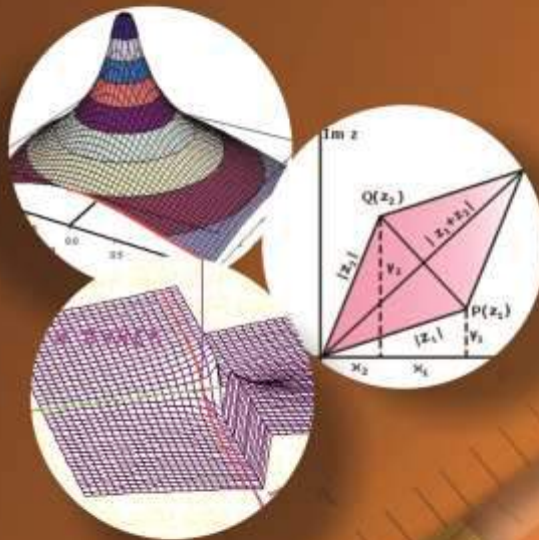


Dra. Retno Marsitin, M.Pd.

FUNGSI KOMPLEKS



The Multicultural University
unikama
Universitas Kanjuruhan Malang

FUNGSI KOMPLEKS

© Yayasan Edelweis
All Right Reserved

Penulis:

Dra. Retno Marsitin, M.Pd

Desain:

Eko Fachtur Rochman, M.Kom

Editor:

Eko Fachtur Rochman, M.Kom

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan

ISBN:

978-602-14916-3-8

Cetakan 1 , Pebruari 2017

Penerbit:

Yayasan Edelweis

Jl. Karangduren Gang 10 (Perum Citra Graha
Residence Blok B7) Pakisaji Kab. Malang Kode pos 65162

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbilalamin, banyak nikmat yang Allah berikan, tetapi sedikit sekali yang kita ingat. Segala puji hanya layak untuk Allah Tuhan seru sekalian alam atas segala berkat, rahmat, taufik, serta hidayah-Nya yang tiada terkira besarnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku dengan judul "Fungsi Kompleks".

Dalam penyusunannya, penulis memperoleh banyak bantuan dari berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada: Kedua orang tua dan segenap keluarga besar penulis yang telah memberikan dukungan, kasih, dan kepercayaan yang begitu besar. Dari sanalah semua kesuksesan ini berawal, semoga semua ini bisa memberikan sedikit kebahagiaan dan menuntun pada langkah yang lebih baik lagi.

Meskipun penulis berharap isi dari buku ini bebas dari kekurangan dan kesalahan, namun selalu ada yang kurang. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Akhir kata penulis berharap agar buku ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Wassalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh

Malang, 8 Maret 2017

Penulis

TINJAUAN MATA KULIAH

Mata kuliah Fungsi Kompleks merupakan mata kuliah wajib yang ditempuh dengan bobot 3 sks. Mata kuliah Fungsi Kompleks memiliki capaian pembelajaran yaitu setelah mengikuti mata kuliah fungsi kompleks, mahasiswa diharapkan mampu menganalisa dan melakukan pembuktian matematika pada fungsi kompleks dengan cermat dan teliti.

Materi dalam fungsi kompleks meliputi pengertian bilangan kompleks, fungsi-fungsi analitik, fungsi-fungsi elementer dan integral. Setiap materi diberikan capaian pembelajaran dan contoh beserta penyelesaiannya sehingga mempermudah mahasiswa dalam memahami permasalahan Fungsi Kompleks. Matematika tak bisa lepas dari soal-soal, begitupun Fungsi Kompleks yang setiap akhir materi diberikan soal-soal sebagai latihan untuk memperdalam materi yang telah dibahas dan sebagai tolak ukur ketercapaian untuk melanjutkan pada materi berikutnya.

Semoga bahan ajar Fungsi Kompleks ini lebih mudah dipahami dan dipelajari sehingga tujuan pembelajaran bisa tercapai dan bisa menambah khasanah keilmuan mahasiswa di bidang matematika khususnya fungsi kompleks.

Malang, 8 Maret 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I BILANGAN KOMPLEKS

Capaian Pembelajaran.....	1
1.1. Bilangan Kompleks dan Aljabarnya.....	1
Soal Latihan 1.....	6
1.2. Geometri Bilangan Kompleks.....	7
1. Koordinat Cartesius.....	7
2. Vektor	9
Soal Latihan 2.....	13
3. Koordinat Kutub	14
Soal Latihan 3.....	17
4. Bentuk Eksponen.....	18
Soal Latihan 4.....	21
1.3. Region	22
Soal Latihan 5.....	29

BAB II FUNGSI – FUNGSI ANALITIK

Capaian Pembelajaran	31
2.1. Fungsi Variabel Kompleks	31
2.2. Pemetaan	34
Soal Latihan 1.....	39
2.3. Limit.....	40
Soal Latihan 2.....	48
2.4. Kontinuitas.....	50
Soal Latihan 3.....	52
2.5. Derivative.....	53
Soal Latihan 4.....	58
2.6. Persamaan Cauchy – Rienmann	60

	Soal Latihan 5.....	62
2.7.	Fungsi Analitik	63
	Soal Latihan 6.....	65
2.8.	Fungsi Harmonik.....	66
	Soal Latihan 7.....	68

BAB III FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

	Capaian Pembelajaran	71
3.1.	Fungsi Eksponen	71
	Soal Latihan 1.....	76
3.2.	Fungsi Trigonometri.....	77
	Soal Latihan 2.....	82
3.3.	Fungsi Hiperbolik	83
	Soal Latihan 3.....	86
3.4.	Fungsi Logaritma	87
	Soal Latihan 4.....	90
3.5.	Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik.....	90
	Soal Latihan 5.....	93

BAB IV INTEGRAL

	Capaian Pembelajaran	94
4.1.	Lintasan (Kurva Jordan).....	94
4.2.	Kontur.....	99
	Soal Latihan 1.....	102
4.3.	Integral Fungsi Kompleks	102
	Soal Latihan 2.....	109
4.4.	Teorema Cauchy – Goursat.....	110
	Soal Latihan 3.....	116
4.5.	Integral Tak Tentu.....	116
	Soal latihan 4.....	120
4.6.	Integral Cauchy.....	121

Soal Latihan 5	126
4.7. Teorema Morera	127
4.8. Teorema Ketaksamaan Cauchy	128
4.9. Teorema Liouville	129
4.10. Teorema Nilai Rata-Rata Gauss	131
4.11. Teorema Modulus Maksimum	132
4.12. Teorema Modulus Minimum	132
4.13. Teorema Dasar Aljabar	133
DAFTAR PUSTAKA.....	137

BAB I

BILANGAN KOMPLEKS

Capaian pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian bilangan kompleks dan aljabarnya dengan cermat dan teliti.
2. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian geometri bilangan kompleks sebagai titik (koordinat kartesius), sebagai vektor dan sebagai koordinat kutub dengan cermat dan teliti
3. Mahasiswa mampu menganalisa geometri bilangan kompleks sebagai eksponen (Formula Euler) dan region bilangan kompleks dengan cermat dan teliti.

1.1. BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

Bilangan kompleks dilambangkan dengan z yang didefinisikan seluruh besaran dengan bentuk:

$$x + iy$$

dari bilangan real x dan y dengan

$$i = \sqrt{-1}$$

sehingga:

$$i^2 = -1$$

atau ditulis sebagai pasangan berurutan:

$$z = (x, y)$$

Bentuk bilangan kompleks:

$$z = x + iy$$

x disebut **bilangan real** dari z ditulis $Re(z)$

y disebut **bagian imajiner** dari z ditulis $Im(z)$

sehingga:

$$x = Re(z) \text{ dan } y = Im(z) \longrightarrow (z) \text{ dan } Im(z) \text{ adalah bilangan real}$$

Bilangan kompleks $z = x + iy$, meliputi:

- Bilangan real $Re(z) \neq 0$ dan bilangan imajiner $Im(z) = 0$ maka $z = x$ adalah **bilangan real**.
Dengan demikian semua bilangan real x dapat dipandang sebagai bilangan kompleks dengan bentuk $z = x + 0i$
- Bilangan real $Re(z) = 0$ dan bilangan imajiner $Im(z) \neq 0$ maka $z = iy$ adalah **bilangan khayal (imajiner)**.
- Bilangan real $Re(z) = 0$ dan $Im(z) = 1$ maka $z = i$ disebut **satuan imajiner**.
- Bilangan real nol dan bilangan imajiner nol maka dikatakan **bilangan kompleks nol** atau $z = 0$ sehingga $z = 0 = 0 + 0i$

Bilangan kompleks dapat ditulis sebagai pasangan berurutan $\longrightarrow z = (x, y)$ maka pada umumnya $(x, y) \neq (y, x)$.

Dua bilangan kompleks sama bila dan hanya bila bagian real sama dan bagian imajiner sama, sehingga:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \text{ bhh } x_1 = x_2 \text{ dan } y_1 = y_2$$

Oleh karena itu $z_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, 3$ misalnya dipandang sebagai bilangan kompleks yang berlainan. Namun demikian **dua bilangan kompleks tidak dapat dibandingkan**, satu lebih besar dari yang lain seperti $z_1 > z_2$ atau sebaliknya.

Aljabar pada bilangan kompleks dengan operasi aljabar yang meliputi operasi uner dan operasi biner serta sifat-sifat operasi sebagai berikut:

1. Operasi Uner (unary operation)

a. Negatif \longrightarrow (**lawan penjumlahan**) dari bilangan kompleks

$$z = x + iy$$

$$\text{Definisi: } -z = -(x + iy) = -x - iy$$

b. Kawan \longrightarrow (**conjugate**) dari bilangan kompleks $z = x + iy$

$$\text{Definisi: } \bar{z} = x - iy, \text{ sehingga } z = x + iy \text{ dan } \bar{\bar{z}} = x + iy$$

c. Kebalikan \longrightarrow (**lawan perkalian**) dari bilangan kompleks $z =$

$$x + iy$$

$$\text{Definisi: } \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

2. Operasi Biner

Bila $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka:

$$\text{a. } z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\text{b. } z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$c. z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$d. \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{asal } z_2 \neq 0$$

3. Sifat-sifat operasi

a. Komutatif $\longrightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$

b. Asosiatif $\longrightarrow z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ dan $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$

c. Distributif $\longrightarrow z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

d. Sekawan \longrightarrow (1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ dan $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ dan $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(3) $\overline{\overline{z}} = z$

(4) $z \overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

(5) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$ dan $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \overline{z}}$

(6) $z + \overline{z} = 2Re(z)$ dan $z - \overline{z} =$

$2i Im(z)$

(7) $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ dan $Im(z) =$

$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

e. Elemen Netral (elemen identitas)

(1) Bilangan kompleks $0 = 0 + i0$ disebut elemen netral pertambahan (identitas tambah)

(2) Bilangan kompleks $1 = 1 + i0$ disebut elemen netral perkalian (identitas kali)

Sifat-sifat:

$$(a) z + 0 = 0 + z = z \text{ dan } z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

$$(b) z + (-z) = 0 \text{ dan } z \cdot \frac{1}{z} = z \cdot z^{-1} = 1$$

Contoh:

(1) Hitunglah:

$$a. (4 + 2i) + (-7 - i)$$

$$b. (5 + 3i) + \{((-1 + 2i) + (7 - 5i))\}$$

$$c. \{(5 + 3i) + (-1 + 2i) + (7 - 5i)\}$$

(2) Apabila $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ maka hitunglah:

$$a. \{(5 + 3i) + (-1 + 2i) + (7 - 5i)\}$$

$$b. \bar{z}_2 - 2\bar{z}_1 + 5$$

(3) Tunjukkan bahwa $z \cdot \bar{z}_1 = [Re_{(z)}]^2 + [Im_{(z)}]^2$

Penyelesaian:

$$(1) a. (4 + 2i) + (-7 - i) = 4 + 2i - 7 + i = -3 + 3i$$

$$b. (5 + 3i) + \{((-1 + 2i) + (7 - 5i))\} = (5 + 3i) + (-1 + 2i + 7 - 5i) = (5 + 3i) + (6 - 3i) = 11$$

$$c. \{(5 + 3i) + (-1 + 2i) + (7 - 5i)\} = \{5 + 3i - 1 + 2i\} + (7 - 5i) = (4 + 5i) + (7 - 5i) = 11$$

(2) Apabila $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ maka:

$$\begin{aligned} a. z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 &= (2 + i)^3 - 3(2 + i)^2 + 4(2 + i) - 8 \\ &= \{2^3 + 3(2)^2(i) + 3(2)i^2\} - 3(4 + 4i + i^2) + 8 + 4i - 8 \\ &= -7 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \bar{z}_2 - 2\bar{z}_1 + 5 &= \overline{(3 - 2i)} - 2\overline{(2 + i)} + 5 = 3 + 2i - 2(2 - i) + \\ &5 \\ &= 3 + 2i - 4 + 2i + 5 = 4 + 4i \end{aligned}$$

(3) Misalkan: $z = x + iy$ maka $\bar{z} = x - iy$

$$\text{sehingga: } z\bar{z} = (x + iy)(-iy) = x^2 + y^2 = [Re_{(z)}]^2 + [Im_{(z)}]^2$$

$$\text{Jadi terbukti bahwa: } z \cdot \bar{z} = [Re_{(z)}]^2 + [Im_{(z)}]^2$$

Soal Latihan 1

1. Tunjukkan bahwa:

a. $z \cdot z^{-1} = 1$

b. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2. Diberikan $z_1 = 4 + 3i$ dan $z_2 = 5 - 2i$

Tentukan:

a. $z_1 + z_2$

b. $z_1 \cdot z_2$

c. $\frac{z_1}{z_2}$

3. Diberikan persamaan $3x + 5y = 4$. Ubahlah persamaan tersebut dalam persamaan bilangan kompleks.

4. Nyatakan dalam bentuk $x + iy$:

a. $(2 + 3i)(-2 - 3i)$

b. $\frac{6i}{6-5i}$

c. $\frac{i}{1+i} + \frac{1-i}{i}$

5. Tunjukkan bahwa:

a. Jika $z = -1$ maka $z^2 + 2z + 2 = 0$

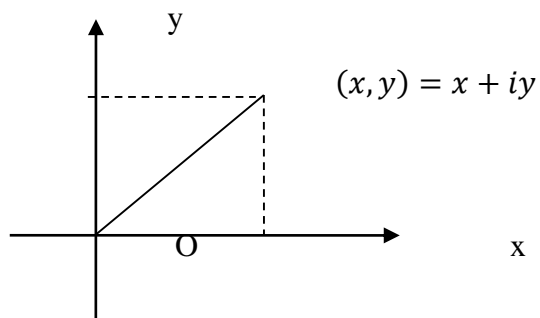
- b. $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$
6. Diberikan $z = 2 + 3i$, $u = 5 - 3i$ dan $v = 1 - i$
Tentukan:
- $z + u$
 - $u - v$
 - vz
 - $z\bar{u}$
 - $\frac{u}{\bar{v}}$
7. Tunjukkan bahwa $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ dan $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
8. Tunjukkan bahwa:
- $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$
 - $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8)$
 - $(1 - i)^4 = -4$
9. Jika $z = a + bi$, nyatakan z^2 dan z^3 dalam bentuk $a + bi$
10. Tunjukkan bahwa apabila $z = -1 - i$ maka $z^2 + 2z + 2 = 0$

1.2. GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

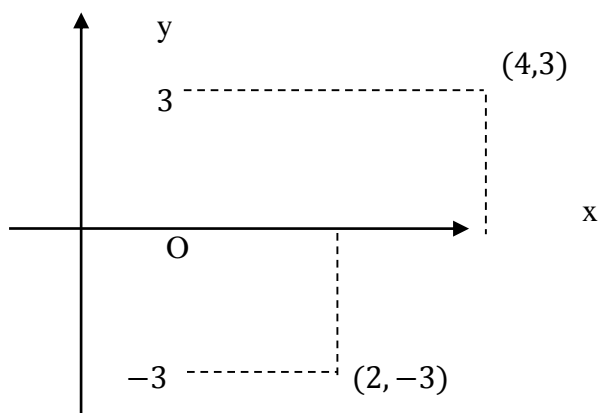
Geometri bilangan kompleks meliputi bilangan kompleks sebagai titik koordinat cartesius, bilangan kompleks sebagai vektor dan sebagai koordinat kutub serta sebagai bentuk eksponen.

1. Koordinat Cartesius

Bilangan kompleks z dalam bentuk pasangan terurut $z = (x, y)$ maka untuk memetakan satu-satu antara himpunan bilangan kompleks dengan titik-titik di bidang xy , dimana *sumbu x disebut sumbu real* dan *sumbu y disebut sumbu imajiner* sedangkan *bidang xy disebut bidang kompleks*.



