketsa grafik persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$ dan posisi titik-titik

($\pm a$, 0), ($\pm c$, 0), dan (0, $\pm b$) dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2

Garis $ax \pm by = 0$ disebut persamaan garis asimtot dari hiperbola

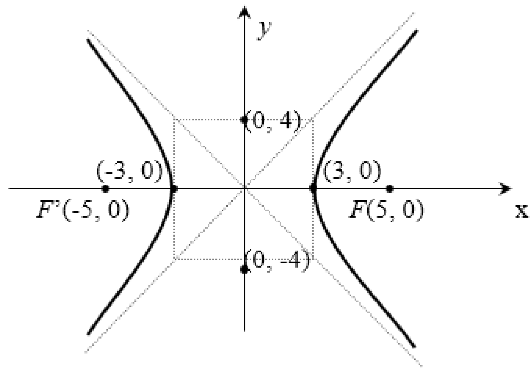
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Contoh 1:

Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Jawab:

Jika kita perhatikan terlihat bahwa $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, dan $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Hiperbola ini mempunyai pusat (0, 0), titik-titik ujung (± 3, 0), dan titik fokus (± 5, 0). Persamaan garis asimtotik hiperbola di atas adalah $3x \pm 4y = 0$. Panjang sumbu mayor = 6 sejajar sumbu-x dan panjang sumbu minor = 8. Sketsa grafik dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 3

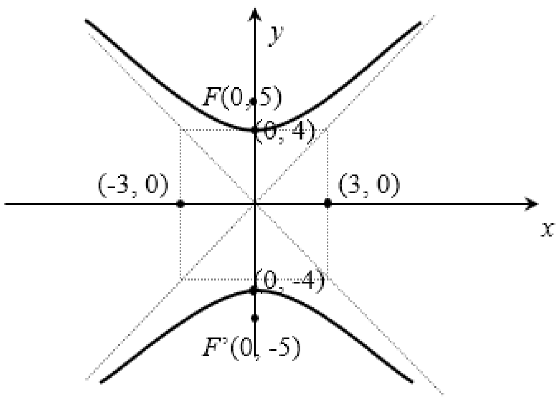
Contoh 2:
Selidiki dan buat sketsa grafik persamaan $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

Jawab:
Kita ubah persamaan $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ ke dalam bentuk baku, yaitu

$16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

$9y^2 - 16x^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Dari persamaan terakhir terlihat bahwa $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, dan $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Hiperbola ini mempunyai pusat (0, 0), titik-titik ujung (0, 4), dan titik fokus (0, 5). Persamaan garis asimtotik hiperbola di atas adalah $4x\ 3y = 0$. Panjang sumbu mayor = 8 sejajar sumbu-x dan panjang sumbu minor = 6. Sketsa grafik dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 4

Contoh 3:

Tentukan persamaan hiperbola yang fokus ($\pm$4, 0) dan titik-titik ujung
($\pm$2, 0).

Jawab:

Karena fokus yang diberikan terletak pada sumbu-x maka bentuk baku dari persamaan hiperbola yang dicari seperti pada teorema 1.

Dari titik fokus yang diberikan maka diperoleh c = 4, titik ujung diperoleh a = 2 dan $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$.

Jadi persamaan yang dicari adalah

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

Untuk memperoleh persamaan hiperbola yang lebih umum, misalkan diadakan translasi pusat sumbu koordinat ke titik (h, k), maka diperoleh persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ menjadi

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Untuk $c^2 = a^2 + b^2$, persamaan di atas adalah persamaan hiperbola dengan pusat di (h, k), titik-titik fokus ($h \pm c$, k) dan titik-titik ujung ($h \pm a$, k)

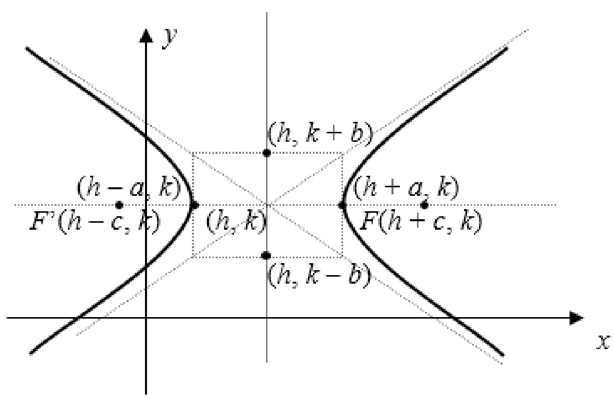
Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai pusat (h, k), fokus ($h \pm c$, k) dan titik-titik ujung ($h \pm a$, k) jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

dengan $b^2 = c^2 - a^2$ (lihat gambar di bawah ini).



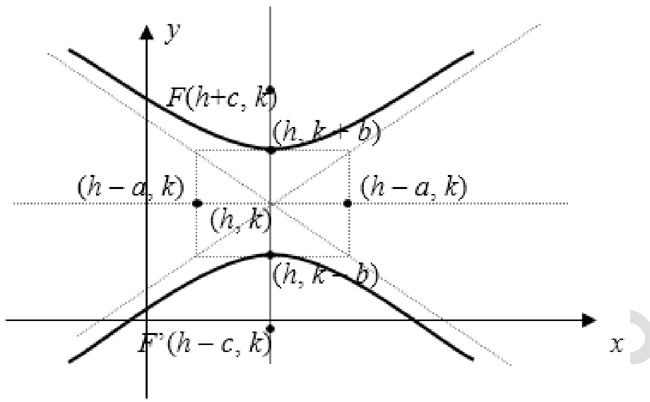
Gambar 5

Teorema 2:

Titik (x, y) berada pada hiperbola yang mempunyai pusat (h, k), fokus (h, $k \pm c$) dan titik-titik ujung (h, $k \pm a$) jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

dengan $b^2 = c^2 - a^2$ (lihat gambar di bawah ini).



Gambar 6

Contoh 4:

Sebuah hiperbola mempunyai persamaan
$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y + 68 = 0$
Tentukan pusat, titik ujung, titik fokus dan gambar grafik hiperbola tersebut.

Jawab:

Kita ubah bentuk persamaan di atas ke dalam bentuk baku seperti pada teorema 3 atau teorema 4.

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y + 68 = 0$$
$$9x^2 - 36x - 4y^2 - 8y = -68$$
$$9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) = -68 + 36 - 4$$
$$9(x - 2)^2 - 4(y + 1)^2 = -36$$
$$4(y + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = 36$$
$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

Dari persamaan terakhir diperoleh informasi $h = 2$, $k = -1$, $a^2 = 9$, dan $b^2 = 4$. Dengan demikian $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$.
Menurut teorema 4 dapatlah disimpulkan bahwa hiperbola yang terjadi berpusat di $(2, -1)$, titik-titik ujungnya $(2, -1 + 3) = (2, 2)$

dan (2, –1 – 3) = (2, –4), titik fokusnya adalah (2, –1 + $\sqrt{13}$) dan (2, –1 – $\sqrt{13}$).

Contoh 3

Carilah persamaan sederhana hiperbola yang-salah satu puncaknya (0, 2√6) dan direktriksnya y = -4. Kemudian tentukan sifat-sifatnya dan sketsa grafiknya.

Jawab:

Puncak pada sumbu y yaitu v_1 (0, 2√6) = v_1 (0, b) maka b = 2√6. Direktriks

y = -4 berarti direktriks yang satu lagi adalah d_1 : y = 4 (sumbu y sebagai sumbu nyata). Dari direktriks y = $\frac{b}{e}$ = 4 dan b = 2 √6 maka eksentrisitas e = ½√6.

Fokus F_1 (0, c) = F_1 (0, be), maka F_1 (0, 6).

Jadi hiperbola yang harus kita cari persamaarmya memiliki salah satu fokus F_1 (0, 6) direktriks d_1 : y = 4 dan eksentrisitas e = ½√6.

Misalkan titik P(x, 4) pada hiperbola. Maka

$$\frac{|P_2F_1|}{jarak(P.d_2)} = e \Leftrightarrow |PF_1| = e \text{ kali jarak } (p, d_{1)}$$

$$\sqrt{(0-x)^2+(6-y)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,|\,y-4\,|$$

$$x^2+36-12y+y^2 = \frac{3}{2}y^2-12y+24$$

$$x^2-\frac{1}{2}y^2 = -12$$

$$\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12} = 1$$

Jadi persamaan sederhana hiperbola yang dicari adalah

$$\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12} = 1$$

Kalau langsung kita gunakan rumus atau bentuk persamaan sederhana hiperbola dengan sumbu y sebagai sumbu nyata. yakni:

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, dan dalam hal ini b = 2 √6,

c = be = (2√6)(½√6) = 6

dan a = $\sqrt{c^2 - b^2}$ = 2√3

maka persamaan hiperbola tersebut adalah

$$\frac{y^2}{(2\sqrt{6})^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{24} - \frac{x^2}{12} = 1$$

Sifat-sifat parabola $\frac{y^2}{24} - \frac{x^2}{12} = 1$ adalah:

1) Pusat o (0, 0)
2) Fokus F1 (0, c) = F1 (0, 6) dan F2 (0, -c) = F2 (0 -6)
3) Eksentrisitas e = $\frac{c}{b}$ = $\frac{6}{2\sqrt{6}}$ = ½√6
4) Direktriks d_1 : y = $\frac{b}{e}$ = 4 dan d_2 : y = -$\frac{6}{e}$ = -4
5) Sumbu x sebagai sumbu imaginer dengan ukuran 2a = 4 √3 dan sumbu y sebagai sumbu nyata dengan ukuran 2b = 4 $\sqrt{6}$
6) Puncak v_1 (0, b) = v_1 (0, 2√6) dan v_2 (0, -b) = v_2 (0,-2√6)
7) Latus rectum y = 6 dan y = -6 dengan titik-titik ujung (√6, 6), (√6, -6), (-√6, 6) dan (-√6, -6)

Rangkuman

1) Hiperbola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik. sehingga perbandingan j arak dari titik ini ke titik tertentu (fokus) dengan jarak ke garis tertentu (direktriks) adalah tetap sama dengan e dan e > 1 (e = eksentrisitas). Atau hiperbola dapat pula didef inisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu (fokus-fokusnya) adalah tetap sama dengan ukuran sumbu nyata.
2) Hiperbola dengan persamaan sederhananya $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$ = 1, memiliki sifat

(a) Pusat o (0, 0)
(b) Fokus F_1 (c, 0) dan F_2(-c, 0)
(c) Terdapat hubungan $c^2 = a^2 + b^2$
(d) Eksentrisitas $\frac{c}{a}$ dengan c > a Jelas c = ae
(e) Direktriks $d_1 : x = \frac{a}{e}$ dan $d_2 : x = -\frac{a}{e}$
(f) Sumbu x sebagai sumbu nyata dengan ukuran 2a dan sumbu y sebagai sumbu imagines dengan ukuran 2b.
(g) Puncak v_1 (a, 0) dan v_2 (-a, 0)
(h) Latus rectum x = c dan x = -c
(i) Asimtot bx + ay = 0 dan bx - ay = 0

SOAL LATIHAN

1) Titik F dan garis d tertentu. Sedangkan titik P bergerak pada bidang dengan syarat:
$$\frac{|PF|}{jarak(P,d)} = k$$
Lintasan atau tempat kedudukan titik P akan berupa sebuah hiperbola, jika k sama dengan …..
2) Jika ukuran sumbu nyata 2p, ukuran sumbu imagine -q dan jarak kedua fokus hiperbola 4r, maka antara p, q dan r terdapat hubungan . . . . . .
3) Hiperbola dengan fokus (4, 0) dan ukuran sumbu nyata 6 memiliki persamaan . . . . .
4) Hiperbola dengan eksentrisitas e = $\frac{3}{2}$ dan salah satu fokusnya (0, 4) memiliki persamaan . . . . .
5) Salah satu asimtot hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ memiliki persamaan . . . . . .
6) Jika sebuah hiperbola memiliki puncak (0. 5) dan ukuran sumbu khayal 2 √11 maka direktriks dari hiperbola ini-memiliki persamaan . . . . .

7) Persamaan latus rectum $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$ adalah . . . . .

8) Selisih panjang jari-jari fokus dari titik (2, 1) pada hiperbola $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ adalah . . . . .

9) Salah satu asimtot adalah y = $\frac{4}{3}$ x dan salah satu puncaknya (0, 5), maka persamaan sederhana hiperbola ini adalah . . . . .

2. Hiperbola Sekawan dan Hiperbola Sama sisi

Tinjau persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. Persamaan ini dapat ditulis $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Sebagaimana telah kita ketahui bahwa ini juga adalah persamaan hiperbola dengan sumbu y sebagai sumbu nyata sumbu x sebagai sumbu imaginer dan asimtotnya y = ± $\frac{b}{a}$ x serta sifat-sifat lainnya yang dimiliki oleh hiperbola ini. Silahkan Anda perinci!

Hiperbola ini didapat dengan jalan saling menukar $\frac{x}{a}$ dan $\frac{y}{b}$ dari hiperbola:

$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Hiperbola $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ dan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dinamakan ***dua hiperbola sekawan.***

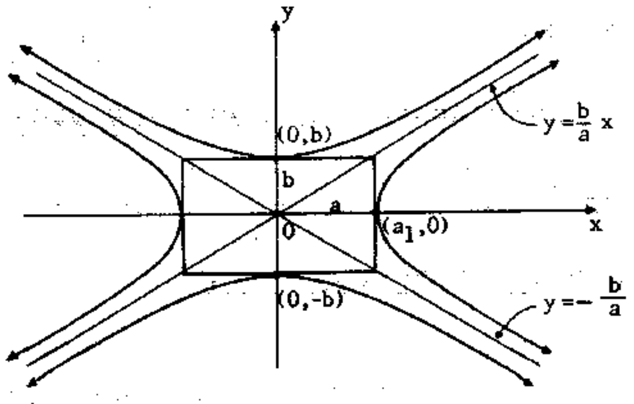
Asimtot kedua hiperbola sekawan adalah sama yaitu y = ± $\frac{b}{a}$ x.

Oleh karena keempat puncak dari kedua hiperbola ini adalah (±a, 0) dan (0, ± b) maka keempat garis singgung di puncak-puncak ini membentuk suatu persegi panjang yang sisinya sejajar dengan kedua sumbu koordinat, sedangkan titik-titik sudutnya terletak pada kedua asimtot. Lihat gambar 2.1

Sekarang kita tinj au persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

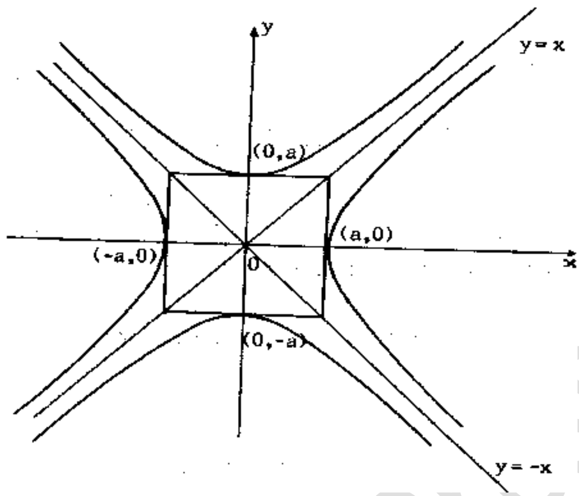
Bila a = b maka persamaan hiperbola menjadi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$.

Hiperbola ini disebut ***hiperbola samasisi***. Ukuran sumbu nyata sama dengan ukuran sumbu imaginer yaitu sama dengan 2a.



Asimtot dari hiperbola samasisi ini adalah z - y = 0 dan z + y = 0. Kedua asimtot ini saling berpotongan tegak lurus (kenapa?). Hiperbola yang mempunyai asimtot saling tegak lurus disebut ***hiperbola ortogonal.***

Jadi hiperbola samasisi adalah jadi hiperbola ortogonal. Grafik hiperbola sekawan samasisi $x^2 - y^2 = a^2$ dan $y^2 - x^2 = a$ diperlihatkan dalam gambar 2.2.



Gambar 2.2

Contoh:

Manakah dari pasangan hiperbola berikut yang sekawan dan manakah dari yang sekawan itu juga samasisi.

1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1,\ \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

2) $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{5}=1,\ \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{8}=1$

3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{1}=1,\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=-1$

4) $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}=1,\ \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=-1$

Jawab :

1) Tidak sekawan
2) Sekawan
3) Sekawan
4) Sekawan dan samasisi

3. Pembicaraan Persamaan $Ax^2 + By^2 + C = 0$

Diasumsikan, bahwa kita mempunyai persamaan $Ax^2 + By2 + c = 0$ dengan A dan B berlawanan tanda dan tidak nol dan $C \neq 0$.

Maka $Ax^2 + By^2 + C = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \dfrac{y^2}{\frac{-C}{B}} = 1$

Karena A dan B berlawanan tanda maka = $\frac{-C}{A}$ dan $\frac{-C}{B}$ berlawanan tanda. Jika $\frac{-C}{A}$ positif, maka $\frac{-C}{B}$ negatif. Sehingga persamaannya berbentuk $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sebaliknya, jika $\frac{-C}{A}$ negatif maka $\frac{-C}{B}$ positif. Sehingga persamaan berbentuk $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Dalam hal ini kita misalkan $\left|\frac{-C}{A}\right| = a^2$ dan $\left|\frac{-C}{B}\right| = b^2$ dengan a dan b tidak nol.