Gambar 1.1. Bidang Kompleks



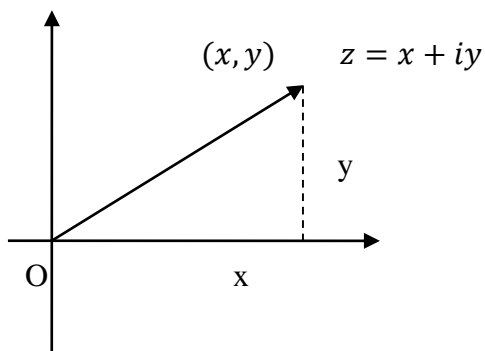
Gambar 1.2. Bidang Cartesius

Contoh:

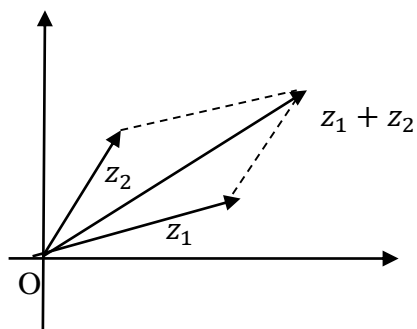
Titik $(2, -3)$ berkorespondensi dengan bilangan kompleks $z_1 = 2 - 3i$, titik $(4, 3)$ dengan $z_2 = 4 + 3i$ dan titik asal $O(0, 0)$ dengan $0 = 0 + i0$, sehingga menyebutkan bilangan dan titik dapat dikatakan misalnya bilangan (p, q) atau titik $p + iq$

2. Vektor

Bilangan kompleks $z = x + iy$ dalam bentuk vektor posisi yang pangkalnya di titik O dan ujungnya di titik (x, y) .



Gambar 1.3. Bidang Kompleks



Gambar 1.4. Bidang Vektor

Vektor $z = x + iy$ maka diperoleh:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$|z|$ disebut **modulus** z yaitu bilangan positif yang menyatakan panjang vektor

Penjumlahan dan selisih dari dua vektor $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka diperoleh:

$$(z_1 + z_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \text{ dan } (z_1 - z_2) \\ = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Menyatakan jarak dua titik atau panjang segmen garis z_1z_2 yaitu:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Untuk setiap $z = x + iy$, ada tiga bilangan real yang saling berhubungan yaitu modulus $|z|$, $Re(z) = x$ dan $Im(z) = y$ dengan sifat sebagai berikut:

- a. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- b. $|z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$
- c. $|z|^2 = |z^2| = z\bar{z}$ atau $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ bila $z \neq 0$
- d. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
- e. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- f. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
- g. $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$
- h. $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

Terkait dengan sifat-sifat dalam segitiga diperoleh:

- i. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- j. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
- k. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

Sifat (i) merupakan sifat ketidaksamaan segitiga dengan pembuktian terkait modulus. Dibuktikan bahwa $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ melalui $|z|^2 = z\bar{z}$ yaitu:

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\
 &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \\
 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
 &= |z_1 + z_2|^2
 \end{aligned}$$

Langkah pertama dan terakhir besarnya tidak negatif dalam arti positif maka ketidaksamaan segitiga terpenuhi.

Contoh:

- (1) Hitunglah $(6 - 2i) - (2 - 5i)$ secara analitik dan secara grafik serta nyatakan bilangan kompleks dalam bentuk titik koordinat cartesius
- (2) Tentukan persamaan lingkaran dengan jari-jari 4 yang berpusat di $(-2,1)$

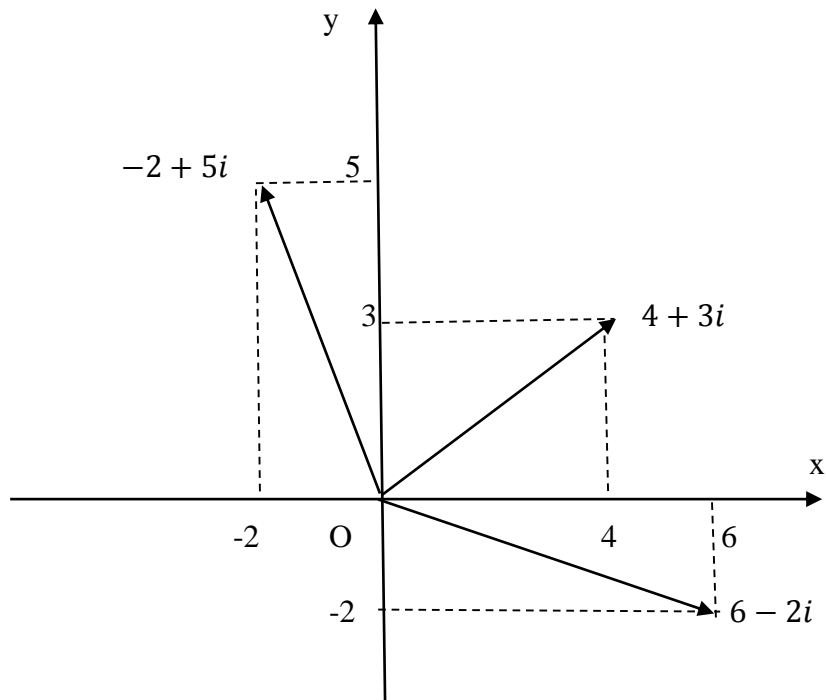
Penyelesaian:

- (1) Operasi $(6 - 2i) - (2 - 5i)$ dapat dikerjakan secara analitik dan secara grafik

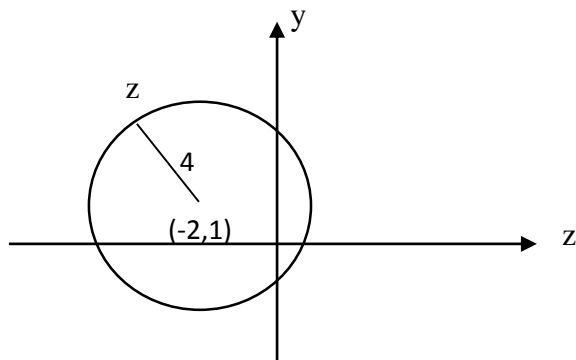
Secara analitik $\rightarrow (6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2 = 2i + 5i = 4 + 3i$

Secara grafik $\rightarrow (6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2i + (-2 + 5i)$

Bilangan kompleks tersebut dalam titik



(2) Persamaan lingkaran dengan jari-jari 4 yang berpusat di $(-2,1)$



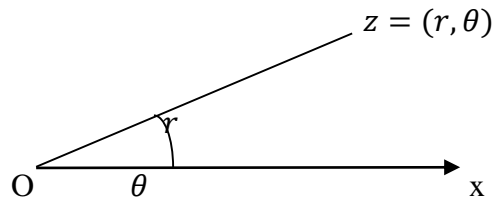
Pusat lingkaran dapat dinyatakan dengan bilangan kompleks $-2 + i$. Jika x adalah suatu titik pada lingkaran maka jarak dari z ke $-2 + i$ yaitu: $|z - (-2 + i)| = 4$, sehingga $|z - (-2 + i)| = 4$ merupakan persamaan lingkaran. Apabila dalam bentuk koordinat menjadi: $|(x + 2) + i(y - 1)| = 4$, sehingga: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

Soal Latihan 2

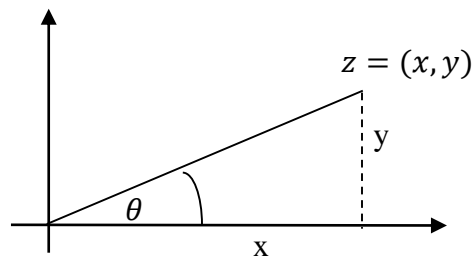
1. Tunjukkan bahwa:
 - a. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
 - b. $|z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$
2. Selidiki tempat kedudukan titik-titik yang ditunjukkan oleh:
 - a. $Im(\bar{z} + 2i) = 5$
 - b. $|z + i| = 2$
3. Apabila $z = \frac{1+2i}{3-4i}$ maka tentukan:
 - a. $Re(z)$
 - b. $Im(z)$
 - c. $|z|$
4. Tunjukkan bahwa $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
5. Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang ditunjukkan :
 - a. $Im(2i + 3z) = 8$
 - b. $Re(i\bar{z}) = 5$
 - c. $-1 \leq Re(z) < 1$
 - d. $|z + 2i| = 3$
6. Jika $|z - 2| = 3$, tunjukkan:
 - a. $|z^2 - 5z| \leq 18$
 - b. $|z^2 - 5z + 6| \geq 6$
7. Tunjukkan bahwa persamaan $x^2 - y^2 = 1$, dapat ditulis sebagai persamaan $z^2 + z^{-2} = 2$
8. Tunjukkan bahwa $\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$

3. Koordinat Kutub

Bilangan kompleks $z = (x, y)$ dalam koordinat kutub dapat dinyatakan (r, θ) dengan r adalah jarak titik z ke pusat sumbu O dan θ sudut antara vektor z dengan sumbu x positif.



Gambar 1.5. Koordinat Kutub



Gambar 1.6. Koordinat Titik

Hubungan koordinat kutub dengan koordinat kartesius yaitu:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{dan} \quad \theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

sehingga $z = x + iy$ dalam bentuk kutub:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

$$r = |z| = \text{modulus } z$$

$$\theta = \operatorname{arg} z \text{ (argumen } z)$$

maka diperoleh:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \text{adalah bilangan real non negatif}$$

karena $\sin\theta$ dan $\cos\theta$ adalah periodik maka $\theta = \arg z$ berharga banyak dan dalam berbagai perhitungan sering dipilih harga tunggal dari θ yang disebut **harga utama** yaitu dari $-\pi$ sampai dengan π dan ditulis $\text{Arg } z$.

sehingga:

$$-\pi \leq \text{Arg } z \leq \pi$$

atau

$$\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pengertian terakhir yang penting terutama bila menghadapi dua bilangan kompleks yang sama yaitu:

$$\begin{aligned} r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) &= r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ &\text{bila dan hanya bila} \\ r_1 = r_2 \text{ dan } \theta_1 &= \theta_2 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Sifat-sifat argument:

- a. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$
- b. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \} = \frac{r_1}{r_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2) =$
 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$
- c. $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r} (\cos\theta_1 - i \sin\theta_2) = \frac{1}{r} \text{cis}\theta$
- d. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- e. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- f. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- g. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

Contoh:

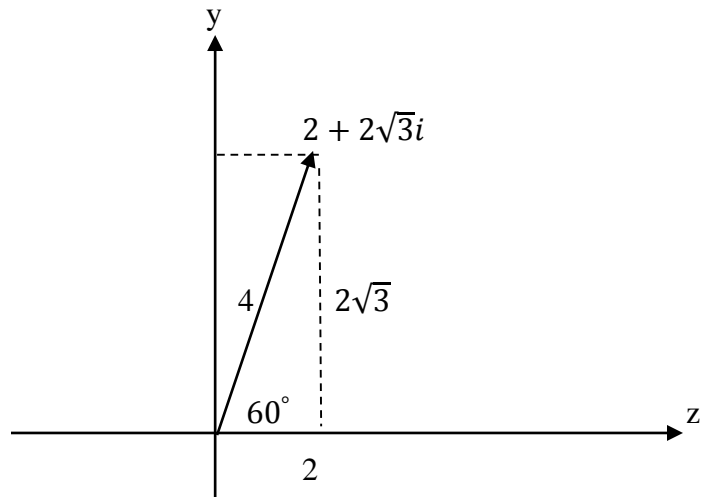
Nyatakan bilangan kompleks $2 + 2\sqrt{3}i$ dalam bentuk kutub

Penyelesaian:

Bilangan kompleks $2 + 2\sqrt{3}i$ dalam bentuk kutub

$$\text{Modulus} \rightarrow r = |2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\text{Argument} \rightarrow \theta = \sin^{-1} 2 \sqrt{\frac{3}{4}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{3}{2}} = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radian}$$



sehingga:

$$2 + 2\sqrt{3}i = r(\cos\theta + i \sin\theta) = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$2 + 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$

Dirubah bentuk pangkat $\rightarrow 2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\pi \frac{i}{3}}$

Jadi bentuk kutub dari $2 + 2\sqrt{3}i$ yaitu $4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ atau $4e^{\pi \frac{i}{3}}$

Soal Latihan 3

1. Tentukan $\operatorname{arg} z$, $\operatorname{Arg} (z)$ dan bentuk kutubnya:
 - a. $z = 1 + i$
 - b. $z = i$
2. Tentukan z dalam bentuk $x + iy$ sehingga $|z| = 3$ dan $\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}$
3. Diberikan $z = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{-1+i}$, tentukan bentuk kutub dari:
 - a. z
 - b. \bar{z}

4. Diberikan $z = \frac{i}{-3-3i}$, tentukan bentuk kutub dari:
- z
 - \bar{z}
5. Gunakan bentuk kutub untuk menunjukkan bahwa:
- $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2(1 + i\sqrt{3})$
 - $\frac{5i}{2+i} = 1 + 2i$
 - $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$
6. Selesaikan persamaan $|e^{i\theta} - 1| = 2$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan jelaskan arti geometrinya
7. Jelaskan melalui suatu hubungan matematik seluruh titik pada bidang datar yang terletak di dalam lingkaran yang pusatnya z_0 dan jari-jarinya r
8. Nyatakan $z = -5 + \sqrt{75}i$ dalam bentuk kutub

4. Bentuk Eksponen (Formula Euler)

Eksponen (formua Euler) dalam bentuk $(\cos\theta + i \sin\theta)$ dapat dinyatakan dengan $e^{i\theta}$ atau $\exp(i\theta)$ yaitu:

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

sehingga $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ dapat ditulis dalam bentuk eksponen/formula Euler:

$$z = re^{i\theta} = r \exp(i\theta)$$

Operasi perkalian, pembagian, pangkat dan akar sebagai berikut:

(1) Perkalian dan Pembagian

- a. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- b. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, $z_2 \neq 0$
- c. $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

(2) Pangkat

Hasil kali n bilangan kompleks $z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k (\cos\theta_k + i \sin\theta_k)$,
 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ didefinisikan sebagai berikut:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}$$

Apabila $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r e^{i\theta}$ maka:

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \exp(in\theta)$$

atau

$$z^n = r^n (\cos\theta + i \sin\theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

khusus untuk $r = 1$ diperoleh:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

→ **Rumus**

De Moivre

(3) Penarikan Akar

Penarikan akar adalah kebalikan dari operasi perpangkatan, sehingga

$\sqrt[n]{z}$ atau $z^{\frac{1}{n}}$ selalu memiliki n harga, bila:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta), z_0 = r_0(\cos\theta + i \sin\theta) \text{ dan } z_0 = z^{\frac{1}{n}} \text{ atau } z_0^n = z$$

maka diperoleh identitas:

$$r_0^n(\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

sehingga:

$$r_0^n = r \text{ atau } r_0 = r^{\frac{1}{n}} \text{ dan } n\theta_0 = \theta + 2k\pi$$

$$\text{atau } \theta_0 = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$$

secara umum dirumuskan, bila $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ maka:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$$

Catatan: Penyelesaian $z^{\frac{1}{n}} = 1$, akan mendapatkan n titik (penyelesaian) dan membentuk segi n beraturan pada lingkaran satuan.

Contoh: Tentukan akar pangkat tiga dari i

Penyelesaian:

Dalam hal ini, berarti menyelesaikan persamaan $z^3 = i$, sehingga menyatakan z dan i dalam bentuk kutub pada persamaan diatas

$$z^3 = i \quad \longrightarrow \quad z_k = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}}$$

merubah $z = 1 + 0i$ ke bentuk kutub:

$$|z| = \sqrt{1 + 0} = 1$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0 + 2k\pi$$

$$z = 1 + 0i = 1 (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)$$

sehingga:

$$z_k = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

$$\text{untuk } k = 1 \text{ maka } z_1 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1 + i0$$

$$\text{untuk } k = 2 \text{ maka } z_2 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$\text{untuk } k = 3 \text{ maka } z_3 = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

Jadi akar pangkat tiga dari i adalah $1 + i0$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ dan $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

Catatan:

- (1) Bila dilukis pada bidang xy maka ketiga titik z_1, z_2 dan z_3 membentuk segitiga sama sisi
- (2) Secara umum diperoleh realita bahwa penyelesaian $z^{\frac{1}{n}} = 1$ mendapatkan n titik penyelesaian dan membentuk segi n beraturan pada lingkaran satuan

Soal Latihan 4

1. Hitunglah:
 - a. $(1 - i)^8$
 - b. $(1 + i\sqrt{3})^{15}$
2. Tentukan akar-akar dari persamaan:
 - a. $(-1)^{\frac{1}{2}}$
 - b. $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

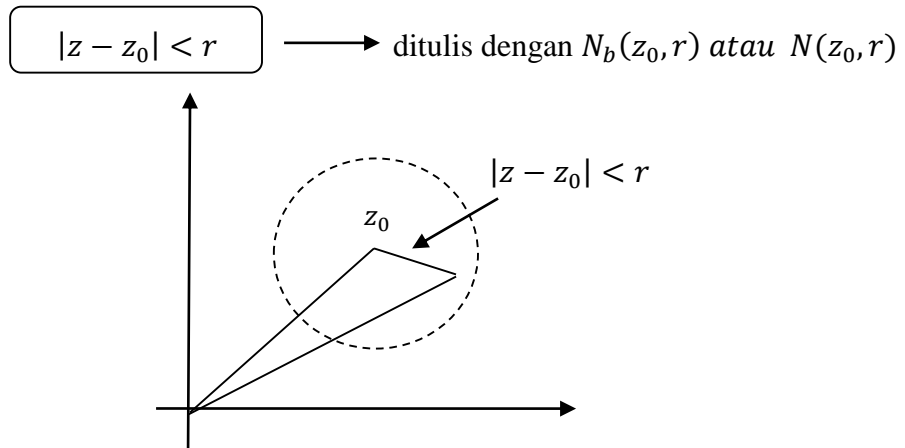
3. Tentukan semua nilai akar pangkat 6 dari 1
4. Hitunglah akar-akar persamaan dari:
 - a. $(-1)^{\frac{1}{2}}$
 - b. $(3i)^{\frac{1}{3}}$
 - c. $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
5. Tentukan akar-akar persamaan dari $z^3 + i = 0$
6. Tunjukkan bahwa semua akar pangkat 5 dari $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i)^2}$ merupakan titik-titik sudut segilima beraturan dengan salah satu titik sudut $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$
7. Tunjukkan bahwa salah satu nilai $i^{\frac{1}{4}}$ adalah bilangan α dengan $Re(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ dan nilai-nilai yang lain $i\alpha, -\alpha$
8. Jika a dan b akar yang tidak real dari persamaan $z^3 = 1$
9. Tunjukkan bahwa $a^2 = b$ dan apakah $b = a^2$?
10. Tunjukkan bahwa apabila a bilangan real tertentu maka akar kuadrat dari $a + 1$ adalah $\pm\sqrt{A} \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right)$ dengan $A = \sqrt{a^2 + 1}$ dan $\alpha = Arg(a + 1)$
11. Tunjukkan bahwa rumus trigonometri $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ dan $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

1.3. Region

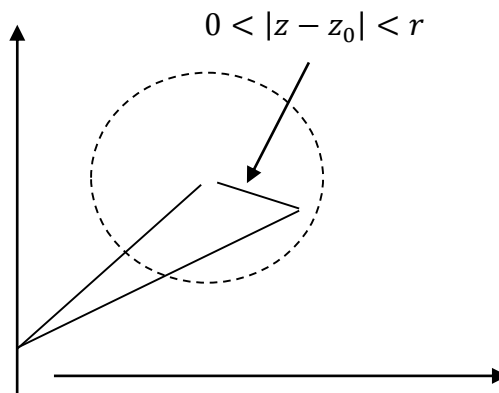
Himpunan bilangan-bilangan kompleks yang meliputi titik-titik atau hal-hal lain yang terkait dalam pembahasan, diuraikan dengan beberapa istilah yaitu:

1. Neighborhood (lingkungan)

Misal z_0 sembarang titik dan r bilangan real positif. Lingkungan bagi z_0 (r - neighborhood of z_0) didefinisikan sebagai himpunan titik-titik z dibidang kompleks sedemikian hingga:



Gambar 1.7. Neighborhood



Gambar 1.8. Neighborhood Terhapus

Lingkungan $-r$ terhapus bagi z_0 (*deleted r - neighborhood of z_0*) didefinisikan sebagai himpunan titik-titik z sedemikian hingga:

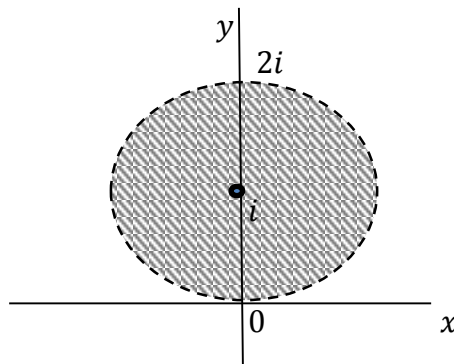
$$0 < |z - z_0| < r$$

→ ditulis dengan $N_b^*(z_0, r)$

Jadi $N_b(z_0, r)$ merupakan himpunan semua titik didalam lingkaran termasuk pusatnya z_0 , sedangkan $N_b^*(z_0, r)$ merupakan himpunan semua titik didalam lingkaran kecuali pusatnya z_0

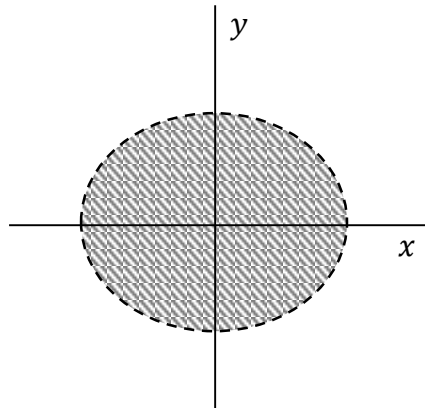
Contoh:

- (1) $N_b(i, 2)$ lingkaran 2 bagi i yaitu $|z - i| < 2$ adalah himpunan titik-titik dalam lingkaran $|z - i| = 2$ termasuk pusatnya i (tidak termasuk kelilingnya), sedangkan $N_b^*(i, 2)$ adalah himpunan titik-titik dalam lingkaran kecuali $|z - i| = 2$ kecuali pusatnya i .
- (2) $N(i, 1)$, "lingkaran 01 bagi i " adalah bagian dalam interior lingkaran pada $|z - i| = 1$, yaitu terdiri dari semua titik z sedemikian hingga $|z - i| < 1$ tampak pada gambar berikut:



Gambar 1.10 lingkaran $N(i, 1)$

$N(*, \varepsilon)$ terdiri dari semua z sedemikian hingga $0 < |z| < \varepsilon$, yaitu bagian dalam lingkaran $|z| = \varepsilon$ yang pusatnya $z = 0$ dibuang pada gambar berikut:



Gambar 1.11 lingkungan $N(*, \varepsilon)$

2. Komplemen, titik dalam, titik luar, titik batas

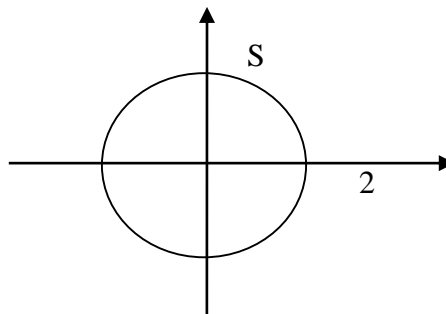
- a. Dari himpunan S maka komplemen - S adalah himpunan titik-titik selain S .
- b. Titik z_0 disebut titik dalam (*interior point*) dari himpunan S bila *neighborhood* z_0 hanya memuat titik-titik dari S .
- c. Titik luar (*exterior point*) bila *neighborhood* z_0 memuat titik-titik bukan dari S .
- d. Bila z_0 bukan salah satu maka disebut titik batas. Jadi z_0 titik batas (*boundary point*) dari himpunan S bila *neighborhood* z_0 memuat titik-titik dari S dan titik-titik bukan dari S . Semua titik batas adalah pembatas himpunan S .

Contoh:

- (1) Misalkan S adalah himpunan semua z sedemikian hingga $R(z) > 1$ maka jelas bahwa S terdiri dari semua titik pada bidang datar tepat di sebelah kanan garis $x = 1$. Komplemen S adalah himpunan semua z

pada dan sebelah kiri $x = 1$, yaitu semua z sedemikian hingga $\operatorname{Re}(z) \leq 1$

- (2) Misalkan T adalah himpunan semua z sedemikian hingga $1 \leq |z| \leq 3$. Komplemen T terdiri dari semua z sedemikian hingga $|z| < 1$ atau $|z| \geq 3$
- (3) Misal S adalah cakram $|z| < 2$ maka tidaklah sulit melihat batas dari himpunan S yaitu lingkaran $|z| = 2$



Gambar 1.9. Cakram

Setiap mengambil sembarang titik w pada lingkaran dan melukis *neighborhood* $N(w, r)$ untuk sembarang $r > 0$ bagaimanapun kecilnya pasti memuat titik-titik dari S dan titik bukan S , tetapi titik-titik pada lingkaran bukanlah milik S sehingga S himpunan yang tidak memiliki titik batas.

- (4) Misal T pita tak hingga yang terdiri dari semua titik z dari $1 < \operatorname{Im}(z) \leq 3$ maka batas T adalah dua garis mendatar $y = 1$ bukan milik T dan $y = 3$ yang termasuk dalam T , hal ini berarti T memuat sebagian tapi tidak semua titik batasnya.
- (5) Misal V himpunan semua titik z sedemikian $1 \leq |z - i| \leq 2$ maka V memuat semua titik batas yaitu dua lingkaran $|z - i| = 1$ dan $|z - i| = 2$

Ketiga kasus pada contoh diatas tampak memberikan gambaran bahwa suatu himpunan tidak memuat batasnya atau memuat sebagian tetapi tidak semua titik batasnya atau dapat memuat semua batasnya. Apabila suatu himpunan tidak memuat titik batasnya maka himpunan terbuka (*open set*), dan apabila memuat semua batasnya disebut himpunan tertutup (*close set*). Apabila himpunan tersebut memuat sebagian tetapi tidak semua batasnya maka himpunan tersebut dikatakan tidak terbuka dan tidak tertutup.

Konsep himpunan terbuka memiliki hubungan yang tidak dapat terpisahkan dengan konsep paling penting dalam teori fungsi kompleks, dengan menggunakan istilah *region* untuk menunjukkan himpunan terbuka tak kosong pada bidang datar dan istilah *region tertutup* untuk menunjukkan region berserta titik batasnya.

Suatu himpunan B disebut berbatas (*bounded*) jika dapat ditemukan lingkaran dengan $|z| = M$ yang memuat seluruh B , sehingga B berbatas dan dapat ditemukan bilangan positif M sedemikian hingga $|z| < M$ untuk setiap z dalam himpunan B . Apabila M semacam itu tidak terdapat maka himpunan tersebut dinamakan tak terbatas (*unbounded*).

3. Himpunan Terbuka dan Tertutup

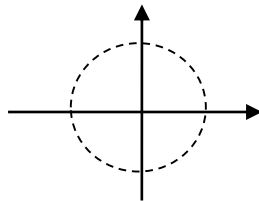
- a. Himpunan terbuka (*open set*) adalah suatu himpunan yang tidak memiliki titik batas.
- b. Himpunan tertutup (*closed set*) adalah himpunan yang memiliki semua titik batas.
- c. Himpunan yang memuat sebagian tapi tidak semua titik batas disebut tidak terbuka dan tidak tertutup.

4. Terhubung, Domain dan Region

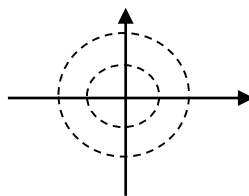
- a. Himpunan terbuka (*open set*) S disebut terhubung (*connected*) jika setiap pasang dari titik-titiknya dapat dihubungkan dengan rantai kontinu tak hingga segmen garis yang titik-titiknya selalu terletak pada S .
- b. Suatu himpunan terbuka dan terhubung disebut *domain* dan setiap *neighborhood* yang telah kita kenal merupakan domain.
- c. Suatu domain yang bersama-sama dengan semua, beberapa atau tanpa titik batas membentuk sebuah region.
- d. Suatu region tertutup menunjukkan region beserta batasnya.
- e. Suatu himpunan b disebut terbatas (*bounded*) jika dapat ditemukan lingkaran $|z| = M$ yang memuat B . Jadi B terbatas bila dapat menemukan bilangan positif M sedemikian hingga $|z| < M$ untuk setiap z dalam himpunan B . Apabila ditemukan M sebagaimana diatas maka B disebut tak terbatas (*unbounded*).

Contoh:

- (1) Open set $|z| < 1$ adalah terhubung (*connected*), sedangkan himpunan $1 < |z| < 2$ tidak terhubung.



Gambar 1.10. Terhubung



Gambar 1.11. Tidak Terhubung

- (2) $1 \leq |z| < 3$ adalah himpunan terbatas dan berbatas (mempunyai semua titik batas), dapat disebut region.
- (3) $1 < \text{Im}(z) \leq 3$ adalah himpunan tak terbatas dan berbatas disebut himpunan tertutup tapi bukan region tertutup.
- (4) $\text{Re}(z) > 1$ adalah himpunan tak terbatas dan tidak mempunyai titik batas.
- (5) Suatu lingkungan atau lingkungan terhapus bagi sembarang titik z merupakan suatu region
- (6) “Anulus melingkar” yang terdiri atas titik-titik z dengan $-2 \leq |z + 2| \leq 3$ merupakan region tertutup. Himpunan tersebut terdiri atas region diantara dua lingkaran konsentris $|z + 2| = 2$ dan $|z + 2| = 3$ dengan batas region yaitu kedua lingkaran tersebut.
- (7) Penggal sumbu nyata dengan $-2 \leq x \leq 2$ merupakan himpunan tertutup tetapi bukan region tertutup karena terdiri dari satu region berikut batasnya. Perhatikan bahwa himpunan ini terdiri atas seluruhnya titik batas dan tidak memuat titik dalam.

Soal Latihan 5

1. Gambarlah himpunan berikut, dengan domain:
 - a. $|2z + 3| > 4$
 - b. $|z - 4| \geq |z|$
 - c. $|z| > 0, 0 \leq \arg z \leq \frac{1}{4}\pi$
2. Tentukan daerah pada bidang z berikut ini:
 - a. $|z| < 3$

- b. $1 < |z + 2i| \leq 2$
- c. $\frac{\pi}{3}\pi \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
3. Diketahui himpunan A dan B yang berturut-turut dinyatakan dengan $|z - 1| < 3$ dan $|z - 2i| < 2$. Nyatakan daerah berikut pada bidang z :
- a. $A \cap B$ atau AB
- b. $A \cup B$ atau $A + B$
4. Nyatakan secara grafik himpunan semua nilai z yang memenuhi:
- a. $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$
- b. $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2$

BAB II

FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

Capaian pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi variabel kompleks dan pemetaan (*mapping*) dengan cermat dan teliti.
2. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian limit dalam fungsi kompleks
3. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian kontinuitas dalam fungsi kompleks dengan cermat dan teliti.
4. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian derivative (fungsi turunan-penurunan fungsi) dengan cermat dan teliti.
5. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian Persamaan Cauchy-Riemann (PCR) dengan cermat dan teliti.
6. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi-fungsi analitik dengan cermat dan teliti.
7. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi harmonik dengan cermat dan teliti.

2.1. FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Jika pada setiap nilai variabel kompleks z terdapat satu atau lebih nilai dari variabel kompleks w adalah suatu fungsi dari z yang dituliskan:

$$w = f(z) \text{ atau } w = g(z)$$

Variabel z disebut suatu variabel bebas dan w disebut variabel tak bebas dan nilai suatu fungsi di $z = a$ maka dituliskan: $f(a)$

Contoh:

- (1) Jika $f(z) = z^2$ maka tentukan nilai dari $f(5i)$
- (2) Jika $f(z) = 2z^2 + 7$ maka tentukan nilai dari $f(3i)$

Penyelesaian:

- (1) Nilai dari $f(5i)$:

$$f(z) = z^2$$
$$f(5i) = (5i)^2 = -25$$

- (2) Nilai dari $f(3i)$:

$$f(z) = 2z^2 - 7$$
$$f(3i) = (3i)^2 + 12 = -9 + 12 = 3$$

Apabila hanya satu nilai w dihubungkan dengan setiap nilai dari z maka w adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari z atau $f(z)$ bernilai tunggal dan apabila lebih dari satu nilai w dihubungkan dengan setiap nilai dari z maka w adalah suatu fungsi bernilai banyak dari z atau $f(z)$ bernilai banyak, sebagai contoh pada kasus berikut:

- (1) Apabila $w = z^2$ maka pada setiap nilai z terdapat hanya satu nilai w . Hal ini dapat dikatakan $w = f(z) = z^2$ merupakan suatu fungsi bernilai tunggal dari z .
- (2) Apabila $w = z^{\frac{1}{2}}$ maka pada setiap nilai z terdapat hanya dua nilai w . Hal ini dapat dikatakan $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ merupakan suatu fungsi bernilai banyak (dua nilai) dari z .