Kedua persamaan di atas adalah persamaan sederhana hiperbola yang kedua fokusnya terletak pada salah satu sumbu koordinat. pusat berimpit dengan titik pangkal dan sumbu x dan sumbu y sebagai sumbu sumbu funya.

Jika A = -B. maka $Ax^2 + By^2 + C = 0$ adalah hiperbola samasisi (kenapa?). Sebagai contoh $4x^2 - 4y^2 - 9 = 0$ dan $8x^2 - 8y^2 + 42 = 0$ adalah hiperbola-hiperbola samasisi.

Sekarang kita asumsikan bahwa C = 0, maka persamaan $Ax^2 + By^2 + C = 0$ menjadi $Ax^2 + By^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{B}{A} y^2 = 0$. Karena A dan B berlawanan tanda, maka $\frac{B}{A}$ negatif dan $-\frac{B}{A}$ positif. Sehingga

$x^2 + \frac{B}{A} y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 -(-\frac{B}{A}) y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y\sqrt{\frac{-B}{A}})(x - y\sqrt{\frac{-B}{A}}) = 0$

$\Leftrightarrow$ (x + y $\sqrt{\frac{-B}{A}}$) = 0, atau (x - y $\sqrt{\frac{-B}{A}}$) = 0

Bentuk persamaan yang terakhir merupakan persamaan dua garis lurus. Jadi untuk C = 0 persamaan hiperbola berubah menjadi dua garis yang berpotongan dan hiperbola ini disebut ***hiperbola tidak benar.***

Contoh

Bicarakanlah persamaan $9x - y^2 - 81 = 0$

Jawab :

Maksud "bicarakanlah" di sini ialah menentukan sifat-sifatnya dan membuat sketsa grafiknya. Untuk persamaan $9x^2 - y^2 - 81 = 0$, berarti

A = 9, B = -1 dan C = -81. Kita ubah kedalam bentuk persamaan sederhana, yaitu:

$9x^2 - y^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = 1$

Berarti $a^2 = |9| = 9$, $b^2 = |-81| = 81$ dan $c^2 = a^2 + b^2 = 90$. maka a = 3, b = 9 dan c = $3\sqrt{10}$. Jadi e = $\frac{c}{a}$ = $\sqrt{10}$ dan sifat-sifat hiperbola tersebut adalah:

Pusat o (0, 0), fokus $F_1(3\sqrt{10}, 0)$ dan $F_2(-3\sqrt{10}, 0)$, direktriks d : x = $\frac{3}{\sqrt{10}}$ dan d : x = $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, sumbu x sebagai sumbu nyata dan sumbu y sebagai sumbu imaginer, puncak (3, 0) dan (-3, 0) asimtot $3x - y = 0$ dan

$3x + y = 0$ dan latus rectum serta ujung-ujungnya?

4. Persamaan Parameter Hiperbola

Tinjau persamaan parameter suatu kurva berbentuk x = a sec θ dan y = b tg θ.

x = a sec θ$\leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \sec\theta \leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = \sec^2\theta$

y = b tg θ.$\leftrightarrow \dfrac{y}{b} = tg\ \ \theta \leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = tg^2\theta$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2\theta - tg^2\theta\ =\ 1$$

Persamaan terakhir di atas adalah persamaan hiperbola dengan sumbu x sebagai sumbu utama (sumbu nyata) dan sumbu y sebagai sumbu tambahan (sumbu imaginer).

Karena titik-titik dari hiperbola dapat dinyatakan oleh persamaan

$$\begin{cases} x = a \sec\theta \\ y = b\ tg\ \theta \end{cases}$$

maka persamaan ini disebut ***persamaan parameter hiperbola .***

(Catatan: θ bisa dalam radian maupun dalam derajat).

5. Garis Singgung Terhadap Hiperbola

Seperti pada elips, kedudukan garis g: y = sx + k terhadap hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dapat kita selidiki sebagai berikut:

Absis-titik potong antara g dan hiperbola diperoleh dari

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(sx+k)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$ $a^2s^2 - b^2)\ x^2 + 2a^2skx + a^2k^2 + a^2 + b^2 = 0$

dengan diskriminan D = $4a^2b^2\ (-a^2s^2 + b^2 + k^2)$

Agar akarnya kembar dengan arti lain agar garis menyinggung hiperbola, syaratnya ialah D = 0, maka diperoleh:

$k^2 = a^2s^2 - b^2 \Leftrightarrow k = \pm\ \sqrt{a^2s^2 - b^2}$.

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ adalah: $y = sx \pm \sqrt{a^2s^2 - b^2}$

Untuk mencari persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat digunakan cara seperti yang telah dipakai untuk garis singgung suatu elips atau parabola.
Hasilnya adalah sebagai berikut:
Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Contoh 1
Carilah persamaan garis singgung yang sejajar garis $x\sqrt{6} - y = 8$ terhadap hiperbola $4x^2 - y^2 = 8$

Jawab:

Hiperbola $4x^2 - y^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ (a = $\sqrt{2}$) dan b = $\sqrt{8}$)

Misalkan s adalah gradien garis singgung yang diminta. Karena garis ini harus sejajar terhadap garis $x\sqrt{6} - y = 8$. maka $s = \sqrt{6}$.
Dengan menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, yakni $y = sx \pm \sqrt{a^2 s^2 - b^2}$ maka persamaan garis g singgung yang harus dicari adalah $y = x\sqrt{6} \pm 2$

Contoh 2

Garis $y = x + 3$ memotong hiperbola $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ pada dua titik.

Tentukan persamaan garis singgung di titik-titik potong ini pada hiperbola

Jawab:

Titik potong antara garis dan hiperbola. dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Maka $5(x + 3)^2 4x^2 = 20$

$x^2 + 30x + 25 = 0$

$x = -15 \pm 10\sqrt{2}$

Untuk $x = -15 + 10\sqrt{2}$, maka $y = -12 + 10\sqrt{2}$

Untuk $x = -15 - 10\sqrt{2}$. maka $y = -12 - 10\sqrt{2}$

Berarti titik potong, antara garis dan hiperbola adalah: $(15 + 10\sqrt{2}, -12 + 10\sqrt{2})$ dan $(-15 - 10\sqrt{2}, -12 - 10\sqrt{2})$

Jadi persamaan garis singgung di titik-titik ini adalah:

$\dfrac{(-12+10\sqrt{2})y}{4} - \dfrac{(-15+10\sqrt{2})y}{5} = 1$, dan

$\dfrac{(-12-10\sqrt{2})y}{4} - \dfrac{(-15-10\sqrt{2})y}{5} = 1$

Rangkuman

1) Hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dan hiperbola $\dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ adalah dua hiperbola sekawan, meniliki asimtot yang sama yakni

   $y = \pm \dfrac{b}{a} x$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$ adalah persamaan hiperbola samasisi (a = b) dengan asimtot $y = \pm x$ yang berpotongan saling tegak lurus. Hiperbola ortogonal ialah hiperbola yang asimtot--asimtotnya berpotongan tegak lurus.

3) Persamaan $Ax^2 + By^2 + C = 0$ dengan A dan B berlawanan tanda mengatakan persamaan hiperbola dan

   Jika $c \neq 0$, maka hiperbola benar

Jika c = 0, maka hiperbola tak benar
Jika A = -B, maka hiperbola sama sisi

4) Persamaan parameter hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Adalah $\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \text{ tg } \theta, \text{ dengan } \theta \text{ parameter} \end{cases}$

5) Persamaan garis singgung dengan gradien s terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah y = sx ± $\sqrt{a^2s^2 - b^2}$

6) Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

SOAL LATIHAN

1) Carilah persamaan hiperbola sama sisi yang berpusat di o (0, 0) dan melalui titik (-4, 2)
2) Manakah dari pasangan berikut yang merupakan pasangan hiperbola sekawan.
   a. $4x^2 - y^2 + 64 = 0$, $x^2 - 4y^2 + 36 = 0$
   b. $2x^2 - y^2 - 36 = 0$, $2y^2 - x^2 - 36 = 0$
   c. $3x^2 - 2y^2 - 40 = 0$, $2y^2 - 3x^2 - 40 = 0$
   d. $4y^2 - 4y^2 + 3 = 0$, $4x^2 - 4y^2 - 3 = 0$
   e. $x^2 - 2y^2 + 8 = 0$, $4y - 2x = -8$
3) Bicarakan setiap persamaan kurva berikut dan sketsa grafiknya
   a. $4^2 - y^2 + 64 = 0$
   b. $x^2 - y - 25 = 0$
   c. $4x^2 - 3y^2 = 0$
4) Ubahlah persamaan hiperbola berikut
   a. $\begin{cases} x = 3 \sec \theta \\ y = 2 \text{ tg } \theta \end{cases}$ menjadi persamaan sederhana
   b. $3x^2 - 2y^2 + 3 = 0$ menjadi persamaan parameter

5) Carilah persamaan garis singgung terhadap hiperbola $\frac{x^2}{4}$ - $\frac{y^2}{1}$ = 1, jika
   a. gradiennya 2
   b. melalui titik (0. 1)
6) Hiperbola ortogonal yang berpusat O (0, 0) dan fokus (4, 0) memiliki persamaan . . . .
7) Persamaan $px^2 + Qy^2 + R = 0$ menyatakan hiperbola tak benar, Jika . . . .
8) Salah satu fokus dari hiperbola $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ adalah . . . .
9) Eksentrisitas hiperbola $16x - 9y^2 = 144$ adalah . . . .
10) Asimtot-asimtot hiperbola $x^2 - 9y^2 - 9 =$ memiliki persamaan . . .
11) Persamaan parameter dari hiperbola $4x^2 - \frac{1}{4} y^2 = 1$ adalah . . . . .
12) Jika persamaan parameter hiperbola

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \text{ tg } \theta \\ y = \sec \theta \end{array} \right.$$

   diubah ke dalam persamaan sederhana, menjadi . . . .
13) Kedudukan garis $y = 2x$ terhadap hiperbola $x^2 - 3y^2 - 8 = 0$ adalah . . . .
14) Garis singgung terhadap hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{20} = T$ dan sejajar dengan garis $2x - y + 5 = 0$ adalah . . . . .
15) Persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap hiperbola $\frac{y^2}{p^2} - \frac{x^2}{q^2} = 1$. Adalah . . . .
16) Persamaan garis singgung di titik $(2, \sqrt{2})$ pada hiperbola $x^2 - y^2 = 2$ adalah . . . . .

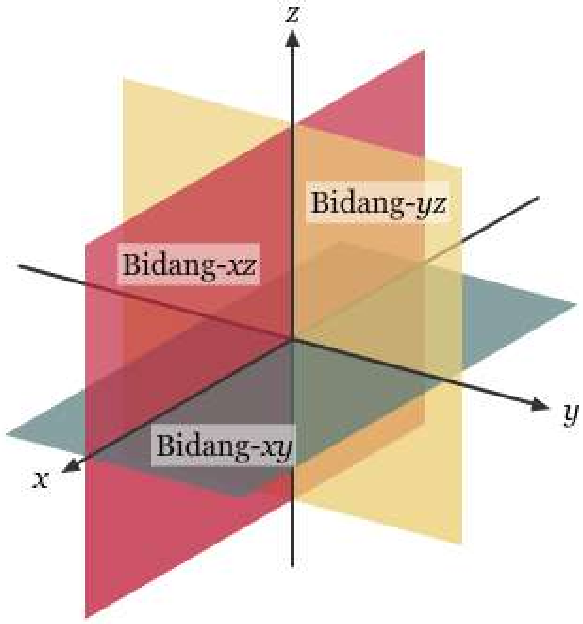
BAB VII

DIMENSI TIGA (R^3)

A. Sistem Koordinat Tegak Lurus Demensi Tiga (R^3)

Suatu sistem koordinat tegak lurus (sistem koordinat Cartesian) di dalam ruang ditentukan dengan memilih suatu satuan panjang serta tiga buah garis lurus yang masing-masing saling tegak lurus dan berpotongan di satu titik. Ketiga garis tersebut disebut dengan sumbu-sumbu koordinat, dan ditentukan pula oleh himpunan semua triple-triple terurut dari bilangan Real

Perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 1 Sistem koordinat tiga dimensi

Didalam ruang demensi tiga (R3) , ruang terbagi menjadi delapan bagian. Masing-masing bagian dsisebut Oktan dan akan dsiberi nomor menurut aturan sebagai berikut :

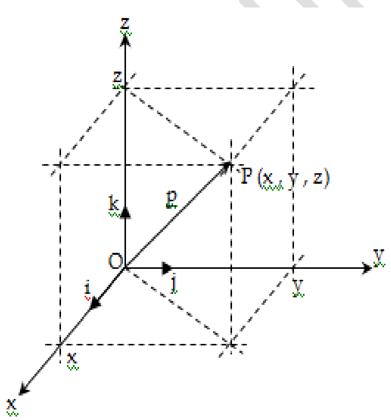
Oktan	**Nilai X**	**Nilai Y**	**Nilai Z**
I	x > 0 (x positip)	y>0 (y positip)	z>0 (z positip)
II	x < 0 (x negatip)	y>0 (y positip)	z>0 (z positip)
III	x < 0 (x negatip)	y<0(y negatip)	z>0 (z positip)
IV	x > 0 (x positip)	y<0(y negatip)	z>0 (z positip)
V	x > 0 (x positip)	y>0 (y positip)	z<0 (z negatip)
VI	x < 0 (x negatip)	y>0 (y positip)	z<0 (z negatip)
VII	x < 0 (x negatip)	y<0(y negatip)	z<0 (z negatip)
VIII	x > 0 (x positip)	y<0(y negatip)	z<0 (z negatip)

Dengan melihat tabel diatas, kita daopat menentukan letak titik dalam R3.

Contoh :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Titik A } (-2, 5, -7)\\ \text{Nilai } x = -2 \text{ (negatip)}\\ \text{Nilai } y = 5 \text{ (posotip)}\\ \text{Nilai } z = -7 \text{ (negatip)}\end{array}\right\}\ \text{Berarti titik A terletak pada Oktan VI}$$

Letak titik dalam R³



Titik P (x, y , z) berada di Oktan I.

Dalam bentuk vektor :

Vektor OP = $\vec{p}$ = xi + yj + zk

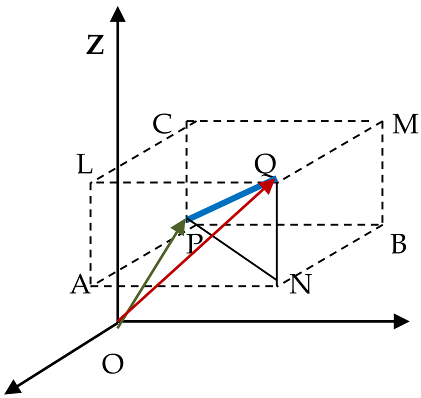
I,j,dan k merupakan vektor satuan

Vektor $\vec{p}$, juga dapat

ditulis dengan : $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

B. Jarak Dua Titik Dalam R³

Kita hendak mentukan jarak titik P (x_1 , y_1,z_1) dan Q (x_2 , y_2, z_2)
Perhatikan paralel-epipedum ANBPLQMC



$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{OQ} = \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Panjang Vektor PQ = Jarak titi P ke Q =

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh :
Tentukan jarak titik A (-3 , 6, -1) dan R (5 , -7, -3) ?

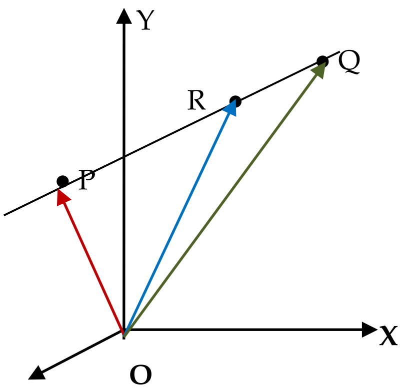
Jawab :

$$AR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(5-(-3))^2 + (-7-6)^2 + (-3-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{237}$$

C. Koordinat Titik yang Membagi Ruas Garis PQ atas Perbandingan m : n



$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{OQ} = \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{OR} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR} \Leftrightarrow \vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = \vec{r} - \vec{p}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ} \Leftrightarrow \vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{q} - \vec{r} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

Jika diketahui : PR : RQ = m : n , maka :

$$\frac{\vec{PR}}{\vec{RQ}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow n\,\vec{PR} = m\,\vec{RQ}$$

$$n \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \mathrm{m} \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n(x - x_1) \\ n(y - y_1) \\ n(z - z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(x_2 - x) \\ m(y_2 - y) \\ m(z_2 - z) \end{pmatrix}$$

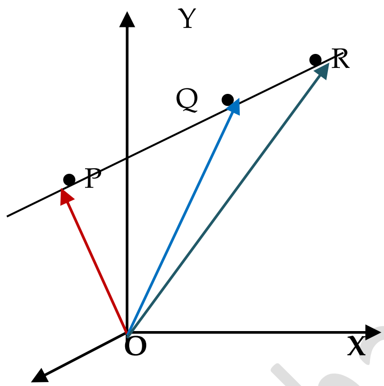
$$nx - nx_1 = mx_2 - mx \Leftrightarrow (n+m)x = mx_2 + nx_1 \Leftrightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$ny - ny_1 = my_2 - my \Leftrightarrow (n+m)y = my_2 + ny_1 \Leftrightarrow y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$nz - nz_1 = mz_2 - mz \Leftrightarrow (n+m)z = mz_2 + nz_1 \Leftrightarrow z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

Jadi koordinat titik R $\left(\frac{mx_2 + mx_1}{m+n}, \frac{my_2 + my_1}{m+n}, \frac{mz_2 + mz_1}{m+n}\right)$

Bagaimana jika titik R berada diperpanajangan PQ ?