Apabila fungsi $w = f(z) = z^2$ atau $w = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$, maka diperoleh:

$$w = x^2 - y^2 + i2xy \rightarrow u = x^2 - y^2 \text{ dan } v = 2xy$$

Hal ini berarti bahwa tiap fungsi kompleks $w = f(z)$ berkorespondensi dengan dua fungsi nyata $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ dituliskan:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Apabila variabel $z = (x, y)$ dinyatakan dalam bentuk kutub $x = (r, \theta)$, $y = (r, \theta)$ maka $w = f(z)$ dapat dinyatakan:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

Contoh:

Tentukan bentuk kutub dari $w = f(z) = z^2$

Penyelesaian:

Bentuk kutub dari $w = f(z) = z^2$ atau $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2$, yaitu:

$$w = r^2(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta$$

dengan:

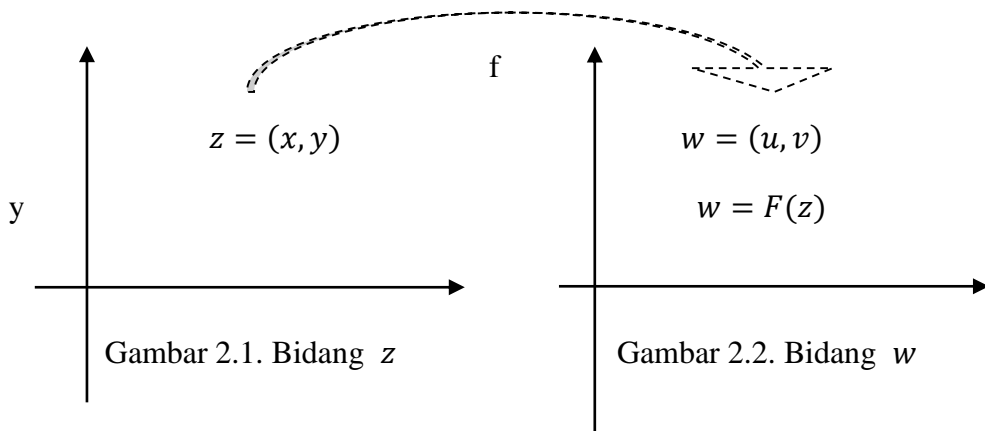
$$u = r^2 \cos 2\theta \quad \text{dan} \quad v = r^2 \sin 2\theta$$

Apabila dari $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan $Im(f(z)) = 0$ atau $v(x, y) = 0$ maka diperoleh fungsi real, misalnya $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

2.2. PEMETAAN

Memiliki hubungan sangat erat antara pengertian fungsi dan pemetaan. Fungsi lebih menitik beratkan pada hubungan antara dua variabel atau lebih yang dinyatakan dalam persamaan-persamaan aljabar. Pemetaan memiliki hubungan antar variabel yang diilustrasikan lewat grafik dalam sumbu koordinat yang umumnya disebut grafik fungsi.

Fungsi variabel kompleks $w = f(z)$ dengan dua variabel, misalnya z dan w , kadang kala tidak dapat digambarkan dengan mudah karena memerlukan dua bidang koordinat yaitu bidang z dengan sumbu x dan y dan bidang w dengan sumbu u dan v .

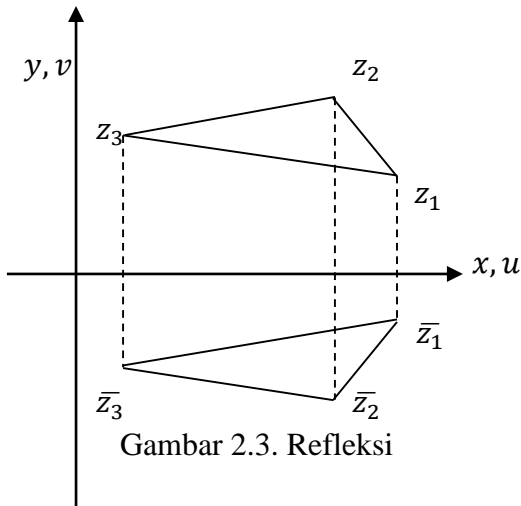


Fungsi f memetakan tiap z di bidang xy ke titik w di bidang uv ditulis:

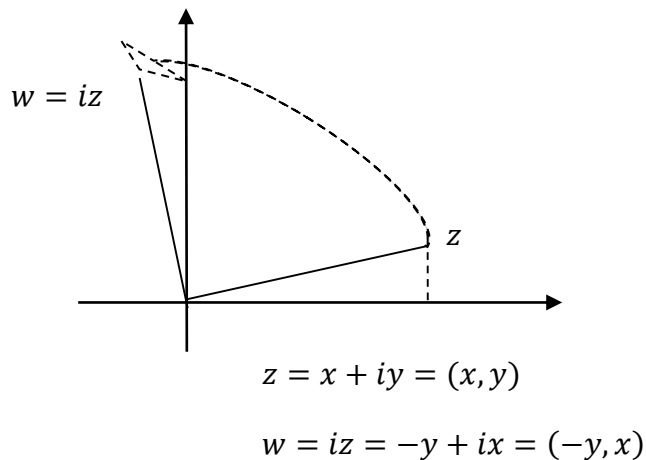
$$f: z \rightarrow w = f(z)$$

Pengertian transformasi seperti refleksi, translasi dan rotasi menjadi sering digunakan untuk menjelaskan sifat-sifat sebuah pemetaan, sebagai contoh bidang z dan w dalam satu sistem koordinat yang meliputi:

- a. Refleksi (pencerminan) terhadap sumbu x dengan $w = \bar{z}$

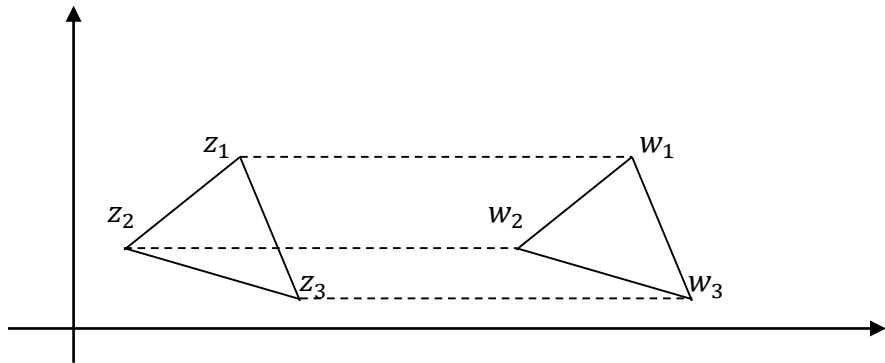


- b. Rotasi (perputaran) dengan $w = iz$ (misal titik z dengan sudut sebesar $\frac{1}{2}\pi$ arah positif)



Gambar 2.4. Rotasi

c. *Translasi* (pergeseran) dengan titik z digeser ke titik w



Gambar 2.5. Translasi

Contoh:

- (1) Tunjukkan pada bidang z dan w yang tidak dalam satu sistem bahwa $w = z^2$, dengan $w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u + iv$, dengan $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$
- (2) Tunjukkan bahwa $w = \frac{1+z}{1-z}$ pada bidang z dan w

Penyelesaian:

- (1) Bidang z dan w yang tidak dalam satu system

Missal $w = z^2$, maka $w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u + iv$

dengan:

$$u = x^2 - y^2 \text{ dan } v = 2xy$$

Diselidiki dengan memisalkan:

a. Untuk:

$u_1 = x^2 - y^2$ (konstan) berupa hiperbola orthogonal di bidang u

$v_1 = 2xy$ (konstan) berupa hiperbola orthogonal di bidang v

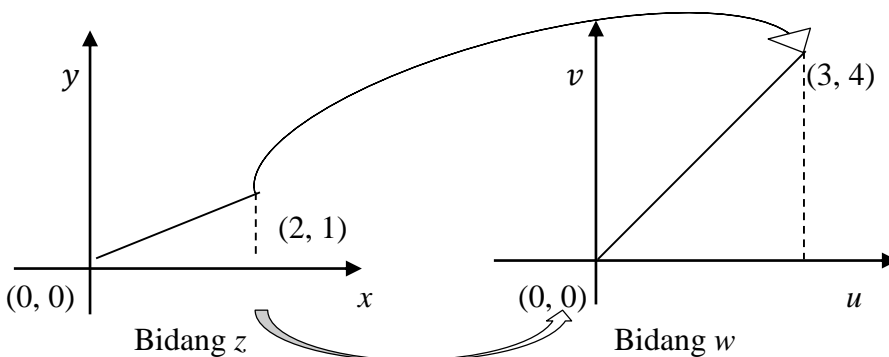
Hal ini tidak mudah menggambarkan w dan z dalam satu bidang (sistem koordinat)

- b. Apabila dipilih beberapa titik pada bidang z misalnya, maka bayangannya pada bidang w akan nampak sebagai berikut:

$z_0 = (0,0)$ bayangannya $w_0 = (0,0)$

$z_1 = (2,1)$ bayangannya $w_1 = (3,4)$

$z_2 = i$ bayangannya $w_2 = -1$ dan lain sebagainya



Gambar 2.6. $w = z^2$

- c. Apabila garis g sejajar sumbu y pada bidang z

Misalnya $x = 1, y \geq 0$ maka bayangannya pada bidang z yaitu g^1 nampak sebagai sebuah parabola, sebab:

untuk titik $z_1 = (1,0)$ bayangannya $w_1 = (1,0)$

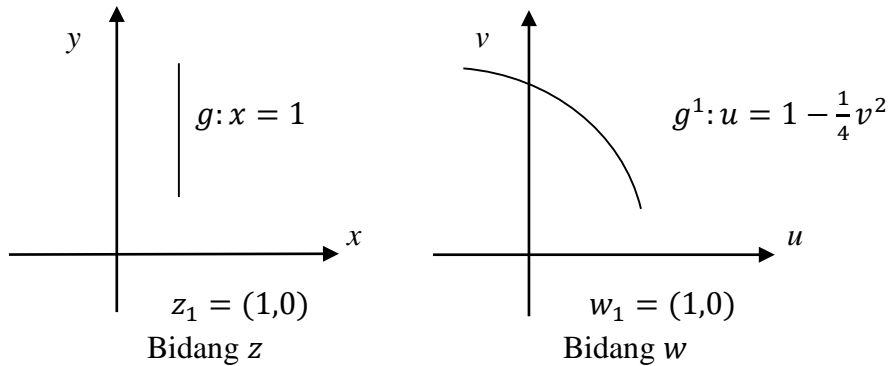
untuk sembarang titik $z = (1,y)$, dengan $y > 0$ maka diperoleh:

$u = 1 - y^2$ (a)

$v = 2y$ (b)

dari dua persamaan ini diperoleh

$$u = 1 - \frac{1}{4}v^2 \longrightarrow \text{parabola bidang } w$$



Gambar 2.7. $w = z^2$

(2) Perhatikan fungsi $w = \frac{1+z}{1-z}$

Apabila diambil empat titik pada bidang z yaitu $z = 0, -1, i$ dan $-i$ maka diperoleh bayangan pada bidang w sebagai berikut:

$$z = 0 \longrightarrow w = 1$$

$$z = -1 \longrightarrow w = 0$$

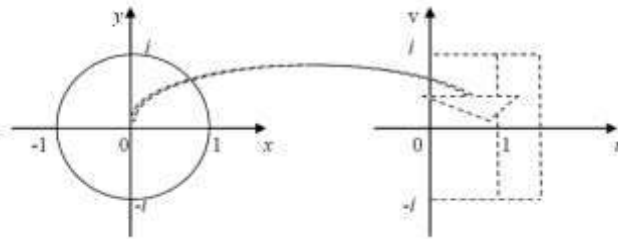
$$z = i \longrightarrow w = i$$

$$z = -i \longrightarrow w = -i$$

Untuk $z = 1$ tidak mempunyai harga w , namun dapat dikatakan:

$$z = 1 \longrightarrow w = \infty$$

Dari uraian diatas fungsi $w = \frac{1+z}{1-z}$ memindahkan bagian dalam lingkaran satuan bidang z ke setengah bidang datar sebelah kanan.



Gambar 2.8. $w = \frac{1+z}{1-z}$

Soal Latihan 1

1. Nyatakan setiap fungsi berikut dalam bentuk $u = (x, y) + iv(x, y)$, dimana u dan v real:
 - a. z^3
 - b. $\frac{1}{(1-z)}$
 - c. e^{3z}
2. Tentukan z sedemikian hingga $|z| = 2$ dan $\arg z = \frac{\pi}{4}$
3. Tunjukkan bahwa persamaan $|z + i| = 2$ merupakan lingkaran dan tentukan pusat serta jari-jarinya
4. Tentukan bentuk kompleks dari persamaan $x + 3y = 2$
5. Tentukan ketiga akar pangkat tiga dari i
6. Diberikan $f(z) = z^2 + z - 3$, nyatakan fungsi f dalam bentuk:
 - a. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
 - b. $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$
7. Tentukan nilai fungsi $f(2i)$ jika $f(z) = z^2 - 2z - 1$
8. Tentukan nilai fungsi pada tiap titik yang ditunjukkan:
 - a. $f(z) = 3z^2 - i\bar{z}$ pada $2 - i$

- b. $f(z) = z^2 - [Re(z)]^2$ pada $-4 - 4i$
9. Gambarkan titik z dan lawannya w dengan fungsi yang diberikan dan ditransformasikan pada $w = z + 1$ dengan $z = 0, 1 + i, -1, -3 + 2i, -i$
10. Perhatikan fungsi $w = e^x(\cos y + i \sin y)$, tentukan bayangan titik-titik $1 + \frac{\pi}{4}i, 1 + \frac{\pi}{2}i, 1 + \pi i, 1 + \frac{3\pi}{2}i, 1 + 2\pi i$. Gambarlah w -nya, kemudian generalisasikan apa yang telah diperoleh dengan menempatkan bayangan garis $z = 1 + yi$ untuk semua bilangan real y

2.3. LIMIT

Definisi:

Fungsi $w = f(z)$ dikatakan memiliki limit $w_0 = L$ pada saat z mendekati z_0 dituliskan:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian hingga:

$$|f(z) - L| < \varepsilon \text{ bila } |z - z_0| < \delta$$

Hal ini berarti untuk sebarang bilangan positif ε ($\varepsilon > 0$) maka terdapatlah bilangan positif δ ($\delta > 0$) sedemikian hingga:

$$|f(z) - L| < \varepsilon \text{ untuk } 0 < |z - z_0| < \delta .$$

Titik-titik z terletak dalam *neighborhood* $0 < |z - z_0| < \delta$, sehingga simbol $z \rightarrow z_0$ diartikan bahwa z mendekati z_0 dari sembarang arah. Hal ini untuk

menguji kebenaran suatu nilai merupakan nilai limit atau bukan untuk menghitung limit.

Definisi tersebut, dapat dikatakan $f(z)$ dikatakan kontinu pada z_0 apabila untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian hingga:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ bilamana } \varepsilon > 0 \text{ terdapatlah } \delta > 0.$$

Sebagai alternatif, $f(z)$ adalah kontinu pada z_0 jika $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Teorema A:

Bila fungsi f mempunyai limit pada titik z_0 maka nilai limitnya adalah tunggal **atau dapat dikatakan** $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ada maka nilai limit tunggal.

Bukti:

Dengan bukti tidak langsung, yaitu andaikan nilai limitnya tidak tunggal diperoleh:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1 \text{ dan } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_2 \text{ dengan } L_1 \neq L_2$$

maka untuk sembarang nilai $\varepsilon > 0$ yang diberikan harus dapat ditemukan harga δ_1 dan δ_2 sedemikian hingga:

$$|f(z) - L_1| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

dan

$$|f(z) - L_2| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

sekarang bila dipilih $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$ dan δ dipilih nilai terkecil dari dua bilangan δ_1 dan δ_2 , diperoleh bahwa untuk:

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

maka:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |\{f(z) - L_2\} - \{f(z) - L_1\}| \\ &\leq |f(z) - L_2| + |f(z) - L_1| \leq 2\varepsilon (= |L_1 - L_2|) \\ |L_1 - L_2| &< |L_1 - L_2| \text{ adalah sesuatu yang tidak mungkin.} \end{aligned}$$

Pengandaian berarti salah, yang benar yaitu harga limit itu tunggal, sehingga diartikan bahwa pernyataan $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ baik z_0 atau L atau mungkin semua titiknya merupakan titik-titik di lapang tak hingga dan dapat dikatakan:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$$

untuk setiap harga $\varepsilon > 0$ harus ditemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga:

$$|f(z) - L| < \varepsilon \text{ untuk } |z| > \frac{1}{\delta}$$

Hal ini berarti titik $f(z)$ terletak dalam neighborhood $|w - L| > \varepsilon$ dari L manakala z terletak dalam neighborhood $|z| > \frac{1}{\delta}$ dari δ titik lapang tak hingga.

Bila $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$ maka:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

bila hanya bila

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ dan } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

atau dapat dikatakan, apabila:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ dan } z_0 = a + ib$$

maka:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A + iB \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} U(x, y) = A \text{ dan } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} V(x, y) = B$$

Selain itu juga dapat **didefinisikan**:

Bilangan real A adalah limit fungsi real dari dua variabel real (x, y) dengan domain definisi D untuk $(x, y) \rightarrow (a, b)$

ditulis:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} U(x, y) = A ,$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $(x, y) \in D$ dan $0 < \sqrt{(x, a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ berlaku $|u(x, y) - A| < \varepsilon$

Teorema B:

Bila $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$
maka:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

bila hanya bila

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ dan } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

Bukti:

(1) Syarat perlu: \Rightarrow

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$$

Menurut definisi, untuk $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga:

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$|(u + u_0) + i(v + v_0)| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta$$

sedangkan

$$|u + u_0| \leq |(u + u_0) + i(v + v_0)|$$

$$|v + v_0| \leq |(u + u_0) + i(v + v_0)|$$

maka

$$|u + u_0| < \varepsilon \text{ bila } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

$$|v + v_0| < \varepsilon \text{ bila } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

Menurut definisi limit untuk fungsi berharga real dari dua peubah nyata maka limit-limit dari u dan v ada dan mempunyai harga sebenarnya, yaitu:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

$$x \rightarrow x_0$$

dan

$$x \rightarrow x_0$$

$$y \rightarrow y_0$$

$$y \rightarrow y_0$$

(terbukti)

(2) Syarat cukup: \Leftarrow

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

$$x \rightarrow x_0$$

dan

$$x \rightarrow x_0$$

$$y \rightarrow y_0$$

$$y \rightarrow y_0$$

maka untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapatlah $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga:

$$|u + u_0| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ bila } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2$$

$$|v + v_0| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ bila } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2$$

misalkan δ dipilih nilai minimum dari δ_1 dan δ_2 maka:

$$|(u + u_0) + i(v + v_0)| \leq |(u + u_0) + (v + v_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon (= \varepsilon)$$

bila $0 < |z - z_0| < \delta$ *atau*

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Jadi $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ terbukti

Teorema C:

Diberikan fungsi f, g, h didefinisikan pada daerah $D = Df \cap Dg \subseteq C$ dan $z_0 \in D$

Apabila:

$$|f(z)| \leq |g(z)| \leq |h(z)| \longrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \text{ dan } \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = L$$

maka:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L, \text{ dengan } z \in N^*(z_0, d) \cap D$$

Teorema D:

Misal f dan F merupakan fungsi-fungsi yang limitnya ada di z_0 yaitu:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ dan } \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = W_0$$

maka:

$$(a) \lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) + F(z)\} = w_0 + W_0$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) \cdot F(z)\} = w_0 \cdot W_0$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}, W_0 \neq 0$$

Bukti:

Dibuktikan salah satu yaitu untuk $\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z).F(z)\} = w_0.W_0$, yang lainnya merupakan analog.

Diketahui: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dan $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$

$$z_0 = x_0 + iy_0; w_0 = u_0 + iv_0; W_0 = U_0 + iV_0$$

bila:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$$

maka:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

$$x \rightarrow x_0 \qquad \text{dan} \qquad x \rightarrow x_0$$

demikian pula: $y \rightarrow y_0 \qquad y \rightarrow y_0$

bila:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = W_0 = U_0 + iV_0$$

maka:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = U_0 \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = V_0$$

$$x \rightarrow x_0 \qquad \text{dan} \qquad x \rightarrow x_0$$

$$y \rightarrow y_0 \qquad y \rightarrow y_0$$

Sehingga:

$$f(z).F(z) = (u + iv).(U + iV) = (uU - vV) + i(uV + vU)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z).F(z)\} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \{(uU - vV) + i(uV + vU)\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (uU - vV) = u_0U_0 - v_0V_0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (uU + vU) = u_0U_0 + v_0V_0$$

Jadi

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) \cdot F(z)\} &= (u_0 U_0 - v_0 V_0) + i(u_0 U_0 + v_0 V_0) \\ &= (u_0 + i v_0) \cdot (U_0 + i V_0) \\ &= w_0 \cdot W_0\end{aligned}$$

(terbukti)

Limit Tak Hingga

Definisi:

- a. Bilangan L adalah $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk

$$0 < |z| < \delta \text{ berlaku } \left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \varepsilon \longrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \text{ bhb } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

- b. Bilangan L adalah $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat M sehingga untuk

$$|z| > M \text{ berlaku } \left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \varepsilon \longrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \text{ bhb } \lim_{z \rightarrow z_0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$$

- c. Apabila $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua z dimana $0 < z - z_0 < \delta$ berlaku

$$|f(z)| > M \longrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \text{ bhb } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Contoh:

- (1) Tunjukkan fungsi identitas $f(z) = z$
- (2) Hitunglah $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1}$
- (3) Apabila $f(z) = \frac{x^2}{z}$ maka tentukan $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$

Penyelesaian:

(1) Perhatikan fungsi identitas $f(z) = z$

Untuk sembarang titik z_0 jelaslah bahwa untuk $z \rightarrow z_0$, $f(z) \rightarrow z_0$ karena $f(z) = z$.

Apabila $f(z) = z$ maka $\lim f(z) = z_0$

$$(2) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}$$

(3) Bila $f(z) = \frac{x^2}{z}$ maka tentukan $\lim f(z)$ untuk $z \rightarrow 0$

karena: $|x| \leq |z|$ maka $\frac{|x|^2}{|z|} \leq |x|$

sehingga: $|f(z)| = \frac{|x|^2}{|z|} \leq |x|$

untuk $z \rightarrow 0$ maka $|z| \rightarrow 0$

kemudian karena: $|f(z)| \leq |x|$ maka $|f(z)| \rightarrow 0$

tetapi bila modulus suatu besaran menuju nol maka demikian pula besaran itu sendiri.

Jadi $\lim f(z) = 0$ untuk $z \rightarrow 0$

Soal Latihan 2

1. Tunjukkan bahwa $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2-1}{z-1} = 2$

2. Diketahui $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{ix^2}{y+1}$, tunjukkan bahwa $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ tidak ada

3. Hitunglah:

a. $\lim_{z \rightarrow 1+i} z^3$

b. $\lim_{z \rightarrow (3,4)} \frac{i\operatorname{Re}(z^2) - i\operatorname{Re}(z) + (\operatorname{Im}(z^2))^2 - 1}{|z|}$

4. Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi berikut ini sesuai titik yang ditentukan:

- a. $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)-1}{z\bar{z}}$ pada $3 - 4i$
 b. $f(z) = \sin\pi x - e^{2xyi}$ pada $1 + i$

5. Tunjukkan bahwa:

- a. $\lim_{z \rightarrow 4} \frac{3iz+1}{z-4} = \infty$
 b. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z+1}{z+1} = 3$

6. Diketahui $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2}i$, tentukan:

- a. $\lim f(z)$ untuk $z \rightarrow 0$ sepanjang garis $y = x$
 b. $\lim f(z)$ untuk $z \rightarrow 0$ sepanjang garis $y = 2x$
 c. $\lim f(z)$ untuk $z \rightarrow 0$ sepanjang parabola $y = x^2$

7. Tunjukkan bahwa limit fungsi-fungsi berikut tidak ada:

- a. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{x+y-1}{z-i}$ untuk $z \rightarrow i$
 b. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ untuk $z \rightarrow 0$

8. Dengan menggunakan definisi limit fungsi tak hingga, tunjukkan bahwa:

- a. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2+1} = 0$
 b. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$
 c. $\lim_{z \rightarrow \infty} 3z^2 = \infty$

9. Tunjukkan bahwa $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ tidak ada

10. Apabila $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ada, tunjukkan bahwa bernilai tunggal

2.4. KONTINUITAS

Definisi:

Fungsi $w = f(z)$ kontinu di titik z_0 **bila hanya bila:**

- a. $f(z_0)$ ada
- b. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ada
- c. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Perhatikan bahwa sebenarnya syarat **c** cukup memadai karena didalamnya telah termuat syarat **a** dan **b**. Hal ini berarti bahwa tiap nilai $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian hingga:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ bila } |z - z_0| < \delta$$

dalam hal ini $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ artinya δ tergantung ε dan z_0 .

Apabila $\delta = \delta(\varepsilon)$ yaitu tidak tergantung pada z_0 maka dapat dikatakan $f(z)$ **kontinu uniform**, jelasnya $f(z)$ kontinu di semua titik dalam region R .

Fungsi variabel kompleks selalu dapat ditulis sebagai:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

maka kekontinuan $f(z)$ selalu ditunjukkan oleh kekontinuan komponen-komponennya yaitu $u(x, y)$ dan $v(x, y)$

Teorema:

Misalkan:

- a. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

- b. $f(z)$ terdefiniskan pada setiap titik region R
- c. $z_0 = x_0 + iy_0$ suatu titik di dalam region R

maka $f(z)$ kontinu di z_0 bila dan hanya bila:

$$u(x, y) \text{ dan } v(x, y) \text{ kontinu di } (x_0, y_0).$$

Sebagai konsekuensi dari teori tentang limit yaitu:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \text{ untuk } z \rightarrow z_0$$

bila hanya bila

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

dan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0) \text{ untuk } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Misalkan $f(z) = xy^2 + i(2x - y)$ maka $f(z)$ ini kontinu disetiap titik z pada bidang kompleks karena fungsi komponen-komponennya yaitu:

$$u = xy^2 \text{ kontinu di setiap titik } (x, y)$$

dan

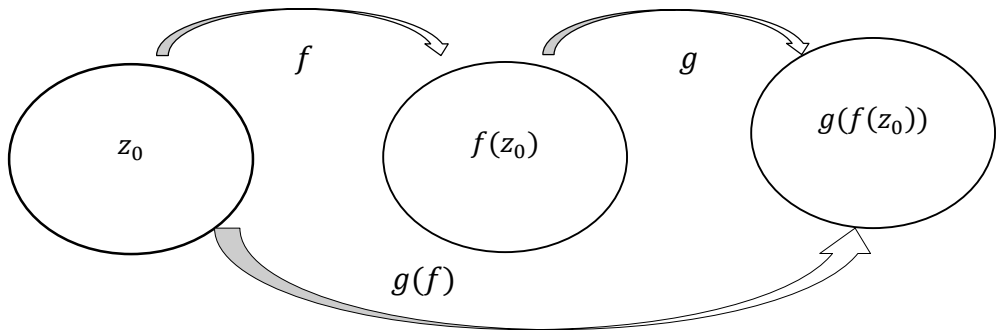
$$v = 2x - y \text{ kontinu di setiap titik } (x, y)$$

Bila $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu di z_0 maka:

- a. Jumlah $f(z) + g(z)$ kontinu
- b. Selisih $f(z) - g(z)$ kontinu
- c. Perkalian $f(z) \cdot g(z)$ kontinu
- d. Pembagian $\frac{f(z)}{g(z)}$ kontinu asal $g(z) \neq 0$
- e. Komposisi $g(f(z))$ kontinu di titik z_0

Suatu hal yang perlu diketahui adalah setiap suku banyak (*polynomial*) dalam z : $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ kontinu di setiap titik.

Bukti teorema, dengan menunjukkan salah satu teorema yang (e) komposisi dua fungsi kontinu adalah kontinu



Gambar 2.9. Fungsi komposisi

Contoh:

$$f(z) = xy^2 + i(2x - y)$$

$f(z)$ kontinu pada setiap titik z di bidang kompleks karena fungsi komponen-komponennya yaitu:

$$u = xy^2 \text{ kontinu pada setiap titik } (x, y)$$

$$\text{dan } v = 2xy \text{ kontinu pada setiap titik } (x, y)$$

Soal Latihan 3

1. Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2$ kontinu di $z = z_0$
2. Tunjukkan bahwa $f(z) = \begin{cases} z^2 & \rightarrow z \neq z_0 \\ 0 & \rightarrow z = z_0 \end{cases}$

dimana $z_0 \neq 0$ tak kontinu di $z = z_0$

3. Apakah fungsi $f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ kontinu di $z = i$?
4. Hitunglah $\lim_{z \rightarrow 2e^{i\pi/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$
5. Untuk nilai manakah setiap fungsi berikut kontinu?
 - a. $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$
 - b. $f(z) = \operatorname{cosec} z$
6. Selidikilah apakah $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{x + y - 1}$ ada?
7. Tunjukkan fungsi $f(z) = |z|^2$ kontinu di setiap titik bilangannkompleks
8. Tunjukkan:
 - a. untuk sembarang z_0 dan sembarang bilangan bulat tidak negative n : $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$ untuk $z \rightarrow z_0$
 - b. sebagai akibatnya $f(z) = z^n$ kontinu dimanapun
9. Tunjukkan bahwa $f(z) = \frac{1}{z}$ tidak kontinu dalam daerah $|z| < 1$
10. Untuk nilai z manakah setiap fungsi berikut kontinu?
 - a. $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$
 - b. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

2.5. DERIVATIVE

Apabila $f(z)$ bernilai tunggal dalam sejumlah daerah dari bidang z maka turunan $f(z)$ yang dinyatakan oleh $f'(z)$ yaitu:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

dengan syarat terdapat limit yang tidak tergantung pada cara bagaimana $\Delta z \rightarrow 0$.

Apabila limit tersebut ada untuk $z = z_0$ maka $f(z)$ disebut analitik pada z_0 . Apabila terdapat limit untuk semua z dalam daerah \mathfrak{R} maka $f(z)$ disebut analitik dalam \mathfrak{R} dan agar menjadi analitik maka $f(z)$ harus bernilai tunggal dan kontinu, tetapi kebalikannya tidak selalu benar.

Untuk itu, dapat didefinisikan yaitu:

1. Apabila $w = f(z)$ suatu fungsi dimana domain definisi memuat *neighborhood* dari titik z_0 derivative f pada titik z_0 adalah:

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \longrightarrow \text{bila limitnya ada}$$

2. Apabila menggunakan notasi $\Delta z = z - z_0$ maka derivate f pada titik z_0 dapat ditulis:

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}$$

dengan catatan bahwa, karena f terdefinisi dalam *neighborhood* z_0 maka nilai $f(z_0 + \Delta z)$ selalu ada untuk $|z_0|$ cukup kecil.

3. Apabila dari formulasi kedua, indeks nol dihilangkan maka diperoleh definisi derivative (penurunan fungsi) yang lebih umum yaitu:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ f'(z) &= \frac{dw}{dz} \end{aligned}$$

dapat dikatakan bahwa notasi-notasi fungsi turunan dari f atau disingkat turunan f adalah:

$$f'(z) \text{ atau } \frac{df}{dz} \text{ atau } \frac{dw}{dz}$$

Turunan fungsi dapat diperoleh dengan cara menerapkan langsung definisi dan proses ini serupa dengan yang digunakan pada kalkulus.

Rumus-rumus derivative sebagai berikut:

1. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$
2. $\frac{d}{dz}(z) = 1;$
3. $\frac{d}{dz}(C) = 0$
4. $\frac{d}{dz}(Cf(z)) = C \frac{d}{dz}(f(z))$
5. $\{f(z) + g(z)\}' = f'(z) + g'(z)$
6. $\{f(z) - g(z)\}' = f'(z) - g'(z)$
7. $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
8. $\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$
9. $\{f(g(z))\}' = f'(z)g'(z)$

Kesesuaian rumus turunan fungsi variabel bilangan kompleks dengan fungsi nyata yaitu apabila f dan g sebagai fungsi dalam z . Apabila f ditulis

sebagai $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, seperti misalnya $f(z) = x^2 + iy$, $f(z) = e^x + i \sin y$ maka diperlukan teorema lebih lanjut.

Contoh:

- (1) Tentukan turunan fungsi konstan $f(z) = c$
- (2) Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$ dan setiap titik z_0 .
Apabila $f(z) = z^n$ maka $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$
- (3) Membuktikan bahwa fungsi $f(z) = \bar{z}$ tidak mempunyai turunan di setiap titik dengan menunjukkan bahwa nilai limit yang mendefinisikan $f'(z)$ bergantung pada cara yang diambil untuk $\Delta z \rightarrow 0$
- (4) Menunjukkan bahwa apabila c suatu konstanta dan $g(z)$ suatu fungsi yang dapat dideferensialkan, maka $[c \cdot g(z)]' = cg'(z)$
- (5) Tentukan $\left(\frac{d}{dz}\right)$ dari:
 - a. $[(z^3 - z^{-2})(z^3 + 5)]$
 - b. $(z^{-1} + 2z + 3)^4$
 - c. $\left(\frac{z^4-3}{z^2+1}\right)$

Penyelesaian:

- (1) Untuk setiap nilai z pada $f(z) = c$, mempunyai:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta z} = 0$$

Jadi turunan suatu fungsi konstan selalu nol.