$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{OQ} = \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \vec{OR} = r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR} \Leftrightarrow \vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = \vec{r} - \vec{p}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ} \Leftrightarrow \vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{q} - \vec{r} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

Jika diketahui : PR : RQ = m : n , maka :

$$\frac{\vec{PR}}{\vec{RQ}} = \frac{m}{-n} \Leftrightarrow -n\,\vec{PR} = m\,\vec{RQ}$$

$$-n\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \mathrm{m}\begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n(x - x_1) \\ -n(y - y_1) \\ -n(z - z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(x_2 - x) \\ m(y_2 - y) \\ m(z_2 - z) \end{pmatrix}$$

$$-nx + nx_1 = mx_2 - mx \Leftrightarrow (-n+m)x = mx_2 - nx_1 \Leftrightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

$$-ny + ny_1 = my_2 - my \Leftrightarrow (-n+m)y = my_2 - ny_1 \Leftrightarrow y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

$$-nz + nz_1 = mz_2 - mz \Leftrightarrow (-n+m)z = mz_2 - nz_1 \Leftrightarrow z = \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}$$

Jadi koordinat titik R $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$

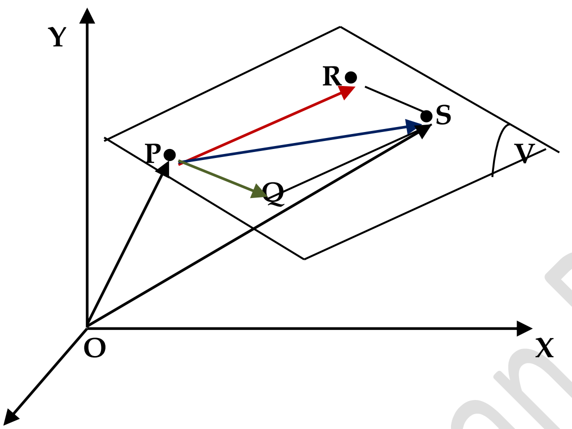
Secara umum :
kita menulis perbandingan m : n = k, dimana k boleh negatip atau positip, tergantung letak titik R apakah terletak diantara titik PQ ataukah pada perpanjangannya.
Jika :
K > 0 maka R terletak diantara P dan Q
-1 < k < 0, maka R terletak diperpanjangan QP (pada pihak P)
K = -1 , menunjukkan suatu titik di tak terhingga
K < -1 , maka R terletak di perpanjangan PQ (pada pihak Q)
Dalam hal ini koordinat titik R menjadi :

R $\left(\frac{kx_2 + x_1}{k}, \frac{ky_2 - y_1}{k}, \frac{kz_2 - z_1}{k}\right)$**, dimana k ≠ -1**

D. Persamaan Bidang Datar dalam R³

1. Persamaan Vektoris Bidang Datar

Suatu bidang datar akan dapat ditentukan jika diketahui tiga titik yang tidak segaris dan terletak pada bidang datar tersebut. Misalkan diketahui tiga titik pada bidang V :



Diketahui : P (x_1, y_1, z_1) , Q (x_2, y_2, z_2), R(x_3, y_3, z_3)

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

Untuk setiap titik sebarang S (x , y , z) pada bidang V, berlaku :

$$\vec{PS} = \lambda\ \vec{PQ} + \mu\ \vec{PR}\ \ (-\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty)$$

Pada gambar diatas :

$$\vec{OS} = \vec{0P} + \vec{PS} = \vec{0P} + \lambda\vec{PQ} + \mu\ \vec{PR}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}, \text{utk:} -\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty$$

(1)

Jika : $(x_2 - x_1) = x_a$, $(y_2 - y_1) = y_a$ dan $(z_2 - z_1) = z_a$

$(x_3 - x_1) = x_b$, $(y_3 - y_1) = y_b$ dan $(z_3 - z_1) = z_b$

Maka :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}, \text{ utk: } -\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_a, y_a, z_a] + \mu[x_b, y_b, z_b]$$

………(2)

Persamaan (2) disebut ***Persamaan Vektoris bidang datar***

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda x_a + \mu x_b \text{.............}(3) \\ y &= y_1 + \lambda y_a + \mu y_b \text{.............}(4) \\ z &= z_1 + \lambda z_a + \mu z_b \text{...............}(5) \end{aligned}\right\}$$

disebut ***Persamaan parameter bidang datar***

2. <u>Persamaan Linier Bidang Datar</u>

Jika λ dan μ kita eliminasikan dari persamaan (3) dan (4), diperoleh

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{y_b(x - x_1) - x_b(y - y_1)}{C} \\ \mu &= \frac{x_a(y - y_1) - y_a(x - x_1)}{C} \end{aligned}\right\} C = x_a y_b - y_a x_b = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \ldots(6)$$

Jika λ dan μ kita disubstitusikan ke persamaan (5), diperoleh:

$$C(z - z_1) - z_a\{y_b(x - x_1) - x_b(y - y_1)\} - z_b\{x_a(y - y_1) - y_a(x - x_1)\} = 0$$

$$(y_a z_b - z_a y_b)(x - x_1) + (z_a x_b - x_a z_b)(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \text{...........}(7)$$

$$(y_a z_b - z_a y_b) = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} = A \text{ dan } (z_a x_b - x_a z_b) = \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} = B$$

Maka persamaan (7), menjadi :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{............}(8)$$

Persamaan (8) disebut ***Persamaan Linier (umum) bidang datar***

3. Vektor Normal dari bidang Datar V ≡ Ax + By + Cz + D = 0

Vektor :

$$[A,B,C] = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = a \times b$$

$a \times b$, merupakan vektor yang tegak lurus pada bidang datar yang dibentuk oleh a dan b, dalam hal ini bidang datar :

V ≡ Ax + By + Cz + D = 0
$n = [A,B,C]$ disebut vektor normal dari bidang rata :
V ≡ Ax + By + Cz + D = 0
Vektor normal ini akan memegang peran penting dalam pembahasan selanjutnya.

Dari persamaan (7) diatas, suatu bidang datar yang diketahui melalui titik (x_1 , y_1,z_1) dengan vektor normal $n = [A,B,C]$ berbentuk :
$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ ………………..(9)

Hal-hal khusus dari bidang datar : V ≡ Ax + By + Cz + D = 0

a. Jika D = 0, maka bidang datar melalui titik asal O(0,0,0) dan sebaliknya , setiap bidang datar yang melalui titik asal persamannya akan mempunyai harga D = 0
b. Jika D $\neq$ 0, maka persamaan bidang V, dapat ditulis :

$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1$ dan berturut-turut :

$\frac{A}{-D}=p, \quad \frac{B}{-D}=q, \quad \frac{C}{-D}=r$, diperoleh :

px + qy + rz = 1, bidang ini memotong sumbu X di (p,0,0), sumbu Y di (0,q,0) dan sumbu Z di (0,0,r)

c. Jika A = 0, maka bidang sejajar sumbu X
Jika B = 0, maka bidang sejajar sumbu Y
Jika C = 0, maka bidang sejajar sumbu Z
Jika A = B = 0, bidang sejajar dengan bidang XOY
Jika A = C = 0, bidang sejajar dengan bidang XOZ
Jika B = C = 0, bidang sejajar dengan bidang YOZ

Contoh 1 :

Diketahui titik (1,1,2), (2,3,5) , dan (1,3,7).
Tentukan

a. Persamaan vektori bidang yang melalui ketiga titik tersebut?
b. Persamaan meter bidang ?
c. Vektor normal bidang ?
d. Persamaan linier bidang ?

Jawab :

a. Persamaan vektoris bidang :

$$[x, y, z]=$$
$$[x_1, y_1, z_1]+\lambda[x_a, y_a, z_a]+\mu[x_b, y_b, z_b]$$
$$[x, y, z]=[1,1,3]+\lambda[2-1,3-1,5-1]+\mu[1-1,3-1,7-2]$$
$$[x, y, z]=[1,1,3]+\lambda[1,2,4]+\mu[0,2,5]$$

b. Persamaan parameter bidang :

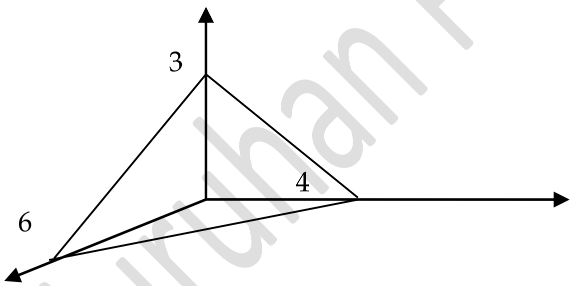
x = 1 + λ
y = 1 +2λ + 2μ
y = 3 + 4λ + 5μ

c. Vektor normal :
   Cross product dari $[1,1,3] X [0,2,5] = [4,-5,2]$

d. Persamaan linier bidang :
   $$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$
   4(x – 1) + (-5) (y – 1) + 2 (z – 3) = 0
   4x – 5y + 2z -13 = 0

Contoh 2 :

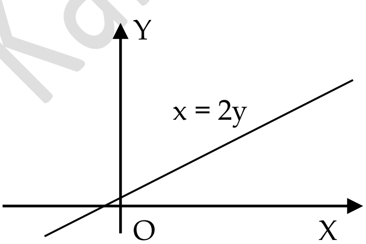
Ganbarlah bidang 2x + 3 y + 4z = 12 dapat ditulis men $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ akan memotong sumbu koordinat di titik (6,0,0), (0,4,0), dan (0,0,3)



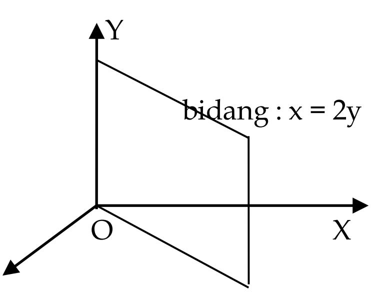
Contoh 3

Gambarlah bidang x = 2y

Dalam R^2



Dalam R^3



Catatan :

1) Cara lain mencari persamaan linier bidang datar yang melalui titik P (x_1 , y_1,z_1) , Q (x_2 , y_2, z_2), dan R(x_3 , y_3, z_3) , adalah dengan menggunakan diterminan matriks :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh :

Tentukan persmaan linier bidang datar yang melalui titik A(-1,2,1) , B(-2,-4, 2), dan R(-1 , 4,-1) ?

Jawab :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-1 \\ -2-(-1) & 4-2 & 2-1 \\ -1-(-1)_1 & 4-2 & -1-1 \end{vmatrix} =\backslash$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x+1 & y-2 & z-1 & x+1 & y-2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right| =$$

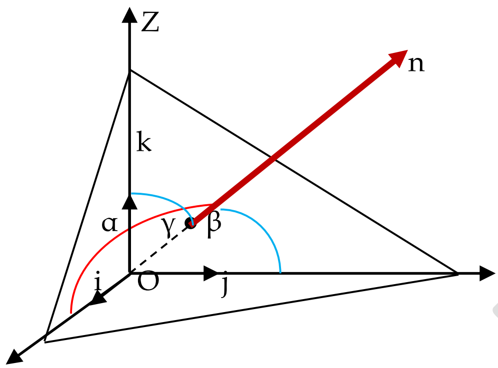
-4(x+1) + 0 -2(z-1) - {0+2(x+1)+2(y-2) = - 6x – 2y -2z = 0

2) Empat titik terletak satu bidang jika :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \mathbf{= 0}$$

4. Persamaan Normal Bidang Rata

Misalkan n = [A,B,C] adalah vektor normal bidang V = Ax + By + C + D = 0, α , β , γ , berturut – turut sudut antara vektor n dengan sumbu-sumbu koordinat (yang arahnya ditentukan oleh vektor I, j, dan k ternyata :



$$\left.\begin{array}{l} n.i = |n|\,|i|\cos\alpha \leftrightarrow \cos\alpha = A/|n| \\ n.j = |n|\,|j|\cos\beta \leftrightarrow \cos\beta = B/|n| \\ n.k = |n|\,|k|\cos\gamma \leftrightarrow \cos\gamma = C/|n| \\ \text{atau :} \end{array}\right\} \quad \ldots.(1)$$

$$[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma] = [A, B, C]/|n| = n/|n|$$

[cos α, cos β , cos γ]= [A , B, C]/|n|= n/|n| , vektor ini merupakan vektor satuan yang searah dengan vektor Normal n. Untuk n vektor satuan, maka |n| = 1 , dan n = [cos α, cos β , cos γ] disebut vektor cosinus dari bidang V.

Misalkan d adalah jarak titik (0,0,0) ke bidang V = 0, dimana d ≥ 0 dan X(x,y,z) titik sebarang pada bidang , maka d adalah proyeksi OX = [x,y,z] pada vektor n yaitu : d = OX . n = [x,y,z] [cos α, cos β , cos γ] atau x cos α + y cos β + z cos γ = d yang d , persamaan ini disebut dengan persamaan normal Hesse dari bidang V = 0.

Untuk mengubah bentuk V = Ax + By + Cz + D = 0 ke bentuk normal maka kita substitusikan persamaan (1) kedalam V, kita peroleh :

$|n|(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = -D$…………………………(2)

Kita selalu menghendaki –D/n = d positip. Jadi kalau D negatip, maka masing-masing ruas persamaan (2) kita bagi dengan |n| =

$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, kalau D positip , masing-masing ruas kita kalikan dengan - |n

Contoh :

Carilah bentuk normal dari 3x + 6y – 2z + 6 = 0

Jawab :

D = 6 adalah positip,sedangkan |n| = $\sqrt{9+36+4}=7$

Jadi persamaan normalnya adalah : $\frac{-3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{t}z=\frac{6}{7}$

5. **Sudut Antara Dua Bidang**

Sudut antara dua bidang tidak lain adalah sudut antara vektor-vektor normalnya. Sudut antara bidang V = Ax + By + Cz + D = 0 dan bidang W = Px + Qy + Rz + S = 0 adalah sudut antara normal-normal.

$$n_1=[A,B,C] \;\; dan \;\; n_2=[P.Q,R]$$

$$Cos\theta=\frac{n_1.n_2}{|n_1||n_2|}=\frac{AP+BQ+CR}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

Contoh :

Tentukan Sudut antara bidang x + y + z + 3 dan bidang 2x + y + 2z -11 = 0

Jawab :

$$Cos\theta=\frac{AP+BQ+CR}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

$$Cos\theta=\frac{1.2+1.1+1.2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$jadi \;\; \theta = \;\; arc \;\; \cos\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$$

a. ***Dua Bidang Sejajar***

Jika V dan W dua bidang yang sejajar, maka mempunyai vektor normal sama Atau berkelipatan.

Berarti :

$n_1 = \left[A, B, C\right] \ = \ \lambda \left[P.Q, R\right]$ adalah syarat dua bidang sejajar. (λ sebarang $\neq 0$

Contoh :

Bidang datar V sejajar bidang datar W = x + y + 5z = 9 . jika V melalui titik (0,2,1) tentukan persamaan bidang V ?

Jawab :

Karena sejajar maka vektor normal V adalah : n = [1,1,5],

Jadi persamaan bidang V = x + y + 5z + D = 0.

V melalui titi (0,2,1). Maka : 0 + 2 + 5 + D = 0 ↔ D = -7

Persamaan bidang V = x + y + 5z – 7 = 0

b. ***Dua Bidang Salingh Tegak Lurus***

Jika bidang V dan W saling tegak lurus maka vektor normalnya juga akan saling tegak lurus ($n_1 \perp n_2$) atau $n_1.n_2 = 0 \Leftrightarrow AP + PQ + RS = 0$

Contoh :

Tentukan persamaan bidang datar V yang tegak lurus dengan bidang datar W = x + y + z = 1 serta melalui titik (0,0,0) dan (1,1,0)

Jawab :

Misalkan V = Px + Qy +Rz + S = 0, tegak lurus W, maka :

P.1 + Q . 1 + R . 1 = 0 atau P + Q + R = 0…(1)

V melalui (0,0,0), berarti D = 0, dan

V melalui (1,1,0) berarti P + Q = 0 ↔P = -Q. …(2)

Substitusi (2) ke (1), maka R = 0

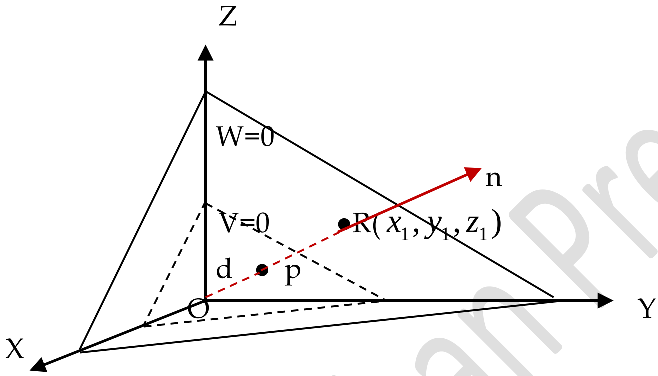
Persamaan W adalah –Qx + Qy +0.z + 0 = 0

Q(-x + y) = 0 ↔ -x + y = 0

6. Jarak Titik ke Bidang Datar V

Pandang bidang V = x cos α + y cos β + z cos γ = d . kita hendak menentukan jarak titik R (x_1, y_1, z_1) ke bidang V. Kita buat bidang W sejajar dengan bidang V melalui titik R.