- (2) Menggunakan atura pangkat yang sering digunakan pada turunan yang digunakan pada kalkulus, yaitu:

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \quad (n \text{ suku}) \\
 &= n z_0^{n-1}
 \end{aligned}$$

(terbukti)

- (3) Misalkan: $\Delta z = |\Delta z| \text{cis } \alpha$ dan $\bar{z} = |\Delta z|(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ maka

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha}
 \end{aligned}$$

Jelaslah bahwa limit tersebut tidak mempunyai nilai tunggal karena bergantung pada sudut α .

Misalnya, apabila $z + \Delta z \rightarrow z$ sepanjang garis tegak $\alpha = \frac{\pi}{2}$, maka limitnya sama dengan -1 , sedangkan apabila $z + \Delta z \rightarrow z$ sepanjang garis mendatar, limitnya sama dengan 1 . Kesimpulannya bahwa fungsi di atas tidak mempunyai turunan dimanapun.

(4) Mengambil $f(z) = c$, diperoleh:

$$\begin{aligned}[c \cdot g(z)]' &= cg'(z) + c'g(z) \\ &= cg'(z) + 0 \\ &= cg'(z)\end{aligned}$$

(5) Menggunakan aturan pendiferensialan, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} [(z^3 - z^{-2})(z^3 + 5)] &= (z^3 - z^{-2})2z + (z^2 + 5)(3z^2 + 2z^{-3}) \\ \frac{d}{dz} (z^{-1} + 2z + 3)^4 &= 4(z^{-1} + 2z + 3)^3(-z^{-2} + 2) \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{z^4 - 3}{z^2 + 1} \right) &= \frac{(z^2 + 1)4z^3 - (z^4 - 3)2z}{(z^2 + 1)^3}\end{aligned}$$

Soal Latihan 4

1. Tentukan turunan dari fungsi berikut:

- a. $f(z) = (2z^2 + i)^5$
- b. $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ pada i
- c. $f(z) = (z^{-1} + 2z + 3)^4$

2. Diberikan $w = f(z) = z^3 - 2z$, gunakan definisi untuk menentukan turunan dari

- a. $z = z_0$
- b. $z = -1$

3. Apabila $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ maka:

- a. Tentukan $\frac{dw}{dz}$, (dengan cara definisi & deferensial)
- b. Tentukan dimana $f(z)$ tidak analitik
4. Tentukan $f'(z)$ fungsi-fungsi berikut ini:
- $f(z) = z^3 - 3z^2 + z^{-4} + 2$
 - $f(z) = 3z^2 - 2z + 7$
 - $f(z) = (2z^3 - 3z^2 + 4)^5$
 - $f(x) = \frac{x^2+2}{3-x^2} \rightarrow 3 - x^2 \neq 0$
5. Gunakan definisi dan aturan deferensial untuk menentukan turunan dari:
- $3z^2 + 4iz - 5 + i$ pada $t = 2$
 - $3z^{-2}$ pada $z = 1 + i$
6. Tunjukkan bahwa $f(z) = \bar{z}$ tidak deferensiabel (tidak ada) dimanamana!
7. Tunjukkan bahwa apabila c suatu konstanta dan $g(z)$ suatu fungsi yang dapat diturunkan maka $[c \cdot g(z)]' = cg'(z)$
8. Apabila $f(z)$ analitik di z_0 , tunjukkan bahwa harus kontinu di z_0
9. Berikan suatu contoh yang menunjukkan bahwa kebalikan dari soal (8) tidak selalu benar
10. Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} \bar{z}$ tidak ada dimanamana yaitu $f(z) = \bar{z}$ tidak analitik dimanamana

2.6. PERSAMAAN CAUCHY-RIEMANN

Teorema:

Apabila $f'(z)$ dari suatu fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ **ada** di titik z_0 maka derivative parsial tingkat satu ke x dan y dari komponen-komponennya u dan v juga ada dan memenuhi syarat **Persamaan Cauchy Riemann (PCR)** sebagai berikut:

PCR $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ U_x = V_y \text{ dan } U_y = -V_x \end{array} \right.$

sedangkan $f'(z)$ dirumuskan $\left\{ \begin{array}{l} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = U_x + iV_x \\ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = V_y - iU_y \end{array} \right.$

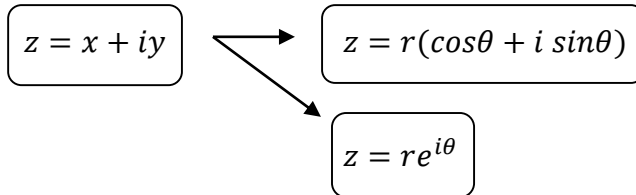
selain itu dapat dinotasikan $\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = U_x, \frac{\partial u}{\partial y} = U_y, \frac{\partial v}{\partial x} = V_x, \frac{\partial v}{\partial y} = V_y$

Apabila $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdefiniskan dalam setiap *neighborhood* ε dari $z_0 = x_0 + iy_0$ sedangkan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ fungsi-fungsi nyata berharga satu dari x dan y yang bersama-sama dengan derivative parsialnya U_x, U_y, V_x, V_y kontinu di titik $z_0 = x_0 + iy_0$ dan jika derivative parsialnya memenuhi persamaan Cauchy Riemann, maka:

$$f'(z) \text{ ada } \longrightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Bentuk Kutub Cauchy – Riemann

PCR dalam koordinat kartesius dapat dinyatakan dalam koordinat kutub.



$f(z) = u + iv \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ dan $\operatorname{Im}(z)$ dapat dinyatakan dalam x dan y atau r dan θ

PCR dalam bentuk kutub \rightarrow

$$U_r = \frac{1}{r} V_\theta$$

dan

$$V_r = -\frac{1}{r} U_\theta$$

Turunannya yaitu \rightarrow

$$f'(z) = e^{-i\theta} \{U_r + iV_r\}$$

atau

$$f'(z) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \{V_\theta - iU_\theta\}$$

Teorema:

Bila $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ terdefinisi di seluruh *neighborhood* ε titik $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ selain titik asal O, sedangkan derivative parsial pertama u dan v terhadap r dan θ **ada** dan fungsi **kontinu** pada titik (r_0, θ_0) ,

dan bila titik derivative parsialnya memenuhi PCR bentuk polar maka $f'(z)$ ada.

Contoh:

Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2$ memiliki turunan melalui PCR dan tentukan turunannya

Penyelesaian:

Diketahui $f(z) = z^2$, berdasarkan rumus diperoleh bahwa $f'(z) = 2z$ ada di setiap titik, sehingga syarat PCR terpenuhi di setiap titik.

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

sehingga:

$$\begin{array}{l}
 u = x^2 - y^2 \longrightarrow u_x = 2x \text{ dan } u_y = -2y \\
 \text{PCR terpenuhi, yaitu:} \\
 v = 2xy \longrightarrow v_x = 2y \text{ dan } v_y = 2x \\
 u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{array}} \right\} \text{Ternyata}$$

$$\text{Jadi } f'(z) = u_x + iv_y = 2x + i(2y) = 2(x + iy) = 2z$$

Soal Latihan 5

1. Tentukan $f'(z)$ bila ada pada fungsi:
 - a. $f(z) = |z|^2$
 - b. $f(z) = \cos y - i \sin y$
2. Diberikan $f(z) = x^2 - iy^2$
 - a. Tentukan jika ada, titik-titik yang menyebabkan fungsi itu mempunyai turunan!

- b. Tentukan $f'(z)$
3. Tentukan $f'(z)$ bentuk kutub dari $f(z) = \frac{1}{z}$
4. Tentukan $f'(z)$ dari $f(z) = e^x e^{iy}$
5. Selidiki dimanakah fungsi berikut dapat diturunkan, kemudian tentukan turunannya:
 - a. $f(z) = \bar{z}$
 - b. $f(z) = |z|^2$
6. Selidiki dimanakah fungsi $f(z) = z^{-3}$ dapat diturunkan dan tentukan fungsi turunannya (PCR bentuk kutub)

2.7. FUNGSI ANALITIK

Definisi:

Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik di titik z_0 apabila derivative $f'(z)$ ada, tidak hanya di z_0 tapi disembarang *neighborhood* z_0

Fungsi analitik pada definisi tersebut ada ada hubungannya antara diferensiabilitas dan analisis fungsi di suatu titik, tetapi keduanya tidak sama karena *analisis fungsi di suatu titik berakibat pada diferensiabilitas tetapi tidak sebaliknya*, yang disebabkan bahwa $f'(z)$ bisa ada pada sembarang jenis himpunan, pada segmen garis atau bahkan pada titik terasing tapi analisis harus dalam himpunan terbuka.

Hal ini mengacu dari definisi bahwa analisis di suatu titik z_0 menghendaki $f'(z)$ ada tidak hanya di z_0 tapi disemua titik didalam sembarang *neighborhood* z_0 , padahal *neighborhood* merupakan himpunan terbuka.

- a. Bila suatu fungsi analitik di semua titik z kecuali z_0 maka z_0 disebut *titik terasing atau titik singular*.
- b. Suatu fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks dinamakan *fungsi menyeluruh (entire function)*.
- c. Polinomial $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ merupakan fungsi menyeluruh karena $P'(z)$ ada disetiap titik di bidang kompleks.
- d. Suatu fungsi yang merupakan hasil bagi dua fungsi menyeluruh dinamakan *fungsi meromorfik*.

Syarat perlu (*belum berarti cukup*) fungsi f analitik pada domain D adalah kontinu di seluruh D . Terpenuhinya syarat PCR perlu tapi belum cukup dan cukupnya syarat bagi keanalitikan fungsi adalah terpenuhinya kaidah-kaidah derivative.

Derivative juga digunakan untuk fungsi analitik disuatu domain D adalah:

- a. Jumlah dan hasilkali dua fungsi analitik adalah analitik
- b. Hasil bagi dua fungsi analitik adalah analitik sepanjang tidak ada penyebut = nol
- c. Komposisi dua fungsi analitik adalah analitik

Contoh:

- (1) Suatu polynomial $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ merupakan suatu fungsi menyeluruh karena $P'(z)$ ada pada semua z

- (2) Fungsi $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ juga merupakan fungsi menyeluruh
- (3) Fungsi $f(z) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$ merupakan hancur bagi dua fungsi menyeluruh karena pembilang dan penyebut merupakan polinomial. $f'(z)$ ada pada setiap titik kecuali $z \pm i$, karena pada titik tersebut f tidak terdefiniskan, jadi f analitik pada semua z kecuali ada i dan $-i$

Soal Latihan 6

1. Selidiki analisis fungsi $f(z) = x^2 - iy^2$
2. Selidiki analitik fungsi:
 - a. $f(z) = \frac{1}{z}$
 - b. $f(z) = |z|^2$
3. Apabila $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, tentukan $\frac{dw}{dz}$ dan tentukan dimana w tidak analitik
4. Tunjukkan tiap fungsi berikut tidak analitik dimanapun:
 - a. $f(z) = xy + iy$
 - b. $f(z) = e^y e^{-ix}$
5. Selidikilah analisis fungsi $f(z) = |x^2 - y^2| + i|2xy|$
6. Tentukan bila ada titik singulatur fungsi-fungsi berikut dan jelaskan mengapa fungsi analitik dimanapun kecuali pada titik tersebut:
 - a. $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$
 - b. $f(z) = (z - 2)^{-1}(z^2 + 2z + 2)^{-1}$

7. Tunjukkan fungsi $g(z) = \sqrt{re^{i\theta}}$, $r > 0, 0 < \theta < \pi$ analitik pada domain yang telah ditetapkan dan tunjukkan bahwa fungsi komposisi $g(z^2 + 1)$ analitik pada kuadran satu.
8. Apabila $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$; tentukan:
- $\frac{dw}{dz}$
 - Dimana $f(z)$ tidak analitik
9. Selidikilah apakah $|z|^2$ memiliki turunan diman-mana
10. Untuk setiap fungsi berikut tentukan titik singularnya yaitu titik yang fungsinya tidak analitik.
- $\frac{z}{z+i}$
 - $\frac{3z-2}{z^2+2z+5}$

2.8. FUNGSI HARMONIK

Fungsi harmonik pada bilangan kompleks yang memuat variabel kompleks sama dengan pada kalkulus yang memuat variabel real yaitu bila turunan kedua *ke x dan ke y* memenuhi persamaan Laplace:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

Apabila fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada domain D maka turunan parsial kedua *ke x dan ke y* dari komponen-komponennya yaitu U_{xx}, U_{yy}, V_{xx} dan V_{yy} memenuhi persamaan Laplace.

Persamaan Laplace \longrightarrow $U_{xx} + U_{yy} = 0$ dan $V_{xx} + V_{yy} = 0$

Apabila diketahui salah satu fungsi harmonik $u(x, y)$ maka dapat diperoleh fungsi-fungsi lainnya $v(x, y)$ sedemikian hingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik yang secara jelas dapat dikatakan:

$$f(z) = U_{xx} + i V_{yy} \text{ analitik bila hanya bila } \longrightarrow U \text{ dan } V \text{ harmonik dan memenuhi Persamaan Laplace maka } V \text{ sekawan } U$$

Contoh:

Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ dengan $f(z)$ merupakan fungsi analitik merupakan fungsi harmonik dan tunjukkan bahwa $u(x, y)$ merupakan sekawan harmonik $v(x, y)$

Penyelesaian:

Diketahui $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$f(z)$ merupakan fungsi analitik, sehingga:

$$\begin{aligned} u = x^2 - y^2 &\longrightarrow u_x = 2x &\longrightarrow u_{xx} = 2 \\ &u_y = -2y &\longrightarrow u_{yy} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = 2xy &\longrightarrow v_x = 2y &\longrightarrow v_{xx} = 0 \\ &v_y = 2x &\longrightarrow v_{yy} = 0 \end{aligned}$$

Ternyata diperoleh bahwa:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \text{ dan } V_{xx} + V_{yy} = 0 \longrightarrow \text{sehingga } u \text{ dan } v \text{ harmonik}$$

Dari uraian diatas dapat dikatakan bahwa:

- a. Dari dua fungsi harmonik tersebut $v(x, y) = 2xy$ merupakan sekawan harmonik $u(x, y) = x^2 - y^2$
- b. $u(x, y) = x^2 - y^2$ bukan sekawan harmonik $v(x, y) = 2xy$

Bukti:

Andaikan $u(x, y) = x^2 - y^2$ sekawan harmonik $v(x, y) = 2xy$ maka diperoleh fungsi:

$$G(x, y) = U + iV = 2xy + i(x^2 - y^2) \longrightarrow \text{analitik}$$

Untuk itu, cukup ditunjukkan berlakunya PCR yaitu:

$$U = 2xy \longrightarrow U_x = 2y \text{ dan } U_y = 2x$$

$$V = x^2 - y^2 \longrightarrow V_x = 2x \text{ dan } V_y = -2y$$

ternyata:

$$U_x \neq V_y \text{ dan } U_y \neq -V_x \longrightarrow \text{berarti PCR tidak}$$

terpenuhi, sehingga

$G(x, y)$ tidak analitik

Pengandaian berarti salah, jadi $u(x, y) = x^2 - y^2$ bukan sekawan harmonik $v(x, y) = 2xy$

- c. Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa $-u(x, y) = -x^2 + y^2$ merupakan sekawan harmonik $v(x, y) = 2xy$

Soal Latihan 7

1. Tunjukkan bahwa $g(z) = \ln r + i\theta$ untuk $z \in E = \{z: z = r \operatorname{cis} \varphi, r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ analitik pada E . Kemudian tunjukkan

bahwa apabila $f(z) = z + 1$ maka $h(z) = g(f(z))$ analitik untuk $z \in D = \{z: \operatorname{Re}(z) > -1\}$.