Jadi vektor normal bidang V dan bidang W sama, sedangkan jarak titik masal ke bidang W adalah d ± p (tergantung letak bidang V dan W dengan titik O (0,0)



W = x cos α + y cos β + z cos γ = d ± p, karena R (x_1, y_1, z_1) pada W, maka

$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = d \pm p$ atau

$p = \left| \; x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - d \; \right|$ adalah jarak titik R (x_1, y_1, z_1) ke bidang V= = x cos α + y cos β + z cos γ = d

Jika V berbentuk : Ax + By + Cz + D = 0, maka :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Contoh:

Tentukan jarak titik (4,7,3) ke bidang : 2x + 6y -3z -13 = 0

Jawab :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{2.4 + 6.7 - 3.3 - 13}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} \right| = 4$$

Jadi jarak antara titik (4,7,3) ke bidang : 2x + 6y -3z -13 = 0 adalah = 4

7. Jarak Antara Dua Bidang yang Sejajar

Cara mencari jarak antara dua bidang yang sejajar, adalah dengan mengambil titik sebarang pada bidang V dan selanjutnya menentukan titik tersebut dengan bidang W.

Contoh :

Tentukan jarak anatara bidang V = x + y +z -2= 0 dengan bidang W = x + y +z – 5 = 0 ?

Jawab :

Pilih titik R pada V, dengan memisalkan x = 0, y = 0, maka z = 2, maka R (0,0,2) .

Jarak titik R(0,0,2) ke bidang W

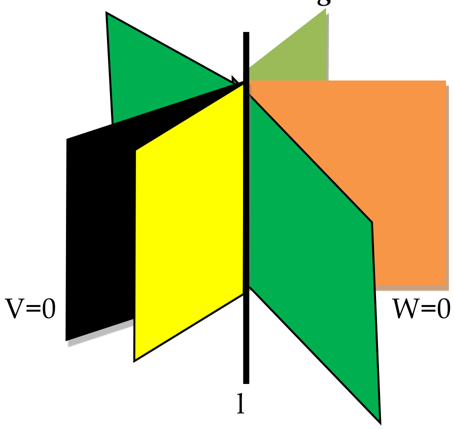
$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{1.0 + 1.0 + 1.2 - 5}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

8. Berkas Bidang Datar

Bidang-bidang V = Ax + By + Cz + D = 0 dan bidang W = Px + Qy + Rz + S = 0 berpotongan memembentuk garis lurus. Setiap titik pada garis potong tersebut memenuhi persmaan : V + λ W = 0, adalah persamaan bidang yang melalui garis potong V= 0 dan W = 0. Jika bidang V dan W sejajar, maka berkas bidang V + λ W = 0 merupakan himpunan-himpunan bidang yang sejajar dengan V = 0 dan W = 0.

Berikut ini gambar berkas bidang:

Gambar Berkas Bidang



Bidang V = 0 dan W = 0 berpotongan di garis l, maka setiap bidang yang melalui garis potong tersebut disebut berkas garis;

Persamaan berkas garisnya adalah :

$V + \lambda\, W = 0$

Contoh :

Tentukan persamaan bidang datar W yangt melalui titik (0,0,0) serta melalaui garis potong bidang-bidang : $V = 2x + 3y + 24 = 0$ dan $U = x - y + 2z = 12$?

Jawab :

W dapat dimisalkan berbentuk : $V + \lambda\, U = 0$

$(2x + 3y + 24) + \lambda\, (x - y + 2z-12) = 0$

Karena W melalui titik (0,0,0), maka :

$(2.0 + 3.0 + 24) + \lambda\, (0 - 0 + 2.0 -12) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

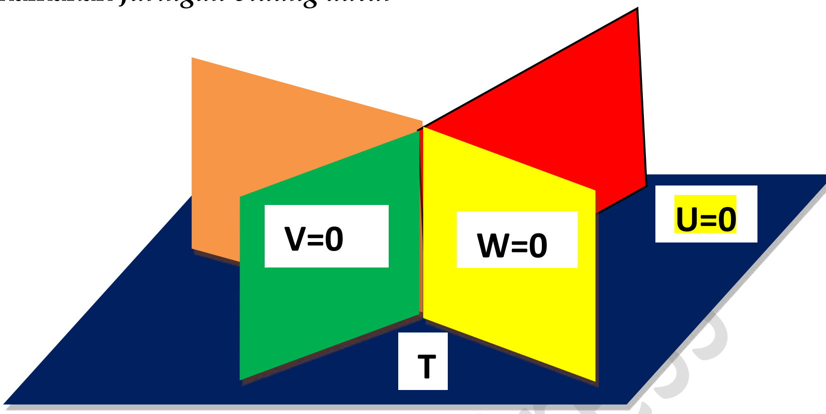
Jadi persaman bidang $W = (2x + 3y + 24) + \lambda\, (x - y + 2z-12) = 0$

$= (2x + 3y + 24) + 2\, (x - y + 2z-12) = 0$

$= 4x - y + 4z = 0$

9. Jaringan Bidang Datar

Pandang bidang-bidang U = 0, V = 0 dan W = 0 yang tidak terletak dalam sebuah berkas yang sama (tidak berpotongan pada satu garis atau sejajar satu dengan yang lain). Persamaan : $U + \lambda V + \mu V = 0$ merupakan himpunan bidang-bidang yang melalui titik potong ketiga bidang tersebut (pada gambar dibawah melalui titik A) , dan himpunan bidang-bidang yang melalui titik tersebut dinamakan ***Jaringan bidang datar***



Gambar : Jaringan Bidang Datar

Contoh :

Tentukan persamaan bidang datar V yang sejajar bidang U = x + y + z = 1, serta melalui titik potong bidang-bidang $W_1 = x - 3 = 0$, $W_2 = y-4 = 0$, dan $W_3 = z = 0$?

Jawab :

Bidang rata V berbentuk : $W_1 + \lambda W_2 + \mu W_3 = 0$

$x-3 + \lambda(y-4) + \mu z = 0$

$x + \lambda y + \mu z -3 - 4\lambda = 0$, karena V sejajar dengan U = x + y + z = 1,maka normal dari bidang V = normal bidang U = [1,1,1]

karena normal didang V = [1, λ, μ], maka : [1,1,1] =[x, λ, μ], berarti

$\lambda = 1$ dan $\mu = 1$.

Jadi persamaan bidang V adalah :

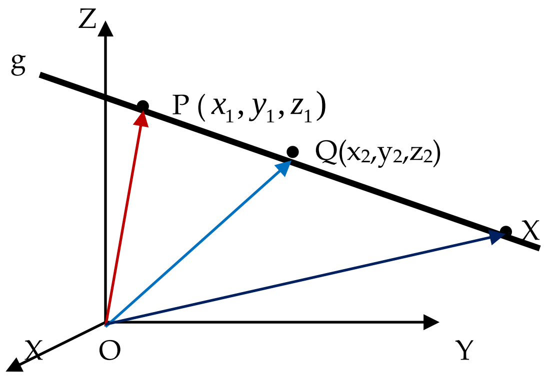
$x + \lambda y + \mu z -3 - 4\lambda = 0$

$x + y + z -3 - 4.1 = 0$

$x + y + z - 7 = 0$

E. PERSAMAAN GARIS LURUS DALAM R³

1. Persamaan Vektoris Garis Lurus



Sebuah garis lurus dapat ditentukan jika diketahui 2 titik pada garis tersebut. Misal titik P (x_1, y_1, z_1) Dan titik Q (x_2,y_2,z_2) terletak pada garis lurus g.

Maka : OP = $[x_1, y_1, z_1]$

OQ = $[x_2, y_2, z_2]$

PQ = $[(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$

Untuk setiap titik sebarang X (x,y,z) pada g,berlaku PX = λ PQ , untuk $(-\infty < \lambda < \infty)$. Jelas bahwa OX = OP + PX

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$ ....(1)

Persamaan (1) disebut ***Persamaan vektoris garis lurus*** yang melalui titik

$P(x_1, y_1, z_1)\ dan\ Q(x_2, y_2, z_2)$

Vektor PQ disebut vektor arah garis lurus. Jadi bila garis lurus melalui satu titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan mempunyai vektor arah $a = [a, b, c]$,persamaan garis lurus dalam demensi 3 adalah :

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, b, c]$, untuk $(-\infty < \lambda < \infty)$ ....(2)

Contoh :

Tentukan persamaan vektoris garis lurus yang melalui titik (1,3,2) dan (5,-3,2).

Jawab :

Persamaan garis lurus melelui titik (1,3,2) dan (5,-3,2) adalah :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\, [(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$$

$$[x, y, z] = [1,3,2] + \lambda\, [(5-1), (-3-3), (2-2)]$$

$$[x, y, z] = [1,3,2] + \lambda\, [(4, -6, (0)]$$

2. **Persamaan Parameter Garis Lurus dalam R^3**

Dari persamaan (2) diatas :

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\, [a, b, c]$, untuk $(-\infty < \lambda < \infty)$ ……..(3)

Diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda a \\ y &= y_1 + \lambda b \\ z &= z_1 + \lambda c \end{aligned}\right\}$$ disebut ***persamaan parameter garis lurus***

3. **Persamaan Garis Lurus yang Melalui Titik (x_1,y_1,z_1) dan vektor arah**

a = $[a, b, c]$

Dari persamaan parameter garis lurus diatas, kita peroleh :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda a \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{a} \\ y &= y_1 + \lambda b \Leftarrow \lambda = \frac{y - y_1}{b} \\ z &= z_1 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda = \frac{z - z_1}{c} \end{aligned}\right\} \text{, maka : } \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

….(4)

4. Persamaan Garis Lurus yang Melalui Titik $\left[x_1, y_1, z_1\right]$dan $\left[x_2, y_2, z_2\right]$

Dari persamaan (4) :

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$, karena :

$$\left.\begin{aligned} a &= x - x_1 \\ b &= y - y_1 \\ c &= z - z_1 \end{aligned}\right\}, \text{ maka: } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{......(5)}$$

Persamaan (5) disebut persamaan garis lurus yang melalui titik $\left[x_1, y_1, z_1\right]$dan $\left[x_2, y_2, z_2\right]$

Dengan syarat :

$(x_2 - x_1) \neq 0,\ (y_2 - y_1) \neq 0,\ (z_2 - z_1) \neq 0$

5. Hal-hal Khusus Tentang Garis Lurus denagn Vektor Arah $\left[a, b, c\right]$

a. Garis lurus melalui ttitik O(0,0,0) akan berbentuk : $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$

b. Jika a = 0, Vektor arah $\left[0, b, c\right]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang YOZPersamaan (3), menjadi :

$$\left[x, y, z\right] = \left[x_1, y_1, z_1\right] + \lambda \left[a, b, c\right]$$
$$\left[x, y, z\right] = \left[x_1, y_1, z_1\right] + \lambda \left[0, b, c\right]$$
$$x = x_1 + \lambda.0 \Leftrightarrow x = x_1$$
$$y = y_1 + \lambda b \Leftrightarrow \lambda = \frac{y - y_1}{b}$$
$$z = z_1 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

Sehingga persamaan garis tersebut :

$$x = x_1 \ , \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

c. Jika b = 0, Vektor arah $[a,0,c]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang XOZ

Persamaan (3), menjadi :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, b, c]$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, 0, c]$$

$$x = x_1 + \lambda.a \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{a}$$

$$y = y_1 + \lambda.0 \Leftrightarrow y = y_1$$

$$z = z_1 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

Sehingga persamaan garis tersebut :

$$y = y_1 \ , \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}$$

d. Jika b = 0, Vektor arah $[a,b,0]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang XOY

Persamaan (3), menjadi :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, b, c]$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda\ [a, b, 0]$$

$$x = x_1 + \lambda.a \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{a}$$

$$y = y_1 + \lambda.b \Leftrightarrow \lambda = \frac{y - y_1}{b}$$

$$z = z_1 + \lambda.0 \Leftrightarrow z = z_1$$

Sehingga persamaan garis tersebut :

$$z = z_1 \;, \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

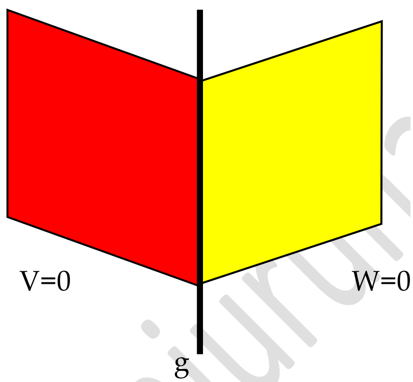
e. Jika a = c = 0, vektor $[0, b, 0]$ sejajar dengan arah sumbu Y .

f. Jika a = b = 0, vektor $[0, 0, c]$ sejajar dengan arah sumbu Z .

g. Jika b = c = 0, vektor $[a, 0, 0]$ sejajar dengan arah sumbu Z .

6. Persamaan Garis Lurus Sebagai Perpotongan Dua Bidang Datar

Kita dapat menyatakan suatu garis lurus sebagai perpotongan dua bidang datar .



Misalnya garis lurus tersebut adalah perpotongan bidang :

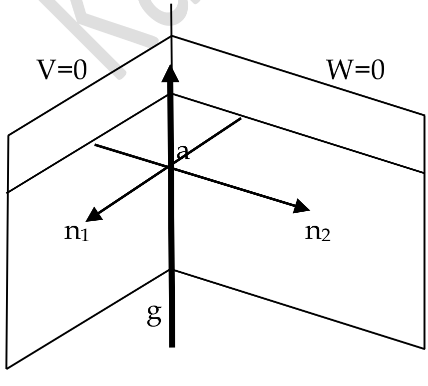
V = Ax + By + Cz + D = 0 dan bidang

W = Px + Qy + Rz + S = 0

Maka persamaan garis lurus g dapat ditulis :

$$g : \begin{cases} V = Ax + By + Cz + D = 0 \\ W = Px + Qy + Rz + S = 0 \end{cases}$$

Untuk menentukan vektor arah garis lurus perpotongan dua bidang tersebut, kita perhatikan gambar berikut ini :



$$n_1 = [A, B, C], \quad dan \;\; n_2 = [P, Q, R]$$

$$n_1 \text{ X } n_2 = a$$

a adalah vektor arah garis g, jadi :

$$a = [a, b, c] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A & B & C \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad \text{.......(1)}$$

Persamaan (1), sama dengan :

$$a = \left[\begin{vmatrix} B & C \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ P & R \end{vmatrix}\right],$$

dimana untu memudahkan mengingatnya, kita tulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{cccccc} & \multicolumn{2}{c}{a} & & c & \\ A & B & C & A & B & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \\ P & Q & R & P & Q & \\ & & \multicolumn{2}{c}{b} & & \end{array}$$

Untuk mengubah bentuk persamaan V = 0 = W menjadi bentuk :

$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{y-y_1}{c}$, kita harus menentukan pula koordinat (x_1, y_1, z_1), sebarang titik pada garis lurus.

Untuk itu biasanya kita ambil titik potong dengan bidang koordinat, misalnya , XOY, maka z = 0, kita peroleh :

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + D = 0 \\ Px + Qy + S = 0 \end{array}\right\}$$

Yang jika di eleminasi , kita dapatkan :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -S & Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}} \quad \text{dan} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ P & -S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}}$$

7. Kedudukan Dua Garis Lurus dalam R^3

Dalam R^3, dua garis lurus mengkin sejajar, berimpit, berpotongan, atau bersilangan.

Diketahui garis lurus:

$g_1 : [x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a_1, b_1, c_1]$ dan

$g_2 : [x, y, z] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda[a_2, b_2, c_2]$

Kemungkinan-kemungkinan :

a. g_1 sejajar g_2 jika vektor arah yang satu keliapatan yang lain :

$[a_1, b_1, c_1] = \mu[a_2, b_2, c_2]$

Berarti : $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

b. g_1 berpotongan di satu titik dengan g_2, maka vektor arah tidak berkelipatan.