2. Diberikan $U(x, y) = y^3 - 3x^2y$
 - a. Tunjukkan bahwa $U(x, y)$ merupakan fungsi harmonik
 - b. Tentukan sekawan harmonik $V(x, y)$ sehingga $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ analitik
 - c. Tentukan $f'(z)$
3. Selidiki analitik fungsi $\frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$
4. Tunjukkan bahwa komponen nyata dan khayal pada fungsi $f(z) = z^2 + z$ merupakan fungsi harmonik.
5. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ merupakan fungsi menyeluruh (*entire function*)!
6. Tunjukkan bahwa komponen nyata dan khayal setiap fungsi berikut adalah harmonik:
 - a. $f(z) = z^2 + z$
 - b. $f(z) = \frac{1}{z}$
 - c. $f(z) = z^3$
 - d. $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$
7. Tunjukkan bahwa u adalah harmonik di semua domain dan tentukan sekawan harmonik v sehingga $f(z) = u + iv$ analitik:
 - a. $u(x, y) = xy$
 - b. $u(x, y) = 2x(1 - y)$
 - c. $u(x, y) = e^x \cos y$

8. Tunjukkan bahwa apabila pada semua domain, v adalah sekawan harmonik u dan u sekawan harmonik v maka u dan v merupakan fungsi-fungsi konstan.
9. Tunjukkan fungsi $u(r, \theta) = \ln r$ harmonik pada domain $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$ dan tentukan pula sekawan harmonik v
10. Tunjukkan fungsi $g(z) = \sqrt{re^{i\theta}}$, $r > 0, 0 < \theta < \pi$ merupakan analitik pada domain yang telah ditetapkan dan tunjukkan bahwa fungsi komposisi $g(z^2 + 1)$ analitik pada kuadran satu.

BAB III

FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

Capaian pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi eksponen dengan cermat dan teliti
2. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi trigonometri dengan cermat dan teliti
3. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi hiperbolik dengan cermat dan teliti
4. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian fungsi logaritma dengan cermat dan teliti
5. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian invers fungsi trigonometri dengan cermat dan teliti
6. Mahasiswa mampu menganalisa dan melakukan pembuktian invers fungsi hiperbolik dengan cermat dan teliti

3.1. FUNGSI EKSPONEN

Fungsi eksponen (fungsi pangkat) pada bilangan kompleks, *didefinisikan*:

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \operatorname{cis} y$$

Apabila z merupakan *bilangan real* maka:

$$y = 0 \longrightarrow z = x + i0 \longrightarrow z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) \longrightarrow z = e^x$$

Apabila z merupakan bilangan imajiner murni maka:

$$x = 0 \longrightarrow z = iy \longrightarrow z = \cos y + i \sin y \longrightarrow z = e^{iy}$$

sehingga:

$$e^z = e^x \operatorname{cis} y \longrightarrow |e^z| = e^x, \quad y = \arg(e^z) \longrightarrow e^z \neq 0$$

Perhatikan:

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_U + i \underbrace{e^x \sin y}_V$$

$$\begin{array}{l} U = e^x \cos y \\ V = e^x \sin y \end{array} \quad \begin{array}{l} U_x = e^x \cos y, \quad U_y = -e^x \sin y \\ V_x = e^x \sin y, \quad V_y = e^x \cos y \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{array} \right\}$$

PCR terpenuhi

Uraian diatas diperoleh:

$$f'(z) = U_x(x, y) + i V_y(x, y) \longrightarrow f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

sehingga:

$$f'(z) = e^z$$

Jadi $f(z) = e^z$ analitik terhadap seluruh bidang kompleks sehingga merupakan fungsi yang utuh dan $f'(z) = e^z$. Fungsi $f(z) = e^z$ merupakan fungsi periodik dengan periode $2\pi i$ sehingga ditulis:

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

Sifat-sifat:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \longrightarrow (\exp z_1) \cdot (\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2)$
2. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} \longrightarrow \frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2)$
3. $(\exp z)^n = \exp nz, n = 1,2,3, \dots \longrightarrow (e^z)^n = e(nz)$
4. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
5. $e^0 = 1$
6. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
7. $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \text{cis}(2k\pi) = e^z$
8. $w = e^z \longrightarrow w = r(\cos \theta + i \sin \theta), w \neq 0 \longrightarrow z = \ln r + i\theta$
9. $e^{\ln z} = z, z \neq 0$
10. $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$
11. $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
12. $z^n = e^{n \ln z}, n = 1,2,3, \dots$
13. $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln z}, n = 1,2,3, \dots$

Bentuk pangkat bilangan kompleks didefinisikan sebagai z^w dan nilai utama dari z^w yaitu:

$$z^w = e^{w \ln z}$$

Bukti:

misalkan $z^w = p$, sehingga:

$$\begin{array}{l} \frac{z^w = p}{\ln(z^w) = \ln p} \quad \text{di } \ln \text{ kan} \\ \frac{w \ln z = \ln p}{\text{sebagai pangkat dari } e} \end{array}$$

$$e^{w \ln z} = e^{\ln p} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} p = e^{w \ln z} \\ z^w = e^{w \ln z} \end{array}$$

(terbukti)

Contoh:

- (1) Tunjukkan bahwa $e^z = e^{z+2\pi i}$
- (2) Tunjukkan bahwa untuk setiap $z, e^z \neq 0$
- (3) Tunjukkan bahwa $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
- (4) Tunjukkan bahwa $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- (5) Tentukan akar-akar persamaan $e^z = -i$

Penyelesaian:

- (1) Pembuktian eksponensial bahwa $e^z = e^{z+2\pi i}$

Untuk semua $z = x + iy$, maka:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+(y+2\pi)i} = e^x \operatorname{cis}(y+2\pi) = e^x \operatorname{cis} y \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$

- (2) Pembuktian bahwa untuk setiap $z, e^z \neq 0$

Dibuktikan dengan kontradiksi, misalnya bahwa suatu bilangan $z = a + ib$ ada sedemikian hingga $e^z = 0$, maka:

$$e^a \cos b + i e^a \sin b = 0$$

sehingga:

$$e^a \cos b = 0 \quad \text{dan} \quad e^a \sin b = 0$$

karena eksponen nyata e^a tidak pernah nol, haruslah:

$$\cos b = 0 \quad \text{dan} \quad \sin b = 0$$

tetapi tidak mungkin untuk setiap nilai b , sehingga hal ini memenuhi bahwa tak satupun z ada.

Jadi $e^z \neq 0$ untuk semua z

(3) Pembuktian bahwa $|e^z| = e^x$

$$|e^z| = |e^z(\cos y + i \sin y)| = |e^z| |\cos y + i \sin y| = e^x \cdot 1 = e^x$$

(terbukti)

(4) Pembuktian bahwa $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

Dibuktikan dengan definisi bahwa:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{dengan} \quad z = x + iy$$

sehingga:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{dan} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

diperoleh:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} \{(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2))\} \\ &= e^{x_1+x_2} \end{aligned}$$

(terbukti)

(5) Akar-akar persamaan $e^z = -i$

Persamaan $e^z = -i$ bisa ditulis dalam bentuk:

$$e^x \cos y + i e^x \sin y = 0 - i$$

sehingga:

$$e^x \cos y = 0 \quad \text{dan} \quad e^x \sin y = -1$$

Diperoleh:

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = \text{bilangan bulat}$$

dengan demikian persamaan kedua menjadi $\pm e^x = -1$, sehingga hanya memiliki kemungkinan $e^x = 1$, jadi $x = 0$.

Apabila $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ untuk $k = \text{bilangan genap}$, maka $e^x \sin y = -1$ tidak mungkin dipenuhi, akibatnya nilai yang diperoleh untuk y dipersempit menjadi untuk $k \text{ ganjil}$.

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = \text{bilangan bulat}$$

Hal ini berarti bahwa akar-akar persamaan yang diberikan yaitu:

$$z = 0 + \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$$

berarti bahwa:

$$e^{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i} = -i$$

yang menggambarkan periodesitas fungsi eksponensial.

Soal Latihan 1

1. Tunjukkan bahwa:
 - a. $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$
 - b. $e^{z+\pi i} = -e^z$
2. Tentukan z sehingga memenuhi persamaan:
 - a. $e^z = 1$
 - b. $e^z = -1$
 - c. $e^{i\bar{z}} = e^{i\bar{z}}$

3. Bila $z \neq 0$, tunjukkan bahwa bila $z = re^{i\theta}$ maka:
 - a. $\bar{z} = re^{-i\theta}$
 - b. $\exp(\ln r + i\theta) = z$
4. Hitunglah nilai utama dari :
 - a. i^{-i}
 - b. $i^{2\pi i}$
 - c. $(-1 + i)^i$
5. Tunjukkan bahwa untuk $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ maka $-1^{\frac{1}{\pi}} = \exp[(2k + 1)i]$
6. Tunjukkan bahwa $\exp \bar{z}$ tidak analitik dimanapun
7. Tunjukkan dengan dua cara bahwa $\exp z^2$ adalah menyeluruh dan tentukan derivativenya.
8. Selidiki perlakuan dari $\exp(x + iy)$ bila x menuju $-\infty$
9. Selidiki perlakuan dari $\exp(2 + iy)$ bila y menuju ∞
10. Tunjukkan bahwa $|e^{-2z}| < 1$ bila dan hanya bila $\operatorname{Re}(z) > 0$

3.2. FUNGSI TRIGONOMETRI

Menggunakan formulasi $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dan $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, maka diperoleh:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \longrightarrow \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \longrightarrow \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

Fungsi sinus dan cosinus merupakan fungsi menyeluruh sepanjang kombinasi linier e^{iz} dan e^{-iz} adalah menyeluruh. Derivativenya dirumuskan:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

Apabila z diambil iy dengan $x = 0 \longrightarrow \cos iy = \cosh y \quad \text{dan} \quad \sin iy = i \sinh y$

Sifat-sifat:

1. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$
2. $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$
3. $\sec z = \frac{1}{\cos z}$
4. $\cos \sec z = \frac{1}{\sin z}$

Pendefrensialan dengan menggunakan aturan diperoleh:

1. $\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$
2. $\frac{d}{dz} \cot z = -\cos \sec^2 z$
3. $\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$
4. $\frac{d}{dz} \cos \sec z = -\cos \sec z \cot z$

Definisi: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ diperoleh $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ diperoleh $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Untuk $x = 0$ maka dari dua formulasi terakhir diatas akan diperoleh:

$$\sin(iy) = i \sinh y \quad \text{dan} \quad \cos(iy) = \cosh y$$

Selain itu $\overline{\sin z}$ dan $\overline{\cos z}$ adalah *sekawan* dengan $\sin z$ dan $\cos z$.

Fungsi $\sin z$, $\cos z$ dan $\tan z$ adalah periodik dengan formulasi:

1. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
2. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
3. $\sin(z + \pi) = -\sin z$
4. $\cos(z + \pi) = -\cos z$
5. $\tan(z + \pi) = \tan z$
6. $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \cos z$

Sifat-sifat yang lain sebagai berikut:

1. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$
2. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$
3. $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$
4. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
5. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
6. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
7. $\sin(-z) = -\sin z$
8. $\cos(-z) = \cos z$
9. $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$
10. $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z$
11. $\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \pm \tan z_1 \tan z_2}$
12. $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
13. $1 + \cot^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$

$$14. \overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

$$15. \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

$$16. \overline{\tan z} = \tan \bar{z}$$

Apabila dari sifat diatas dikembangkan sendiri, seperti:

1. $\sin z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
2. $\cos z = 0$ bila dan hanya bila $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Fungsi variabel kompleks \longrightarrow nilai mutlak sinus dan cosinus tidak terbatas

Variabel real \longrightarrow nilai mutlak sinus dan cosinus tdk melebihi 1

Variabel kompleks:

1. sinus dan cosines merupakan fungsi periodik dengan periode 2π
2. $\tan z$ dan $\cot z$ juga periodik dengan periode π

Contoh:

- (1) Tunjukkan bahwa $\sin z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi$
- (2) Tunjukkan bahwa turunan dari $\sin z$ adalah $\cos z$
- (3) Tunjukkan bahwa bahwa $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- (4) Tunjukkan bahwa $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$ dan $\tan(-z) = -\tan z$

Penyelesaian:

- (1) Pembuktian bahwa $\sin z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi$, yaitu apabila $z = k\pi$ maka:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{k\pi i} - e^{-k\pi i}) = \frac{1}{2i}(\cos k\pi + i \sin k\pi - \cos k\pi + i \sin k\pi)$$

$$= \sin k\pi$$

$$= 0$$

sebaliknya, misalnya bahwa $\sin z = 0$ maka:

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0$$

sehingga:

$$e^{iz} = e^{-iz}$$

$$e^{2iz} = 1$$

apabila dengan menggunakan logaritma, diperoleh:

$$2iz = 2k\pi \quad \text{dengan } k = \text{bilangan bulat}$$

sehingga:

$$z = k\pi$$

(terbukti)

(2) Turunan dari $\sin z$ adalah $\cos z$, dengan pembuktian:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\sin z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\right) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - ie^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= \cos z \end{aligned}$$

(3) Pembuktian bahwa $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Menurut definisi:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{dan} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

maka:

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(4) Pembuktian bahwa: $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$ dan $\tan(-z) = -\tan z$

$$\begin{aligned}\sin(-z) &= \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \\ &= -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \\ &= -\sin z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-z) &= \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \\ &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \\ &= \cos z\end{aligned}$$

$$\tan(-z) = \frac{\sin(-z)}{\cos(-z)} = \frac{-\sin z}{\cos z} = -\tan z$$

Catatan: Fungsi dari z yang bersifat $f(-z) = -f(z)$ disebut fungsi ganjil, sedangkan yang bersifat $f(-z) = f(z)$ dinamakan fungsi genap. Jadi $\sin z$ dan $\tan z$ merupakan fungsi ganjil sedangkan $\cos z$ merupakan fungsi genap.

Soal Latihan 2

1. Tunjukkan tiap bilangan kompleks z , $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
2. Tunjukkan bahwa:
 - a. $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$ dan $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$
 - b. $2 \sin(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1$
 - c. $2 \cos(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2) = \sin 2z_2 - \sin 2z_1$

3. Tunjukkan akar-akar persamaan $\cos z = 2$
4. Tunjukkan bahwa $f(z) = \sin \bar{z}$ analitik tidak dimana-mana
5. Tunjukkan bahwa untuk sembarang z
 - a. $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$
 - b. $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$
 - c. $\tan \bar{z} = \overline{\tan z}$

3.3. FUNGSI HIPERBOLIK

Fungsi hiperbolik pada analisis kompleks didefinisikan:

1. $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
2. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
3. $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$

Fungsi e^z dan e^{-z} merupakan fungsi menyeluruh maka demikian juga $\sinh z$ dan $\cosh z$, sedangkan $\tanh z$ merupakan fungsi analitik di setiap domain asalkan $\cosh z \neq 0$. Fungsi hiperbolik kompleks bentuknya mirip dengan fungsi hiperbolik variabel real, sebagai berikut:

1. $\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$
2. $\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$
3. $\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z$
4. $\frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{cosech}^2 z$
5. $\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$

6. $\frac{d}{dz} \operatorname{cosech} z = -\operatorname{cosech} z \coth z$
7. $\sinh^2 z + \cosh^2 z = 1$
8. $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$
9. $\sinh(-z) = -\sinh z$
10. $\cosh(-z) = \cosh z$
11. $\tanh(-z) = -\tanh z$
12. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
13. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
14. $\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$
15. $\sinh(iz) = i \sin z$
16. $\sin(iz) = i \sinh z$
17. $\cosh(iz) = \cos z$
18. $\cos(iz) = \cosh z$
19. $\sinh(z) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
20. $\cosh(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
21. $|\sinh|^2 z = \sinh^2 x + \sin^2 y$
22. $|\cosh|^2 z = \sinh^2 x + \cos^2 y$
23. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
24. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Fungsi $\cosh z$ dan $\sinh z$ merupakan fungsi periodik dengan periode $2\pi i$, dan $\tanh z$ merupakan fungsi periodik dengan periode πi , sehingga diperoleh:

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z \quad \text{dan} \quad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$$

sifat:

1. $\sinh z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
2. $\cosh z = 0$ bila dan hanya bila $z = (k + \frac{1}{2})\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Contoh:

- (1) Tunjukkan bahwa $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
- (2) Tunjukkan bahwa $\sinh(iz) = i \sin z$
- (3) Tunjukkan bahwa $\cosh(iz) = \cos z$
- (4) Tunjukkan bahwa $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$

Penyelesaian:

- (1) Pembuktian $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, yaitu dengan menguraikan $\cos z$ dalam bentuk $u + iv$ dan misal $z = x + iy$, diperoleh:

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^y e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + (e^y(\cos x - i \sin x))] \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - \frac{i}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x\end{aligned}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

(terbukti)

- (2) Pembuktian bahwa $\sinh(iz) = i \sin z$, yaitu:

$$\begin{aligned}\sin(iz) &= \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} \\ &= i \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)\end{aligned}$$

$$= -i \sinh z \quad (\text{terbukti})$$

(3) Pembuktian bahwa $\cosh(iz) = \cos z$, yaitu:

$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} \\ &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) \\ &= \cosh z \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

(4) Pembuktian bahwa $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$, yaitu:

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1 \end{aligned}$$

apabila $\cosh^2 z - \sinh^2 z$ dibagi dengan $\cosh^2 z$, maka diperoleh:

$$\frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{\cosh^2 z} = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

sehingga:

$$1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z \quad (\text{terbukti})$$

Soal Latihan 3

1. Tunjukkan bahwa:
 - a. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
 - b. $\sin(z) = -\sin z$
 - c. $\cos(iz) = \cosh z$
 - d. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
2. Tentukan semua nilai yang memenuhi $\cos z = 3$
3. Tentukan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ sehingga diperoleh :
 - a. $\sinh 2z = u + iv$
 - b. $z \cosh z = u + iv$

3.4. FUNGSI LOGARITMA

Logaritma natural dari bilangan nyata positif x dituliskan $\ln x$. Untuk selanjutnya fungsi logaritma dari peubah kompleks z yaitu:

$$z = r e^{i\theta}$$

dengan r modulus dari z dan θ argumen z yang berharga banyak yaitu $(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, didefinisikan:

$$\ln z = \ln(r e^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

Apabila φ harga utama dari θ yaitu $-\pi < \varphi \leq \pi$ dituliskan:

$$\theta = (\varphi + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

maka fungsi dituliskan:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Harga utama dari $\ln z$ yaitu jika $k = 0$ sehingga formulanya menjadi:

$$\text{Ln } z = \text{Ln } r + i\varphi, r > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$$

Fungsi $w = \text{Ln } z$ merupakan fungsi bernilai tunggal dengan domain definisinya seluruh bidang z kecuali nol, sedangkan daerah hasilnya pita $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$. Apabila dikaitkan dengan fungsi eksponensial $w = e^z$ dan dipertukarkan z dengan w yaitu $z = e^w$ maka diperoleh korespondensi satu-satu antara non zero titik-titik dibidang kompleks z dengan titik-titik dalam pita $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$ di bidang w .