Misalkan titik potongnya (x_o, y_o, z_o), berarti ada λ_1 sehingga:

$g_1 : [x_0, y_0, z_0] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1]$, ada λ_2 sehingga :

$g_2 : [x_0, y_0, z_0] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$

Berarti

$[x_1, y_1, z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$

Atau :

$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = x_2 - x_1$

$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = y - y_1$

$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = z - z_1$

Berdasarkan teori persamaan linier dua variabel, nilai λ_1 dan λ_2 ada jika determinan :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

merupakan syarat duat garis berpotongan

Sedangkan persamaan bidang yang memuat garis g_1 dan g_2 adalah :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x - x_1 \\ b_1 & b_2 & y - y_1 \\ c_1 & c_2 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

Dua garis bersilangan, jika :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

8. Sudut antara Garis g_1 dan garis g_2

Sudut antara garis g_1 dan g_2 adalah sudut antara vektor-vektor arah :

$[a_1, b_1, c_1]$ dan $[a_2, b_2, c_2]$ yaitu : Cos θ =

$$\frac{[a_1, b_1, c_1].[a_2, b_2, c_2]}{\|[a_1, b_1, c_1]\|.\|[a_2, b_2, c_2]\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_1^2)}}$$

Kedua garis g_1 dan g_2 tersebut saling tegak lurus bila ***dot product*** vektor arah mereka = 0, atau bila :

$$[a_1, b_1, c_1].[a_2, b_2, c_2] = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

9. Kedudukan Garis Lurus dan Bidang Datar

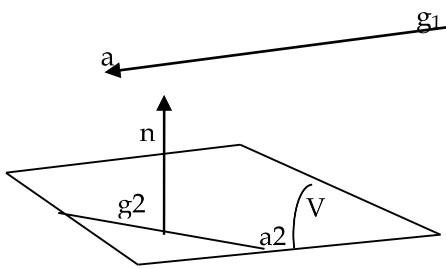
Jika diketahui garis lurus g dengan vektor arah a = $[a, b, c]$ dan bidang V dengan vektor normal n = $[A, B, C]$, maka :

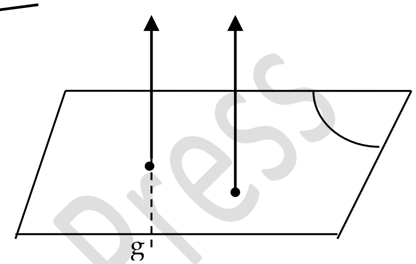
a. Garis lurus g sejajar bidang V , jika dan hanya jika :
   Vektor arah garis tegak lurus dengan vektor normal bidang V, jadi
   a . n = 0 atau aA + bB + cB = 0
b. Garis lurus g tegak lurus bidang V, jika dan hanya jika :
   Vektor arah garis lurus = vektor normal bidang V, jadi

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

c. Garis lurus g terletak seluruhnya pada garis V, jika dan hanya jika :

a . n = 0, atau aA + bB + cC = 0 dan sebarang titik P (x_1,y_1,z_1) pada garis g juga terletak pada bidang V.





Keterangan gambar (a)
g_1 sejajar bidang V
g_2 terletak pada bidang V
g_2 tegak lurus bidang v

Keterangan gambar (b) :
Garis g tegak lurus dengan bidang V

10. Garis Lurus Memotong Garis Lurus Yang Lain

Jika $g_1 : V_1 = 0 = V_2$ dan $g_2 : W_1 = 0 = W_2$, maka persamaan umum dari garis lurus g yang memotong g_1 dan g_2 adalah :

$$V_1 + \lambda V_2 = 0 = W_1 + \mu W_2$$

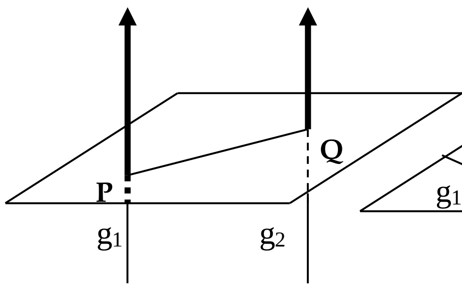
11. Jarak Antara Dua Garis Lurus Dalam R^3

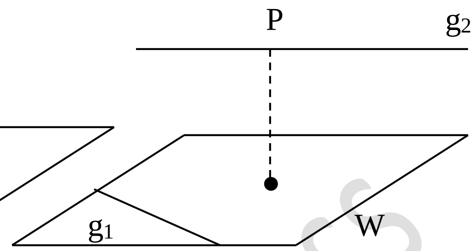
a. Jika g1 dan g2 sejajar, untuk menghitung jaraknya dapat dilakukan sebagai berikut :
   1) Pilih sebaragng titik P pada g1
   2) Buat budang datar W melelui P dan tegak lurus g_1, yang dengan sendirinya juga tegak lurus g_2
   3) Tentukan titik Q titik tembus g_2 pada W
   4) Panjang PQ adalah jarak garis g_1 dan g_2

b. Jika g_1 dan g_2 bersilangan , kita lakukan sebagai berikut :
   1) Buat bidang datar W yang melalui g_1 dan sejajar g_2

2) Pilih sebarang titik P pada g_2
3) Tentukan jarak P ke bidang W, merupakan jarak g_1 dan g_2

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini :



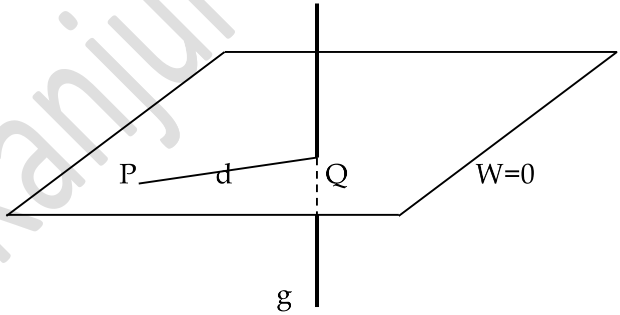


12. Jarak Sebuah Titik ke Sebuah Garis Dalam R^3

Jarak titik $P(x_1, y_1, z_1)$ ke garis g dapat kita cari sebagai berikut :

a) Buat bidang W melalui P tegak lurus g
b) Cari titik Q, titik tembus g pada W
c) Garis PQ adalah garis yang tegak lurus g dan melelui P sehingga panjang PQ adalah jarak titik P ke garis g

Perhatikan gambar berikut ini :



13. Perpotongan Tiga Bidang Datar

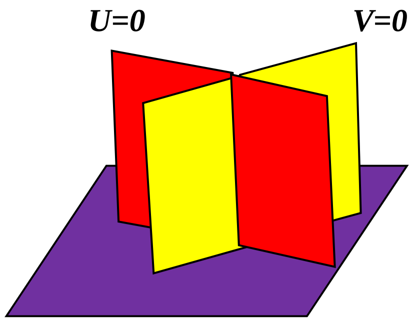
Diketahui tiga bidang datar :

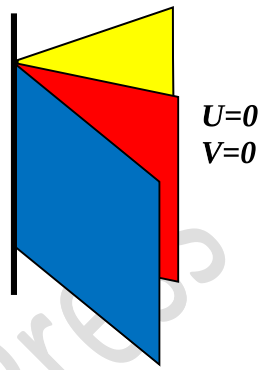
U = Ax + By + Cz + D = 0
V = Px + Qy + Rz + S = 0
W = Kx + Ly + Mz + N = 0

U, V, dan W tidak sejajar.

Terdapat tiga kemungkinan kedudukan ketiga bidang tersebut :

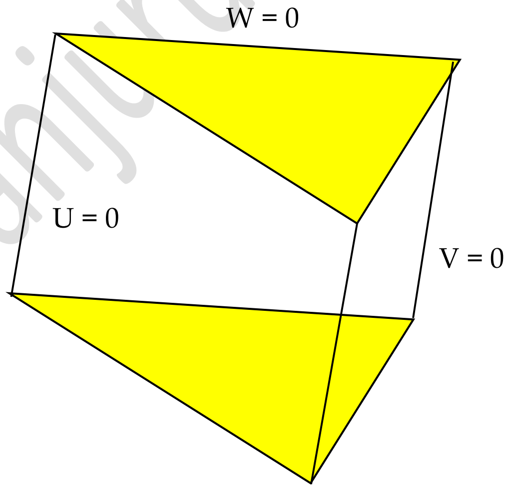
1) Hanya mempunyai satu titik persekutuan (membentuk ***Jaringan Bidang*).** Bisa dilihat pada gambar (1) dibawah ini.





Gambar (1) Gambar (2)

2) Mempunyai satu garis persekutuan (membentuk ***Berkas Bidang***) Bisa dilihat pada gambar (2) diatas.
3) Membentuk ***Prisma Sisi Tiga***



Pandang bahwa U dan V tidak sejajar. Garis potong U dan V yaitu g mempunyai vektor arah :

$n_1 \ x \ n_2 = [A, B, C] \ x \ [P, Q, R]$ dan melalui titik P, sehingga P $\left(\dfrac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -S & Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} A & -D \\ P & -S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}}, \ 0 \right)$

Maka bidang –bidang : U = 0 , V = 0, dan W = 0 membentuk prisma sisi tiga jika g sejajar dengan bidang W (g terletak pada bidang W) , berarti :

$(n_1 \text{ x } n_2).\ n_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ A & B & C \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ P & Q & R \\ K & L & M \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Misalkan titik P tidak terletak pada bidang W = 0, bererti tidak terpenuhi hubungan :

$$K \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -S & Q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}} + L \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ P & -S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}} \text{L} + \text{M}.0 + \text{N} = 0$$

Atau memenuhi :

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ P & Q & R & S \\ K & L & M & N \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Kesimpulan :

a. Ketiga bidang datar membentuk suatu berkas bidang datar jika terpenuhi persamaan (1) dan (2)

b. Ketiga bidang membentuk suatu prisma sisi tiga jika terpenuhi persamaan (1) , tetapi persmaan (2) tidak terpenuhi

c. Dalam hal lain membentuk jaringan

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan bidang datar yang melelui P(2,2,1) dan Q(9,3,6) serta tegak lurus bidang V = 2x + 6y + 6z = 9 ?

   Jawab :

   Misalkan persamaan bidang W= Ax + By + Cz + D = 0
   Melalui (2,2,1) , maka : 2A + 2B + C + D = 0………..(1)
   Melalui (9,3,6), maka : 9A + 3B + 6C + D = 0………(2)
   Karena tegak lurus dengan V, maka 2A + 6B + 6C = 0……….(3)
   Dari (1) dan (2), diperoleh: 7A + B + 5C = 0…….(4)
   Dari ((3) dan (4), diperoleh : 40A +24C = 0 ↔ A = $-{}^{3}\!/_{5}C$,
   substitusikan ke (4), diperoleh : B = $-{}^{4}\!/_{5}C$ dan ke (1) : D = ${}^{9}\!/_{5}C$

   Jadi persamaan bidang tersebut adalah :

   $\frac{-3}{5}Cx - \frac{4}{5}Cy + Cz + \frac{9}{5}C = 0$, kita kalikan $\frac{5}{C}$,

   kita peroleh :

   -3x -4y + z + 9 = 0 atau 3x + 4y – z – 9 = 0

2. Tentukan persamaan bidang datar yang melelui titik (-1,3,2) serta tegak lurus bidang V = x + 2y + 2z = 5 dan W = 3x + 5y + 2z = 8 ?

   Jawab :

   Bidang U yang diminta , melalui (-1,3,2) berbentuk : A(x+1) + B(y-3) + C(z-2) = 0
   U tegak lurus V , maka A + 2B + 2C = 0…………(1)
   U tegak lurus W, maka 3A + 5B + 2C = 0 ……..(2)

Persamaan (1) dan (2), kita peroleh :

$2A + 3B = 0 \leftrightarrow A = -\frac{3}{2}B$ ....(3)

Persamaan (3) di substitusikan ke (1), diperoleh $C = \frac{1}{4}B$, sehingga :

$-\frac{3}{2}B(x+1) + B(y-3) + \frac{1}{4}B(z-2) = 0$, kita kalikan $\frac{4}{B}$, diperoleh :

$-6(x+1) + 4(y-3) + z-2 = 0 \leftrightarrow 6x - 4y + z + 16 = 0$

3. Tunjukkan bahwa garis lurus yang menghubungkan titik-titik P(-1,-2,-3) dan Q (1,2,-5) serta garis lurus yang menghubungkan R(6,-4,4) dan S (0,0,-4) saling berpotongan?

   Jawab :
   Jelas bahwa PQ = $[2,4,-2]$ tidak sejajar dengan RS = $[-6,4,-8]$
   Selanjutnya akan ditunjukkanbahwa ke empat titik tersebut sebidang .

   $$\begin{vmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & Y_R - y_P & z_R - z_P \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

   Jadi P, Q , R , dan S terletak pada satu bidang, PQ sejajar RS, berarti garis melalui PQ berpotongan dengan garis melalui RS

4. Tentukan persamaan bi dang datar M melalui garis potong bidang
   $U = x - 3y + z - 7 = 0$ dan $V = 2x - y + 3z - 5 = 0$ serta tegak lurus bidang $W = x + 2y + 3z + 7 = 0$?

   Jawab :
   Bidang M melalui perpotongan U dan V berarti :
   $U + \lambda V = 0 \leftrightarrow \; x - 3y + z - 7 + \lambda(2x - y + 3z - 5) = 0 \leftrightarrow$

$(1 + 2\lambda)x - (3 + \lambda)y + (1 + 3\lambda)z + (-7 - 5\lambda) = 0$

Karena M tegak lurus W , maka :

$[(1 + 2\lambda), -(3 + \lambda), (1 + 3\lambda)] \cdot [1,2,3] = 0 \leftrightarrow 9\lambda = 2 \leftrightarrow \lambda = 2/9$

Jadi persmaan bidang M adalah :

$(1 + 2\lambda)x - (3 + \lambda)y + (1 + 3\lambda)z + (-7 - 5\lambda) = 0$

$(1 + 2.2/9)x - (3 + 2/9)y + (1 + 3.2/9)z + (-7 - 5.2/9) = 0$

$13 - 29y + 15z - 73 = 0$

5. Tentukan persmaan garis lurus yang memotong kedua garis lurus $g_1 : 2x + y - 1 = 0 = x - 2y + 3z$, $g_2 : 3x - y + z + 2 = 0 = 4x + 5y - 2z - 3$ serta sejajar garis lurus $g_3 : x = y/2 = z/3$?

Jawab :

Pesamaan umum garis lurus yang memeotong g1 dan g2 adalah :

$$g \begin{cases} 2x + y - 1 + \lambda(x - 2y + 3z) = 0 \\ 3x - y + z + 2 + \mu(4x + 5y - 2z - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Atau} \begin{cases} (2 + \lambda)x + (1 - 2\lambda)y + 3\lambda z - 1 = 0 = V \\ (3 + 4\mu)x + (-1 + 5\mu)y + (1 - 2\mu)z + 2 - 3\mu = 0 = W \end{cases}$$

Karena g sejajar dengan g3 berarti vektor arahnya = [1,2,3], yang tegak lurus normal bidang V dan normal budang W, berarti : $(2 + \lambda).1 + (1 - 2\lambda).2 + 3\lambda.3 = 0 \leftrightarrow \lambda = -2/3$

$(3 + 4\mu).1 + (-1 + 5\mu).2 + (1 - 2\mu).3 = 0 \leftrightarrow \mu = -½$

Maka persamaan garis lurus yang diminta adalah :

$g : 4x + 7y - 6z - 3 = 0 = 2x - 7y + 4z + 7$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan linier bidang datar melalui tiga titik :
   a. (3,4,5) , (-2,4,7), dan (-2,-1,-3)
   b. (-1,0,4), (2,-3,-1), dan (3,-3,-2)
2. Apakah empat titik berikut ini sebidang ?
   a. (2,1,3), (4,2,1), (-1,-2,4), da, (0,0,5)
   b. (4,2,1), (-1,-2,2), (0,4,-5), dan (1/2 , ½ , 0)
   c. (3,1,2), 4,-2,-1), (1,2,4), dan (1,2,1)
3. Jelaskan hal-hal istinewa pada bidang-bidang berikut ini , serta berikan gambarnya ?
   a. $x + y = 6$
   b. $2x – z = 0$
   c. $2y – 3z = 6$
   d. $x – 6 = 0$
   e. $2x + 4y + 3z = 0$
   f. $3x – 5y +2z = 30$
4. Tentukan persaman linier bidang datar :
   a. Melalui (3,-2,-4) yang horizontal ?
   b. Sejajar sumbu Z memotong sumbu X positip sebesar 2, memotong sumbu Ynegatif sebesar 3
   c. Melalui (3,-2,4) dan tegak lurus garis $[x,y,z] = \lambda\ [2,2,-3]$
   d. Melalui (-1,2,-3) dan tegak lurus garis lurus yang melalui (-3,2,4) dan (5,4,1)
5. Tentukan persamaan linier bidang datar yang:
   a. melalui (-1,2,4) da sejajar bidang datar $2x – 3y – 5z + 6 = 0$
   b. sejajar bidang datar $3x – 6y – 2z -4 = 0$ dan berjaarak 3 dari titik asal (0,0,0)
   c. sejajar bidang datar $4x – 4y + 7z -3 = 0$ dan berjarak 4 dari titik (4,1,-2)
6. Tentukan persamaan bidang datar :
   a. melalui (3,-2,4) dan tegak lurus bidang-bidang datar $7x – 3y + z – 5 = 0$ dan $4x – y – z + 9 =0$
   b. melalui (4,-3,2) dan tegak lurus garis potong bidang datar $x – y + 2z – 3 = 0$ dan $2x – y – 3z = 0$
   c. yang tegak lurus bidang-bidnag datar $3x – y + z = 0$ dan $x + 5y + 3z = 0$ serta berjarak V6 dari titik asal
   d. melalui titik (2,1,1) dan (3,2,2) serta tegak lurus bidang datar x

+ 3y – 5z -3 = 0

7. tentukan titik potong ketiga bidang :
   a. 2x – y – 2z = 5, 4x + y + 3z = 1, 8x – y + z = 5
   b. 2x + y – z – 1= 0, 3x – y –z +2 = 0, 4x –y + z – 3 = 0
   c. 2x + 3y + 3 = 0, 3x + 2y – 5z + 2 = 0, 3x – 4z + 8 = 0
8. Suatu bidang datar memotong sumbu-sumbu koordinat ditik A, B, dan C. sedemikian sehingga titik berat segitiga ABC adalah titik (a,b,c) . Tunjukkan bahwa persamaan bidang datar tersbut adalah: x/a + y/b + z/c = 0
9. Tentukan persamaan bidang datar :
   a. melalui sumbu X dan tegak lurus bidang datar 2x – y – 3z = 5
   b. melalui ngarispotong bidang-bidang datar x + y + z = 6 dan 2x + 3y + 4z + 5 = 0 serta titik (1,1,1)
   c. melalui garis potong bidang-bdang datar 2x – y = 0 dan 3z – y = 0 serta tegak lurus bidang datar 4x + 5y -3z = 0
   d. melalui garis potong bidnag-bidang datar ax + by + cz + d = 0, px + qy + rz + s = 0 serta tegak lurus bidang XOY.
10. Tentukan persamaan bidang datar yang :
    a. melalui titik (3,-3,1) dan tegak lurus garislurus yang menghi=ubungkan titik (3,4,-1) dan (2,-1,5)
    b. membagi dua potongan garis lurus melalui (1,2,3) , (3,4,5) dengan sudut siku-siku
11. Tentukian jarak :
    a. titik (-2,2,3) ke bidnag datar 2x + y – 2z = 4
    b. titik (0,2,3) kebidnag datar 6x- 7y – 6z + 22= 0
    c. bidang-bidang datar : 2x – 2y + z + 3 = 0 dan 4x – 4y + 2z + 5 = 0
    d. Bidang-bidng datar : 6x – 3\2y + 3z = 7 dan 6x – 2y + 3z = 9
12. Buktikan bahwa bidang-bidang bagi(bisector) dari bidang-bidang datar :

    Ax + By + Cz + D = 0 dan Px + Qy + Rz + S = 0 adalah :

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm \frac{Px+Qy+Rz+S}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

    (tanda ± , menunjukkan bidang bagi dalam atau bidang bagi luar).

Tentukan bidang bagi dalam bidang-bidang datar : $x + 2y + 2z - 3 = 0$ dan $3x + 4y + 12z + 1 = 0$

13. Tentukan volume bidang 4 yang dibatasi oleh bidang –bidang datar :
    $Y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$, dan $x + y + z = 1$
14. Tunjukkan bahwa bidang-bidang berikut merupakan sisi-sisi sebuah paralellipedum:
    $3x - y + 4z - 7 = 0$, $x + 2y - z + 5 = 0$, $6x - 2y + 8z + 10 = 0$, $3x + 6y - 3z - 7 = 0$
15. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan-persmaan linier garis lurus melelui titik-titik :
    a. (1,.2,1),(-2,3,2)
    b. (1,-3,2) , (4,1,0)
    c. (1,0,2), (2,3,2)
16. Tentukanlah vektor arah , kemudian persamaan vektoris garis lurus perpotongan bidang-bidang datar :
    a. $x - 2y + z = 0$, $3x + y + 2z = 7$
    b. $2x + 3y - 2 = 0$, $y - 3z + 4 = 0$
    c. $x + 2z - 6 = 0$, $y = 4$
16. Tentukanlah koordinat titik tembus :
    a. garis lurus $(x + 1) =(y+3)/3=(z-2)/-2$ dan bidang datar $3x + 4y + 5z = 5$
    b. garis lurus $x - y - z + 8 = 0$, $5x + y + z + 10 = 0$ dan bidang datar $x + y + z - 2 = 0$
    c. garis lurus yang melalui (2,-3,1) , (3,-4,-5), dan bidang datar $2x + y + z = 7$
17. a. Tentukan jarak titik tembus garis lurus $(x-2)/3=(y+1)/4=(z-2)/12$ dan bidang datar $x - y + z = 5$ ke titik (-1,-5,-10).
    b. Tentukan panjang potongan garis dari (3,-4,5) ke bidang $2x + 5y - 6z = 1$ yang diukur sepanjang garis lurus dengan vektor arah [2,1,-2].
    c. Carilah koordinat bayangan dari titik (1,3,4) pada bidang datar $2x - y + z + 3 = 0$
18. a. Tentukan persamaan garis lurus melalui (-1,3,2) dan tegak lurus $x + 2y + 2z = 3$, perhatikan pula titik tembus garis tersebut

pada bidang datar

b. tentukan koordinat titik tembus garis lurus yang ditarik dari titik asal, tegak lurus bidang datar F= $2x + 3y - 6z + 49 = 0$, pada F . Tentukan pula bayangan titik asal pada bidang datar F .

19. Tunjukkan bahwa kedua garis lurus berikut berpotongan? Tentukan bidang yang memuat kedua garis tersebut, serta titik potong kedua garis tersebut ?
   a. $(x + 4)/3=(y+6)/5=(z-1)/-2$ dan $3x-3y + z + 5 = 0=2x + 3y + 4z - 4$
   b. $(x-1)/2= (y+1)/-3=(z+10)/8$ dan $(x-4)=(y+3)/-4=(z+1)/7$
   c. $(x+1)/3=(y+3)/5=(z+5)/7$ dan $x-2= (y-4)/3 = (z-6)/5$
20. Tunjukkan bahwa kedua garis lurus ini sejajar , hitung jaraknya :
   a. $x +2y = 6$, $z - 2 = 0$ dan $x + 2y = 9$, $z = 0$
   b. $(x - 7)/6= y/2=z$ dan $(x+2)/6=(y-1)/2=z-11$
21. Tentukan persamaan bidang datar yang memuat garis-garis lurus:
   a. $(x-4) = (y-3)/4 = (z-2)/5$ dan $(x - 3) = (y+2)/-4=z/5$
   b. $x = y = z$ dan $(x-3) = (y+1) = z$
22. Tentukan jarak :
   a. titik (4,-5,3) ke garis lurus $(x-5)/3=(y+3)/-4=(z+6)/5$
   b. titik (5,4,-1) ke garis lurus $(x-8)/2=y/9=z/5$
23. Tentukan persmaan garis lurus yang melalui P dan memotong tegak lurus garis g bila :
   a. P (2,4,-1), g : $(x+5)=(y-3)/4=(z-6)/9$
   b. P(-2,2,-3), g : $(x-3)=(y+1)/2=(z-2)/-4$
   c. P(0,0,0) , g : $x + 2y + 3z + 4 = 2x + 3y + 4z + 5$
24. Tentukan persmaan garis yang memotong $x + y + z - 1 = 0 = 2x - y - z -2$ dan $x - y - z - 3 =0 = 2x + 4y - z - 4$ serta melalui titik (1,1,1). Cari pla tiitk –titik potongnya ?
25. Tentukan persmaan garis lurus yang :
   a. ditarik dari titk asal dan memotong garois-garis lurus $3x + 2y + 4z - 5 = 0 = 2x- 3y + 4z + 1$ dan $2x - 4y + z + 6 = 0 = 3x - 4y + z -3$
   b. melalui (1,0,-1) dan memotong garis-garis lurus $x = 2y = 2z$

serta 3x + 4y + 1, 4x + 5z = 2

26. sebauh garis , sejajar garis (x-2)/7=y/4=-z dan memotong garis-garis (x-1)/3= (y-7)/-1=(z+2), serta (x+3)/-3=(y-3)/2= (z-5)/4. Tentukan titik –titik potong tersebut ?
27. Tentukan persamaan garis lurus yang sejjar x/2 = y/3 = z/4 dan memotong garis-garis lurus 9x+y+z+4= 0=5x + y + 3z serta x +2y -3z-3=0=2x-5y+3z+3 ?
28. Tentukan persmaan garis lurus yang melalui titik (-4,3,1) sejajar x + 2y – z = 5 serta memotong garis lurus –(x+1)/3=(y-3)/2=-(z-2). Tentukan pula titik pootongnya ?
29. Tentukan persmaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis y – 2z = 0, x – 2z = 3 dan terletak seluurhnya pada bidang x + 3y – z + 4 = 0 ?
30. Tentukan persmaan garis lurus yang melaui titik(2,3,4) tegak lurus sumbu X dan memotong garis luurs x = y = z ?
31. Tentukan persmaan garis lurus yang melaui titik asal dan memotong garis lurus (x-3)/2=(y-3)=z dengan sudut 60 derajat?
32. Tentukan jarak dan persmaan garis hubung terpendek garis-garis lurus :

    a. (x-3)/2=(y+15)/-7=(z-9)/5 serta (x+1)/2=(y-1)/1 = (z-9)/-3

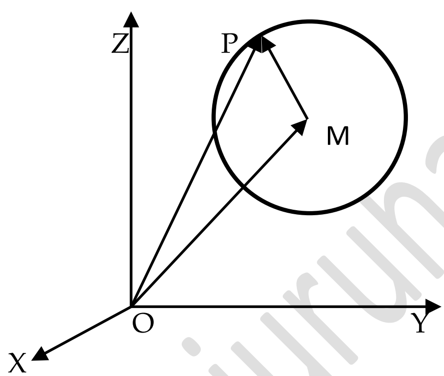
    b. (x-3)/-1=(y-4)/2=(z+2)/1 serta x-1)/1=(y+7)/3=(z+2)/2

BAB VIII
BOLA

A. Persamaan Bola

Permukaan bola adalah tempat kedudukan titik-titik di dalam demensi tiga yang berjarak sama terahadap titik tertentu. Titik tertentu merupakan pusat bola, dan jarak tertentu merupakan pusat bola.

Perhatikan gambar berikut ini :



Misalkan , bola dengan pusat (a,b,c), danjari-jari = r

Ambil titik P(x_o,y_o,z_o) pada bola ,

OM + MP = OP ↔ MP = OP – OM=

[x_0-a, y_o-b , z_0 - c].

Karena MP = r , maka :

r = [x_0-a, y_o-b , z_0 - c], berarti :

$(x_0-a)^2 + (y_o-b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$

Dengan menjalankan titik P, diperoleh persmaan bola :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Persamaan: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, adalah persamaan bola dengan pusat (a,b) dan berjari-jari = r.

Jika pusat bola O (0,0,0), maka persamaan bola : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Contoh :

Tentukan pusat dan jari-jari bola :

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

b. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$

c. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$

d. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$

Jawab :

a. Pusat (0,0,0) dan jari-jari r = 9
b. Pusat (0,0,0) dan jari-jari r = V5
c. Pusat (0,3,0) dan jari-jari r = 9
d. Pusat (3,-2,0) dan jari-jari r = 4

B. Bentuk Umum Persamaan Bola

Bentuk umum persamaan bola adalah :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Bentuk ini dapat diubah menjadi bentuk : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x^2 + Ax + (\tfrac{1}{2}A)^2 + y^2 + By + (\tfrac{1}{2}B)^2 + z^2 + Cz + (\tfrac{1}{2}C)^2 = -D + (\tfrac{1}{2}A)^2 + (\tfrac{1}{2}B)^2 + (\tfrac{1}{2}C)^2$$

$$(x + \frac{1}{2}A)^2 + (y + \frac{1}{2}B)^2 + (z + \frac{1}{2}C)^2 = \frac{-4D + A^2 + B^2 + C^2}{4}$$

Jadi Bola : $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, mempunyai :

Pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C)$

Jari-jari Bola : $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$

Catatan :

Jika : $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$:

a. > 0 , maka bola disebut bola sejati
b. = 0 , maka bola berjari-jari nol (titik)
c. <0 , maka bola merupakan bola khayal

Contoh :

Tentukan pusat dan jari-jari bola :

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 4z + 2 = 0$

Jawab :

A= 4, B = -6, C = 4 dan D = 2

Pusat bola : (-2 ,3,-4)

Jari-jari bola : r = $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$ =

$\frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 + (4)^2 - 4.2} = \frac{1}{2}\sqrt{60} = \sqrt{15}$

C. Persamaan Bola Yang Melalui 4 titik

Persamaan bola yang melalui titik (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), dan (x_4, y_4, z_4), adalah :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh :

Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik P(a,0,0), Q(0,b,0), R(0,0,c) , dan S(0.0.0) ?

Jawab :

Cara 1 : Dengan determina matriks:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2 + 0^2 + 0^2 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0^2 + b^2 + 0^2 & 0 & b & 0 & 1 \\ 0^2 + 0^2 + c^2 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0^2 + 0^2 + 0^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (kolom 1 dikurangi c kali kolom 4)}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ (kolom 1 dikurangi b kali kolom 3)}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz-by & x & y \\ a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz-by & x \\ a^2 & a \end{vmatrix} = 0$$

Atau :

$ax^2+ay^2+az^2-acz-aby-a^2x=0$

Dibagi a , kita peroleh :

$x^2+y^2+z^2-cz-by-a\ \ x=0$

Cara 2 :

Dengan pemisalan persmaan lingkaran :

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

Melalui O(0,0,0), maka 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + D = 0 ↔ D = 0

Melalui P(a,0,0), maka a^2 + 0 + 0 + Aa + 0 + 0 + D = 0↔ A = -a

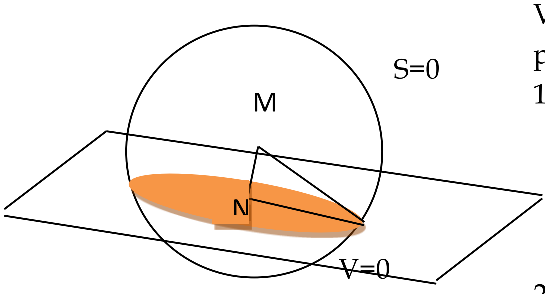
Melalui Q(0,b,0), maka 0 + b^2 + 0 + 0 + Bb + 0 + D = 0 ↔ B = -b

Melalui R(0,0,c), maka 0 + 0 + c^2 + 0 + 0 + Cc + d = 0 ↔ C = -c

Jadi Persamaan bola adalah :

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$

D. Bola dan Bidang Datar



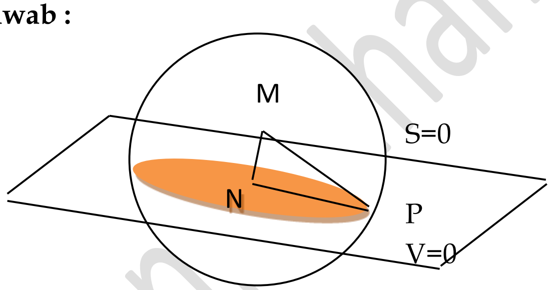
Bola S = 0 berjari-jari r, dengan pusat M. Bidang V = 0,dengan d = jarak pusat M ke bidang V

1. Bidang V memotong bola jika d < r, perpotongan bola adalah sebuah lingkaran
2. Bidang V tidak memotong bola h jika d > r

Contoh :

Bagaimana kedudukan bola S = $x^2 + y^2 + z^2 2x + 4y + 4z - 16 =$ 0 Dan bidang datar x + 2y + 2z = 0 ?

Jawab :



Jari-jari bola adalah :

$\sqrt{\tfrac{1}{4}(4) + \tfrac{1}{4}(16) + \tfrac{1}{4}(16) + 16} = 5$

Pusat Bola (-1,-2,-2)

Jarak M ke bidang V = 0 adalah :

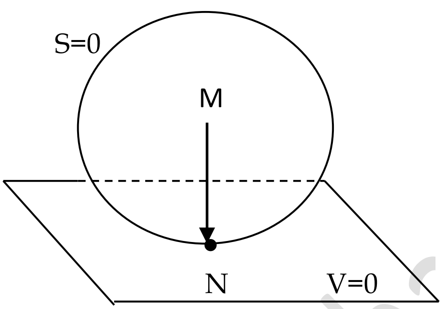
d = $\left| \dfrac{(1)(-1) + (2)(-2) + (2)(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = 3$

karena d= 3 dan r = 5, berarti d < r, jadi bidang memotong bola menurut sebuah lingkaran. Jari-jari lingkaran NP = $\sqrt{25 - 9} = 4$

Pusat lingkran N adalah titik tembus garis g yang melalui M dan tegak lurus vidang V, jadi arah garis = normal V = $[1,2,2]$

Persamaan garis g : x = -1 + λ ,
y = -2 + 2λ , z = -2 + 2λ…………(1)
Persamaan (1) disubstitusikan ke x + 2y + 2z = 0 menghasilkan :
(-1+λ) + 2(-2+2λ) + 2(-2+2λ) = 0 ↔ λ =1. Jadi persamaan (1), menjadi x = 0, y= 0, z=0 atau (0,0,0) adalah titik pusat lingkaran yang diminta

E. Bidang Singgung Bola di Titik N pada Bola



Bidang singgung di titik N ($x_1.y_1,z_1$) pada bola.
Misalkan bola S =
$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$
Pusat M (- ½ A, - ½ B , - ½ C),
Titik singgung N (x_1,y_1,z_1)
Dari gambar disamping MN merupakan vektor normal bidang singgung V, jadi persamaan bidang datar V adalah :

MN = $\left[x_1+{}^1/_2\,A, y_1+{}^1/_2\,B, z_1+{}^1/_2\,C\right]$, sehingga persamaan V :
$\left(x_1+{}^1/_2\,A\right)(x-x_1)+\left(y_1+{}^1/_2\,B\right)(y-y_1)+(z_1+{}^1/_2\,C)(z-z_1)=0$
$x_1x+y_1y+z_1z+{}^1/_2\,Ax+{}^1/_2\,By+{}^1/_2\,Cz-(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+{}^1/_2\,Ax_1+{}^1/_2\,By_1+{}^1/_2\,Cz_1)=0$……………………(1)
Karena titik N ($x_1.y_1,z_1$) pada bola berarti :$x_1x+y_1y+z_1z+Ax_1+By_1+Cz_1=-D$
Maka persamaan (1), menjadi :

$$x_1x+y_1y+z_1z+{}^1/_2\,A(x-x_1)+{}^1/_2\,B(y-y_1)+{}^1/_2\,C(z-z_1)+D=0$$

Merupakan bidang singgung yang ditanyakan.

Contoh:

Tentukan persmaan bidang singgung bola : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$

Di titik O(0,0,0).

Jawab :

Titik O(0,0,0) terletak pada bola, jadi dapat dipakai kaidah :

$x_1x + y_1y + z_1z + (x - x_1) + 2(y - y_1) + 2(z - z_1) = 0,$ dimana $(x_1.y_1,z_1) = (0.0.0)$, berarti $x + 2y + 2z = 0$ adalah bidang singgung yang ditanyakan.

BAB IX

TEMPAT KEDUDUKAN

A. Bidang Kerucut

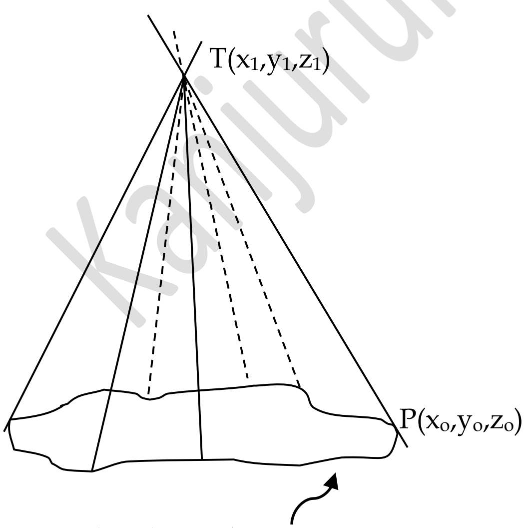
Bidang kerucut terjadi jika sebuah garis lurus g digerakkan secara tetap melalui suatu titik tertentu (sering disebut puncak kerucut) dan selalu memotong suatu garis lengkung tertentu (garis lengkung dasar kerucut). Masing-masing garis lurus kerucut, dinamakan garis pelukis kerucut.

Untuk menentukan persamaan bidang kerucut dengan pncak $T(x_1,y_1,z_1)$ dan garis lengkung dasar adalah sebagai berikut:

c : $f(x,y,z) = 0$

$g(x,y,z) = 0$

dilakukan sebagai berikut :`



Garis lengkung datar

1. Ambil titik P(xo,yo,zo) pada garis lengkung c sehingga diperoleh hubungan :
$$\begin{cases} f(x_o,y_o,z_o) = 0 \\ g(x_o,y_o,z_o) = 0 \end{cases}$$
2. Persamaan garis lukis melalaui P dan melalui puncak T adalah :
$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_o-x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_o-y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_o-z_1) \end{cases}$$
3. Dari ke lima persamaan tersebut dengan menghilangkan parameter λ akan diperoleh persamaan kerucut

Contoh :

Tentukan persamaan bidang kerucut yang berpuncak di titik T (0,0,2) dan garis lengkung dasarnya berupa lingkaran pada bidang XOY dengan titik pusayt di (0,0,0) dan jari-jari = 2 ?

Jawab :

ditentukan dulu persamaan lingkaran dasar kerucut yaitu perpotongan bidang z = 0 dan bola $x^2+y^2+z^2 = 4$ (persamaan ini kita namakan c).

Kita ambil titik P (xo,yo,zo) pada c, maka :

$z_o = 0$....................................(1)

$x_o^2+y_o^2+z_o^2 = 4$ ....(2)

Persamaan garis lukis melalui titik P adalah :

$x = 0 + \lambda(xo\text{-}0) \rightarrow x = \lambda xo$ atau $xo = x/\lambda$................................(3)

$y = 0 + \lambda(yo\text{-}0) \rightarrow y = \lambda yo$ atau $yo = y/\lambda$...............................(4)

$z = 2 + \lambda(zo\text{-}2) \rightarrow z = 2 + \lambda zo - 2\lambda$..(5)

Dari (1) dan (5), diperoleh : $\lambda = ½ (2 - z)$, sehingga persamaan (3) menjadi :

$xo = \dfrac{2x}{2-z}$, sedangan dari (1) dan (4) diperoleh : $yo = \dfrac{2y}{2-z}$

dengan mensubstitusikan xo , yo dan zo kita peroleh :

$$\left(\frac{2x}{2-z}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2-z}\right)^2 = 4,$$

$$atau \quad x^2 + y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$$

adalah persamaan kerucut yang ditanyakan.

B. Bidang Silinder

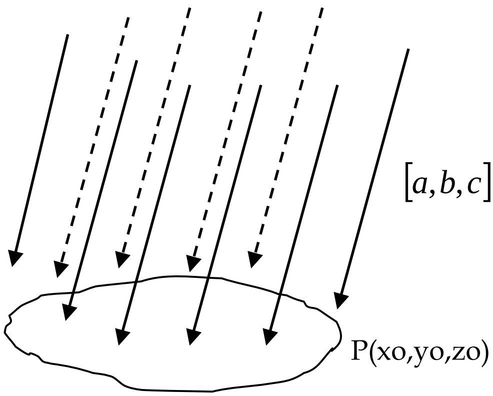
Bidang silinder terjadi jika sebuah garis lurus digerakkan tetap sejajar dan senantiasa memotong suatu garis lengkung tertentu (disebut garis lengkung dasar silinder).

Untuk menentukan persamaan bidang silinder yang diketahui arah pelukisnya $[a,b,c]$ dan garis lengkung dasarnya c :

f(x,y,z) = 0

g(x,y,z) = 0

dilakukan sebagai berikut :



1. Ambil titik P(xo,yo,zo) pada garis lengkung c sehingga diperoleh hubungan :

$$\begin{cases} f(x_o,y_o,z_o) = 0 \\ g(x_o,y_o,z_o) = 0 \end{cases}$$

2. Persamaan garis lukis melalui P dengan arah $[a,b,c]$:

$$\begin{cases} x = xo + \lambda a \\ y = yo + \lambda b \\ z = zo + \lambda c \end{cases}$$

3. Dari ke lima persamaan tersebut dengan menghilang-kan parameter λ akan diperoleh persamaan bidang silinder yang diminta

Contoh :

Tentukan persamaan bidang silinder yang garis lengkung dasarnya lingayan pada bidang XOY, dengan pusat (0,0,0), jari-jari 1, sedangkan pelukisnya sejajar gharis x=y=z?

Jawab :

Persamaan lingkaran dasar :

c: $z = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Ambil P(xo,yo,zo) pada c, terpenuhi :

$zo = 0$ ....(1)

$xo^2 + yo^2 + zo^2 = 1$ ....(2)

Garis lukis melalui P dengan artah : $[1,1,1]$ adalah :

$x = xo + \lambda$ atau $xo = x - \lambda$..(3)

$y = yo + \lambda$ atau $yo = y - \lambda$ ....(4)

$z = zo + \lambda$...(5)

Dari (1) dan (5), kita peroleh :

$\lambda = z$

dengan mensubstitusikan $\lambda = z$ ke persamaan (3) dan (4) ,kita peroleh : xo = x - z dan yo= y - z.
Jika xo, yo, dan zo disubstitusikan ke pers (2) diperoleh :
$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$ atau $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - 1 = 0$

C. Bidang Atur

Bidang atur terjadi jika sebuah garis lurus digerakkan (di dalam ruang) dengan suatu aturan tertentu. Kerucut dan silinder termasuk jenis bidang atur.

Contoh 1:
Tentukan persamaan bidang atur yang terjadi karena suatu garis lurus bergerak senantiasa memotong garis:
g1 : $\begin{cases} y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$ g2: $\begin{cases} z = 3 \\ x = -1 \end{cases}$ g3 : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Penyelesaian :
Persamaan garis yang memotong 2 garis g1 dan g2 :
(*) $\begin{cases} (y - 2) + \lambda(z + 3) = 0 \text{ atau } \lambda = -(y - 2)/(z + 3) \\ (z - 3) + \mu(x + 1)=0 \text{ atau } \mu = -(z - 3)/(x + 1) \end{cases}$
Kemudian kita cari persamaan yang tidak mengandung variabel x ,y, z (biasa disebut persamaan prasyarat).
Substitusikan x = 1, y = -2 (garis g3) ke persamaan (*) :
$-4 + \lambda z + 3\lambda = 0$
$z - 3 + 2\mu = 0$
dengan menghilangkan z, kita peroleh :
$-4 + \lambda(3 - 2\mu) + 3\lambda = 0 \leftrightarrow 6\lambda - 2\lambda\mu - 4 = 0$ (persamaan prasyarat) ....(**)
Dengan mensubtitusikan (*) ke (**), kita peroleh :
$yz + 2xz + 6 = 0$

Contoh 2 :
Tentukan persamaan bidang atur yang garis pelukisnya memotong lingkaran yang terletak pada bidang XOY , pusat (0,0,0) dan jari-jari= 2 , serta memotong pula garis :

g1 : $\begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ dan g2 : $\begin{cases} z = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

Jawab :

Garis memotong g1 dan g2 adalah :

z – 1 + λy = 0 atau λ = (1 – z)/y ....(1)

z + 1 + μx = 0 atau μ = -(1 + z)/x ....(2)

Persamaan lingkaran : $\begin{cases} z = 0 \text{...(3)} \\ x2 + y2 + z2 = 4 \text{..................................(4)} \end{cases}$

Kita tentukan persamaan prasyarat :

Dari (1) dan (3) , kita peroleh : y = 1/λ

Dari (2) dan (3) , kita peroleh : x = -1/μ

kemudian kita substitusikan ke (4), kita peroleh $\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 4$ atau

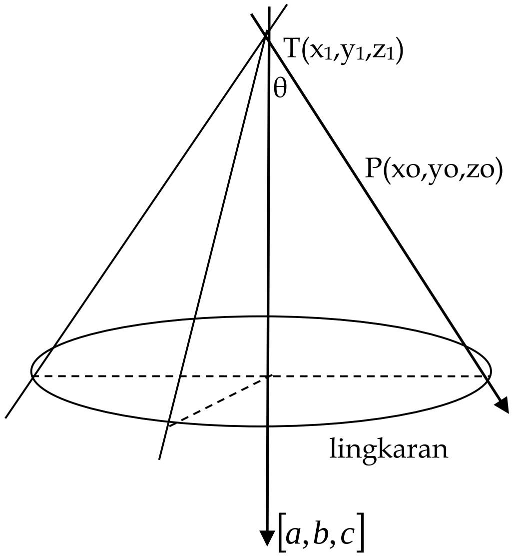
$\lambda^2 + \mu^2 = 4\lambda^2\mu^2$

Dengan menghilangakan λ dan μ, {dari (1) dan (2)}, kita peroleh :

$\frac{(1-z)^2}{y^2} + \frac{(1+z)^2}{x^2} = \frac{-4(1-z)(1+z)}{yx}$ atau $x^2(1 - z)^2 + y^2(1 + z)^2 = -4yx(1 - z^2)$

D. Bidang Kerucut Lingkaran Tegak

Bidang kerucut lingkatan tegak terjadi jika sebuah garis lurus yang bergerak melalui sebuah titik tetap tertentu (puncak) serta membentuk sudut yang konstan (setengah sudut puncak) dengan sebuah garis tertentu melalui puncak (poros kerucut). Atau bidang putar yuang terjadi akibat perputaran garis lurus yang meotong sumbu putar. Kerucut berpuncak T(x1, y1, z1), arah poros $[a,b,c]$, setengah sudut puncak θ, persmaan dapat dihitung sebagai berikut :



Ambil titik P(xo,yo,zo) pada kerucut, arah TP =
$\left[x_o - x_1, y_o - y_1, z_o - z_1\right]$

Sedang Cos θ = $\dfrac{TP.\left[a,b,c\right]}{\left|TP\right|.\left|\left[a,b,c\right]\right|}$

$$= \frac{a(x_o - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z - z_o)}{\sqrt{(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 + (z_o + z_1)^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

atau setelah menjalankan titik (xo,yo,zo) diperoleh:

$$\left\{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)\right\}^2 =$$
$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\right\}Cos^2\theta$$

merupakan persamaan yang diminta

Akibat :

1. Jika puncak kerucut (0,0,0) , persamaan menjadi :
   $(ax + by + cz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \cos^2\theta$
2. Jika puncaknya (0,0,0) dan porosnya sumbu z (arah $\left[0,0,1\right]$), persamaan menjadi
   $z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2\theta$ atau $(x^2 + y^2) \cos \theta = z^2(1 - \cos^2\theta)$ atau $x^2 + y^2 = z^2 tg^2\theta$

Contoh :

Tentukan persamaan kerucut lingkaran tegak yang puncaknya (0,0,0), poros sumbu z dan setengah sudut puncak = 30^o ?

Jawab :

Dengan mudah kita dapatkan tg 30^o = 1/V3.

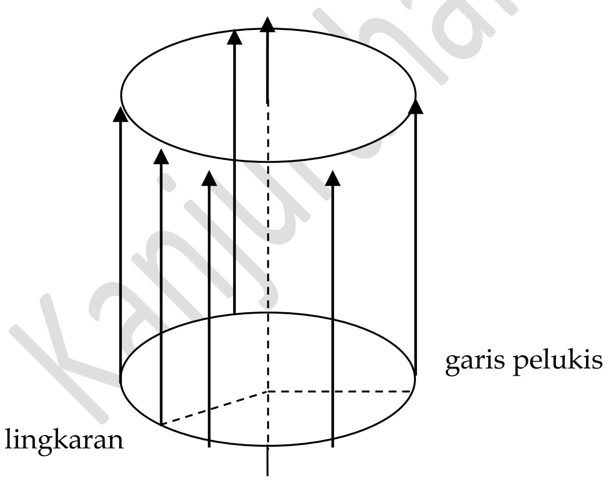
Jadi persamaan kerucut : $x^2 + y^2 = z^2/3$ atau $3x^2 + 3y^2 = z^2$

E. Bidang Silinder Lingkaran Tegak

Bidang silinder lingkaran tegak terjadi jika sebuah garis lurus yang sejajar garis lurus tertentu (=poros) bergerak tetap sejajar dengan jarak yang konstan (jarak tersebut = jari-jari silinder).

Silinder lingkaran tegak merupakan :

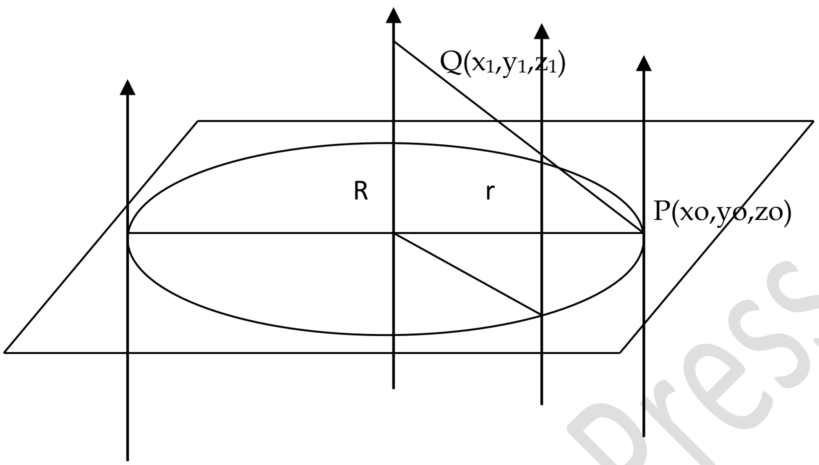
1. Tempat kedudukan titik-titik yang berjaran sama terhadap sebuah garis tertentu.
2. Tempat kedudukan garis-garis yang sejajar dengan jarak sama terhadap sebuah garis tertentu.



Pandang silinder lingkaran tegak, berjari-jari = r, poros garis g :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c]$$

Perhatikan gambar berikut ini:



Ambil P(xo,yo,zo) pada silinder, maka persmaan bidang paralel V yang melalui P adalah :

a(x-xo) + b(y-yo) + c(z-zo) = 0.

Jarak Q(x1 , y1, z1) ke V adalah :

$$QR = \left|\frac{a(x_1 - x_o) + b(y_1 - y_o) + c(z_1 - z_o)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

sedangkan :

$$\text{QP} = \sqrt{(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2 + (z_1 - z_o)^2}$$

dan dari segitiga PQR diperoleh hubungan $QP^2 - QR^2 = r^2$, sehingga

$$(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2 + (z_1 - z_o)^2 - \frac{\{a(x_x - x_o) + b(y_1 - y_o) + c(z_1 - z_o\}^2}{a^2 + b^2 + c^2} = r^2$$

atau setelah (xo, yo, zo) dijalankan kita peroleh :

$$\{(a^2 + b^2 + c^2)(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)\} =$$

$(a^2 + b^2 + c^2)r^2$ merupakan persamaan silinder lingkaran tegak yang diminta.

SOAL LATIHAN :

1. Suatu titik bergerak sedemikian sehingga jumlah kuadrat jarak ke masing-masing sisi kubus adalah tetap = k^2. Buktikan bahwa tempat kedudukan (TK) tersebut berupa bola ?
2. Buktikan bahwa pusat irisan bola : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dengan bidang yang melalui (x_1,y_1,z_1) terlerak pada bola adalah : $x(x-x_1) + y(y-y_1) + z(z-z_1) = 0$?
3. Tentukan persamaan TK garis kuasa bola-bola : $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ yang berpusat di titik (0 , m , 1) melalui (0 , 0 , 0). m merupakan suatu parameter ?
4. Tentukan TK titik pusat bola S dimana S menyinggung bidang $V = y - z - 1 = 0$ dan kuasa titik (0,0,0) terhadap S sama dengan kuasanya terhadap bola $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 = 0$?
5. Melalui garis g1 : $x = 0$, $y - 2z = 0$ dan g2 : $x-6=0$, $y-4 = 0$ yang bersilangan dibuat bidang datar yang saling tegak lurus . Tentukan TK irisan tersebut ?
6. Pada lingkaran perpotongan bola $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dan bidang W melalui (0,0,2) yang berubah-ubah , ditempatkan bola S_2 yang melalui titik (0,0,0). Tentukan TK titik tertinggi dan titik terendah dari bola S_2 tersebut ?
7. Tentukan persamaan bola melalui 3 titik P(1,0,0), Q (0,1,0) dan R (0,0,1) dengan jari-jari minimum ?
8. Buktikan bahwa kedua lingkaran :
   lingkaran 1 : $x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z = 0$, $x - y + z = 2$ dan
   lingkaran 2 : $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + z - 5 = 0$, $2x - y + 4z - 1 = 0$
   terletak pada sebuah bola yang sama. Tentukan pula persmaan bolanya ?
9. Tentukan persamaan bola S yang titik pusatnya terletak pada bidang $V = x -2y + z - 5 = 0$ dan memotong bidang $W = 3x -y + 2z = 1$ menurut lingkaran 1 yang berpusat di P (2 , 1, -1), jari-jari 2 ½?
10. Tentukan kedua bidang singgung bola $S = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$ yang sejajar bidang $W = 2x + 2y - z = 0$?

BAB X
BIDANG KUADRATIS (KONIKOIDA)

A. Persamaan Konikoida

Secara umum suatu konikoida dinyatakan: f(x,y,z) =

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

atau sec*aramatrik* :

$$f(x,y,z) = v^T Av + 2b^T v + c = 0, \textit{ yaitu} :$$

$$\begin{bmatrix} x, y, z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{44} \end{bmatrix} = 0$$

Bagian v^TAv disebut bagian homogin kuadratis, 2 b^Tv disebut bagian linier, dan c disebut konstanta dari konikoida.

Persamaan umum konikoida tersebut dapat ditransformasikan melalui transformasi koordinat menjadi salah satu bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ *merupakan Elipsoida*
.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$ *Elipsoida khayal*
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$ *merupakan Hiperbola daun satu*
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$ *Hiperbola daun dua*
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$ *merupakan Kerucut khayal*
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ *Kerucut*

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, *merupakan Parabola eliptik*

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, *Parabola hiperbolik*

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *merupakan Silinder eliptik*

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, *Silinder hiperbolik*

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, *merupakan Silinder khayal*

12. $y^2=4ax$, *Silinder parabolik*

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, *sepasang bidang rata berpotongan*

14 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, *sepasang bidang rata khayal berpotongan*

15. $y^2=a^2$ *sepasang bidang rata sejajar*

16 $y^2=-a^2$, *sepasang bidang rata khayal sejajar*

17. $y^2=0$ *sepasang bidang rata berimpit*

Keterangan: a , b , c merupakan bilangan positip ≠0

B. Sifat- sifat Konikoida

1. Elipsoida : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,

a. Pusat (0,0,0)
b. Bidang-bidang simetri adalah bidang XOY, YOZ, dan XOZ
c. Garis potong 2 bidang simetri disebut sumbu simetri, yaitu sumbu X, sumbu Y dan sumbu Z
d. terlihat bahwa $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-c \le z \le c$
e. Elipsoiba merupakan permukaan tertutup
f. Panjang 2a , 2b , dan 2c disebut panjang sumbu elipsoida
g. Bola merupakan elipsoida yang panjang sumbu-sumbunya

sama

h. Perpotongan sumbu simetri dengan elipsoida, disebut puncak elipsoida sehingga elipsoida mempunyai 6 puncak
i. Irisan dengan bidang datar sejajar dengan bidang simetri merupakan ellips

2. Hiperboloida Daun Satu : . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

a. Pusat (0,0,0)
b. Bidang-bidang simetri adalah bidang XOY, YOZ, dan XOZ
c. Sumbu X, sumbu Y dan sumbu Z merupakan sumbu simetri. Sumbu X dan sumbu Y disebut sumbu nyata sedangkan sumbu Z disebut sumbu khayal dari hiperboola daun satu
d. Panjang sumbu adalah 2a dan 2b
e. Irisan dengan bidang sejajar bidang XOY merupakan ellips. Irisan dengan bidang sejajar XOZ atau YOZ merupakan hiperbola
f. Mempunyai 4 puncak

3. Hiperbola Daun Dua : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

a. Pusat (0,0,0)
b. Bidang-bidang simetri adalah bidang XOY, YOZ, dan XOZ
c. Sumbu X, sumbu Y dan sumbu Z merupakan sumbu simetri. Sumbu X disebut sumbu nyata sedangkan sumbu Y dan Z disebut sumbu khayal dari hiperboola daun dua
d. Panjang sumbu adalah 2a
e. Irisan dengan bidang sejajar bidang YOZ , yaitu bidang x = k, k ≥ a atau k≤ -a merupakan ellips.
f. Mempunyai 2 puncak

4. Kerucut : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

a. Pusat kerucut berimpit dengan puncak yaitu (0,0,0)
b. Bidang-bidang simetri adalah bidang XOY, YOZ, dan XOZ
c. Sumbu X, sumbu Y dan sumbu Z merupakan sumbu simetri.

d. Irisan dengan bidang sejajar bidang XOY merupakan titik, sedangkan dengan bidang lain sejajar bidang XOY, merupakan ellips. Irisan dengan bidang YOZ ataupun XOZ merukpakan sepoasang garis lurus, sedangkan dengan bidang-bidang lain yang sejajar YOZ atau XOZ, merupakan hiperbola.

5. Parabola Eliptik : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$

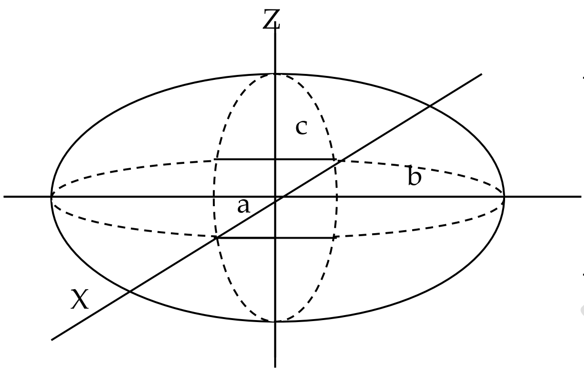
a. Tidak mempunyai titik pusat. Puncak yaitu (0,0,0)
b. Bidang-bidang simetri adalah bidang XOY, dan YOZ
c. Sumbu simetrinya adalah sumbu Z
d. $z > 0$, maka parabola terletak diatas bidang XOY
e. Irisan dengan bidang sejajar bidang XOY yaitu $z = k$, $k > o$ merupakan ellips. Irisan dengan bidang sejajar XOZ ataupun YOZ merupakan parabola

6. Parabola Hiperbolik : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$

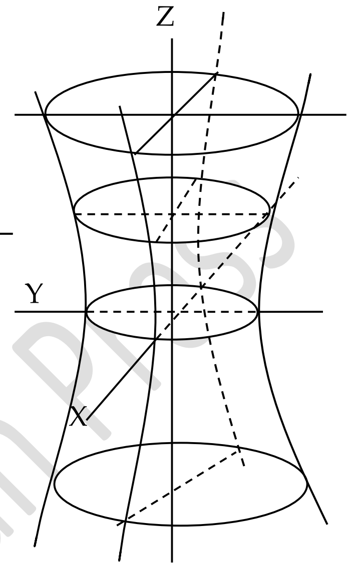
a. Tidak mempunyai titik pusat. Puncak yaitu (0,0,0)
b. Bidang-bidang simetri adalah bidang XOY, dan YOZ
c. Sumbu simetrinya adalah sumbu Z
d. Irisan dengan bidang XOY yaitu $z = 0$ merupakan sepasang garis lurus yang berpotongan di (0,0,0). Irisan dengan $z = k$ meruapakan hiperbola.
   jika $k > 0$: sumbu nyata hiperbola = sumbu X
   Jika $k < 0$: sumbu nyata hiperbola = sumbu Y
e. Irisan dengan bidang sejajar bidang XOZ ataupunYOZ meruapakan parabola

Gambar Konikoida

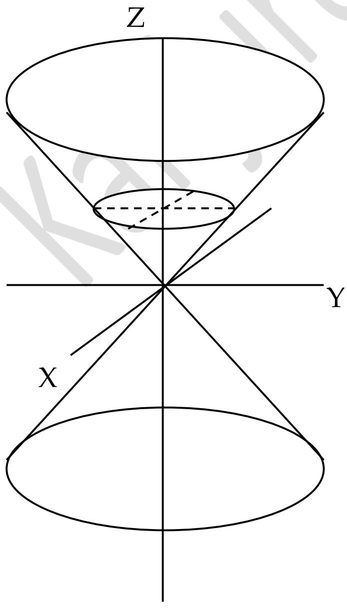
Ellipsioda



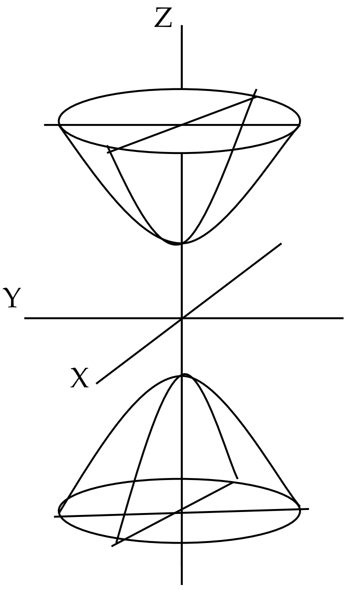
Hiperboloida Daun Satu



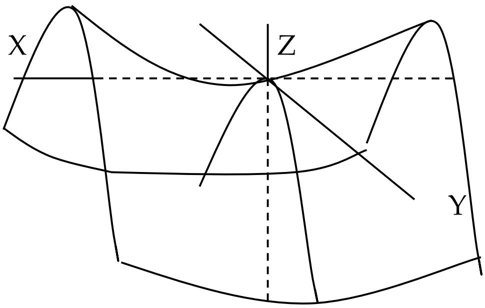
Kerucut



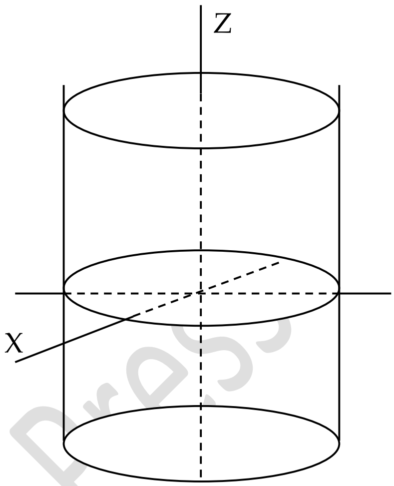
Hiperbola Daun Dua



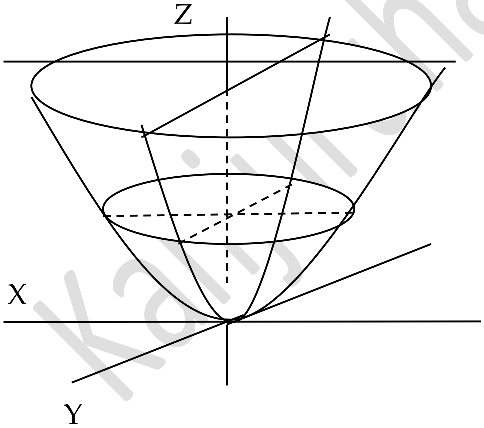
Paraboloa hiperbolik



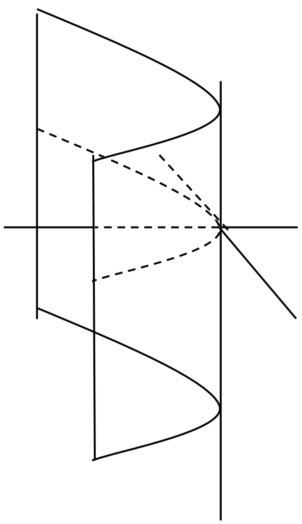
Silinder eleptik



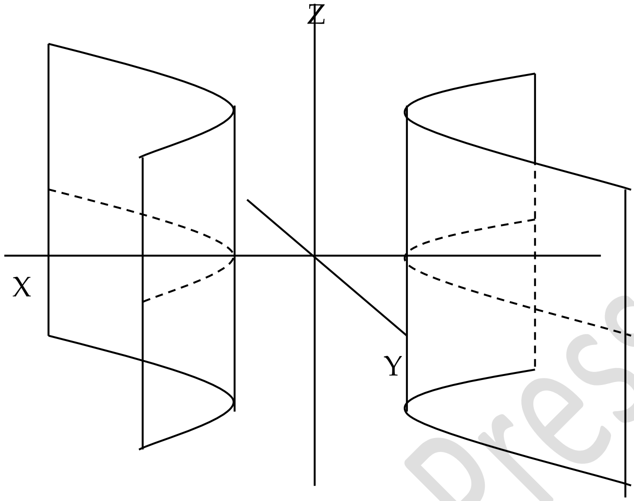
Parabola Eleptik



Silinder Parabolik



Silinder Hiperbolik



Contoh :

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{9}=1,\;$ *merupakan Elipsoida*
2. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1,\;$ *Elipsoida khayal*
3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{2}=1,\;$ *merupakan Hiperbola daun satu*
4. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}-\frac{z^2}{4}=-1,\;$ *Hiperbola daun dua*
5. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=0,\;$ *merupakan Kerucut khayal*
6. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{25}=0,\;$ *Kerucut*
7. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2\frac{z}{3},\;$ *merupakan Parabola eliptik*
8. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=2\frac{z}{5}\;$ *,Parabola hiperbolik*
9. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\;$ *merupakan Silinder eliptik*
10. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\;$ *,Silinder hiperbolik*

11. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=-1,$ *merupakan Silinder khayal*

12. $y^2=47x$ *, Silinder parabolik*

13. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=0,$ *sepasang bidang rata berpotongan*

14 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=0$ *, sepasang bidang rata khayal berpotongan*

15. $y^2=9$ *sepasang bidang rata sejajar*

16 $y^2=-16$ *, sepasang bidang rata khayal sejajar*

17. $y^2=0$ *sepasang bidang rata berimpit*

SOAL LATIHAN:

Disebut konikoida jenis apakah berikut ini :

1. $x^{2}{}^{+} 3y^2 + 2z^2 = 7?$
2. $2x^2 + y^2 + 2z^2 = -6?$
3. $5x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 3?$
4. $x^2 - 2y^2 - 5z^2 = -5?$
5. $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 0?$
6. $2x^2 + y^2 - 2z^2 = 0?$
7. $5x^2 + 3y^2 - 4z = 0?$
8. $x2 - 2y^2 - 5z = 0?$
9. $2x^2 + 5y^2 = 4?$
10. $3x^2 - 7y^2 = 5?$
11. $6x^2 + 7y^2 = -8?$
12. $4x = 5y^2$
13. $3x^2 - 5y^2 = 0?$
14. $2x^2 + 6y^2 = 0$
15. $y^2 = 7?$
16. $y^2 = -8?$
17. $y^2 = 0$

REFERENSI

Karso. Drs. Geometri Analitik Bidang. Bandung: Epsilon. 1982

Karso, Drs. Geometri Analit (jilid 2), Bandung, FPMIPA IKIP Bandung, 1982

Maman Suherman, Geometri Analitika Datar, Jakarta, Universitas Terbuka Depdikbud, 1986

J. Hambali, Geometri Analaitika Ruang, Jakarta, Univdersitas Terbuka Depdikbud, 1986

Joseph H. Kindle, Plane and Solid of Analytic Geometry, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York 1950

Louis Lithold. The Calculus With Analytic Geometry.

Morril W. K. Analytic Geomettry. Pensyilvania: Internatonal Texbook Company Scraton. 1967.

Morril, W.K , Analytic Geometri, Pensylvania: International texbook CVompany, Scraton, 1967

New York: Harper International Edition. Harper & Row Publisher. Hagerstone. San Fransisco. London: 1967.

P.A. White, Vector Analytic Geometry, Delmon, California

Rawuh. Drs. Ilmu Ukur Analitis 1. Bandung: Tarate. 1974.