Titik $z = r \exp(i\varphi)$ di bidang kompleks z berkorespondensi dengan titik $w = \ln r + i\varphi$ di bidang w , sehingga bila domain definisi dari fungsi e^w terbatas sepanjang pita $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$ maka merupakan fungsi invers dari fungsi logaritma utama $\ln z$ dan dikatakan:

$$w = \ln z \text{ bila dan hanya bila } z = e^w$$

Fungsi $\ln z = \ln r + i\varphi$, $r > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ adalah kontinu dalam domain $r > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ karena komponen-komponennya $u(r, \varphi)$ dan $v(r, \varphi)$ adalah kontinu di setiap titik pada domain.

Derivative parsial tingkat satu dari u dan v adalah kontinu dan memenuhi PCR sehingga $\ln z$ adalah analitik.

Apabila $z = re^{i\theta}$ maka:

$$\frac{d}{dz} \ln z = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} + i0 \right) = \frac{1}{re^{i\theta}}$$

Sifat-sifat derivative sebagai berikut:

1. $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$
2. $\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$
3. $e^{\ln z} = z$
4. $\ln e^z = \ln |e^z| + i \arg e^z = x + i(y + 2k\pi) = z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
5. $\ln(z_1 + z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
6. $\ln \left[\frac{z_1}{z_2} \right] = \ln z_1 - \ln z_2$
7. $\ln \left(z^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \ln z$

$$8. z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln z\right)$$

$\ln(z^n) \neq n \ln z$, dapat ditunjukkan dengan memisalkan $z = i$ dan $n = 2$, maka:

$$\ln(z^n) = \ln(i^2) = \ln(-1) = (\pi + 2k\pi)i = (1 + 2k)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sedangkan

$$n \ln z = 2 \ln i = 2 \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = (1 + 4k)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Uraian diatas diperoleh hasil yang berbeda dan dapat dikatakan bahwa:

$$\ln(i^2) \neq 2 \ln i$$

Nilai $\ln(z^n) = n \ln z$ hanya apabila keduanya bernilai tunggal.

Misalnya:

$$\ln[(1 + i)^2] = 2 \quad \text{tetapi} \quad \ln[(-1 + i)^2] \neq 2 \ln(-1 + i)$$

Contoh:

(1) Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$

(2) Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Penyelesaian:

(1) Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$, yaitu:

Misal: $w = \ln z$, maka:

$$z = e^w$$

dan

$$\frac{dz}{dw} = e^w = z$$

sehingga:

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{z}$$

(terbukti)

Catatan: turunan tersebut tidak ada di titik cabang $z = 0$

(2) Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Misal: $w = \ln \zeta$ dengan $\zeta = f(z)$, maka:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

(terbukti)

Soal Latihan 4

1. Tunjukkan bahwa :
 - a. $\operatorname{Ln}(1 - ei) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)i$
 - b. $\operatorname{Ln}(1 - i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)i$
2. Tunjukkan bahwa:
 - a. $\ln 1 = 2k\pi i$
 - b. $\ln(-1) = (2k + 1)\pi i$
 - c. $\ln(i) = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$
3. Tentukan akar-akar persamaan $\ln z = \left(\frac{\pi}{2}\right)i$

3.5. INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI DAN HIPERBOLIK

Invers fungsi trigonometri dan hiperbolik dapat dinyatakan dalam logaritma dan invers fungsi, misalnya sinus yaitu $\sin^{-1}z$ dituliskan:

$$w = \sin^{-1}z$$

apabila $z = \sin w$ maka:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

sehingga diperoleh:

1. $\sin^{-1}z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$
2. $\cos^{-1}z = -i \ln(z + i\sqrt{1-z^2})$
3. $\tan^{-1}z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

Derivative dapat diturunkan langsung dari definisi:

1. $\frac{d}{dz} \sin^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
2. $\frac{d}{dz} \cos^{-1}z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
3. $\frac{d}{dz} \tan^{-1}z = \frac{1}{1-z^2}$

Untuk fungsi hiperbolik, inversnya dapat diperoleh:

1. $\sinh^{-1}z = \ln[z + \sqrt{z^2 + 1}]$
2. $\cosh^{-1}z = \ln[z + \sqrt{z^2 - 1}]$
3. $\tanh^{-1}z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Contoh:

- (1) Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} \sin^{-1}z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$
- (2) Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} \tan^{-1}z = \frac{1}{1-z^2}$
- (3) Tentukan turunan dari $z \tanh^{-1}(\ln z)$

Penyelesaian:

(1) Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$, yaitu apabila memandang

cabang utama dari $\sin^{-1} z$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin^{-1} z &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{i} \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \right\} = \frac{\frac{1}{i} \frac{d}{dz} (iz + \sqrt{1-z^2})}{iz + \sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{i} \left\{ i + \frac{1}{2} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} (-2z) \right\}}{iz + \sqrt{1-z^2}} = \frac{1 + \frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}}{iz + \sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(terbukti)

Catatan: turunan tersebut tidak ada di titik cabang $z = \pm 1$

(2) Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$ yaitu apabila memandang cabang utamanya, diperoleh:

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2} \ln(1+z) - \frac{1}{2} \ln(1-z)$$

maka:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan^{-1} z &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(1+z) - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(1-z) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{1-z^2} \end{aligned}$$

(terbukti)

Catatan: turunan tersebut tidak ada di titik cabang $z = \pm 1$

(3) Menentukan turunan dari $z \tanh^{-1}(\ln z)$, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \{z[\tanh^{-1}(\ln z)]\} &= z \frac{d}{dz} [\tanh^{-1}(\ln z)] + [\tanh^{-1}(\ln z)] \frac{d}{dz} (z) \\ &= \left\{ \frac{1}{1 + (\ln z)^2} \right\} \frac{d}{dz} (\ln z) + [\tanh^{-1}(\ln z)] = \frac{1}{1 + (\ln z)^2} + \tanh^{-1}(\ln z) \end{aligned}$$

Soal Latihan 5

1. Tentukan turunan dari:
 - a. $(\tanh^{-1}(iz + 2))^2$
 - b. $\cos^2(2z + 3i)$
2. Apabila $w = \sin^{-1}(t - 3)$ dan $z = \cos(\ln t)$, tentukan $\frac{dw}{dz}$
3. Tunjukkan bahwa:
 - a. $\frac{d}{dz} (\sec^{-1} z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
 - b. $\frac{d}{dz} (\operatorname{cosech}^{-1} z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2+1}}$
4. Tentukan turunan setiap fungsi berikut:
 - a. $\{\sin^{-1}(2z - 1)\}^2$
 - b. $\ln(\cot^{-1} z^2)$
 - c. $\sin^{-1}(\sin z - \cos z)$
 - d. $\tan^{-1}(z + 3i)^{-\frac{1}{2}}$
5. Apabila $w = \cos^{-1}(z - 1)$, $z = \sinh(3\zeta + 2i)$ dan $\zeta = \sqrt{t}$, tentukan $\frac{dw}{dt}$

BAB IV

INTEGRAL

Capaian pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menganalisa lintasan kurva Jordan dan kontur di bidang kompleks dengan cermat dan teliti
2. Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan pembuktian integral fungsi kompleks dengan cermat dan teliti
3. Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan pembuktian teorema Cauchy–Goursat dan teorema Cauchy–Goursat dalam daerah terhubung tunggal/ganda dengan cermat dan teliti
4. Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan pembuktian integral tak tentu dengan cermat dan teliti
5. Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan pembuktian integral Cauchy dengan cermat dan teliti
6. Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan pembuktian teorema-teorema dengan cermat dan teliti

4.1. LINTASAN (KURVA JORDAN)

Konsep kurva datar yang dinyatakan secara parametrik sangat penting dalam integrasi kompleks. Persamaan kurva dalam bentuk parameter, misalnya dengan persamaan kurva:

- a. Persamaan parabola $x = \sqrt{y}$ dinyatakan dengan persamaan parameter $x = t, y = t^2$. Bila parameter t dibatasi dengan $-1 \leq t \leq 2$ maka diperoleh lintasan dari titik $(-1, 1)$ sampai dengan titik $(2, 4)$.
- b. Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dinyatakan dengan parameter $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ dan parameter t dibatasi dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Lintasan (kuva Jordan) didefinisikan:

Apabila t peubah rel, suatu kurva dalam bidang datar disebut kurva mulus (*smooth curve*) bila dan hanya bila dapat dinyatakan dengan fungsi berharga real yaitu $y = g(t), y = h(t), \alpha \leq t \leq \beta$ sedemikian hingga turunannya yaitu $\frac{dx}{dt} = g'(t), \frac{dy}{dt} = h'(t)$ ada dan kontinu dalam interval tersebut.

Ada 3 pengertian dari definisi, yaitu:

- a. $y = g(t)$ dan $y = h(t)$ kontinu dalam interval $\alpha \leq t \leq \beta$, karena adanya syarat bahwa turunannya $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ dan $\frac{dy}{dt} = h'(t)$ harus ada dan kontinu.
- b. Kekontinuan fungsi beserta turunannya menyebabkan kurva menjadi mulus dalam arti mempunyai garis singgung disetiap titik.

- c. Akibat dari turunannya ada maka kurva tersebut *mempunyai panjang* yang dapat dihitung dengan rumus:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} . dt$$

Contoh:

Persamaan $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ merupakan busur lingkaran dengan kurva mulus karena syarat-syaratnya terpenuhi.

Tentukan:

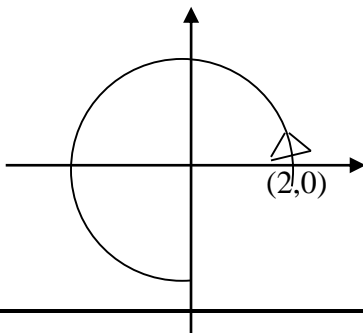
- Lintasan yang dijelajahi yaitu titik awal dan titik akhir
- Panjang lintasan

Penyelesaian:

- Lintasan yang dijelajahi yaitu titik awal dan titik akhir

$x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ merupakan kurva mulus karena syarat yang diberikan terpenuhi sehingga t berubah dari 0 samapai dengan $\frac{3\pi}{2}$ maka lintasan dengan arah positif dari (0,2) sebagai titik awal sampai dengan (0, -2) sebagai titik akhir.

Tampak pada gambar berikut:



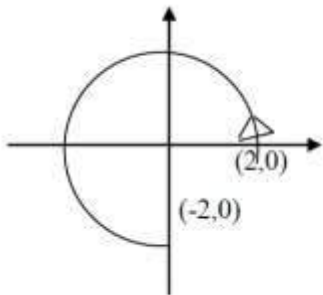
(-2,0)

b. Panjang lintasannya yaitu:

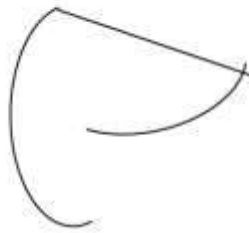
$$L = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2 dt = 3\pi$$

Teori Kurva Jordan

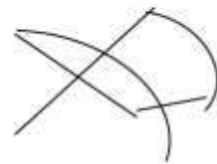
Kurva dengan titik awal dan titik akhir yang dihimpit merupakan kurva dengan lintasan terbuka, sedangkan bila titik awal dan titik akhir berhimpit merupakan kurva dengan lintasa tertutup. Apabila suatu lintasan tidak memotong dirinya sendiri (kecuali mungkin titik awal dan titik akhirnya) maka lintasan itu merupakan lintasan sederhana (*simple path*), tetapi bila tidak demikian merupakan lintasan ganda (*multi path*).



Bagian busur lingkaran

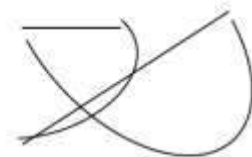
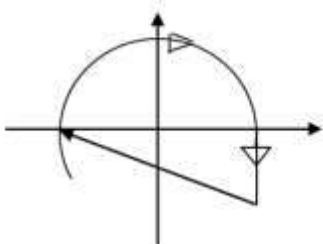


Terbuka sederhana



Terbuka ganda

Gambar 4.1. Kurva Terbuka



Kurva tertutup

Tertutup sederhana

Tertutup ganda

Gambar 4.2. Kurva Tertutup

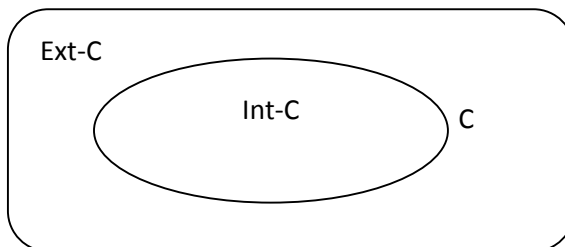
Suatu kurva C (tidak perlu mulus) bisa terdiri dari sejumlah berhingga kurva mulus C_n sedemikian hingga titik akhir C_k berhimpit dengan titik awal C_{k+1} ; $k = 1, 2, 3, \dots, n$ dan ditulis dengan $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$. Istilah yang sering dipakai untuk kurva semacam itu adalah kontinu sepotong-potong (piecewise continuous) atau mulus sepotong-potong (piecewise smooth).

Teorema Kurva Jordan yang dikemukakan Camille Jordan (Perancis):

Bila C lintasan tertutup sederhana pada bidang datar maka bidang tersebut terbagi oleh C menjadi tiga bagian himpunan saling asing, yaitu:

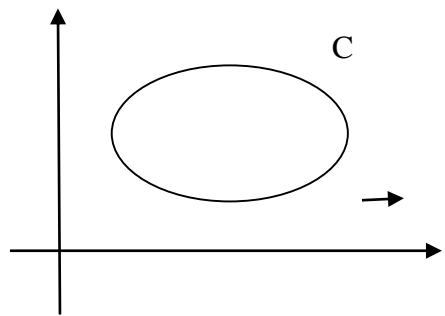
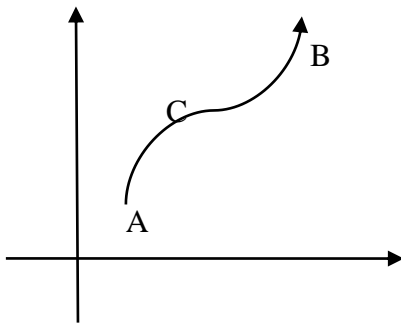
- a. Kurva C sendiri
- b. Bagian dalam (*interior*) C berupa himpunan terbuka dan terbatas
- c. Bagian luar (*exterior*) C berupa himpunan terbuka dan tak terbatas

Lebih jauh, C merupakan batas bagi kedua Int- C dan Ext- C



Gambar 4.3. Teori Kurva Jordan

Secara luas, lintasan digunakan dalam integral kompleks karena menggantikan fungsi integral terintegrasi yang mengacu pada kalkulus elementer. Pada proses integrasi, dijelajahi dari titik awal ke titik akhir atau sebaliknya, sehingga arah (orientasi) lintasan harus diterapkan terlebih dahulu sebelum proses pengintegralan.



Gambar 4.4. Busur Jordan Orientasi – Positif Gambar 4.5. Kurva Jordan Orientasi – Positif

Busur Jordan C (terbuka sederhana) dikatakan mempunyai orientasi positif bila dijelajahi dari titik awal sampai titik akhirnya, sehingga dapat diartikan sebagai busur yang sama dengan arah berlawanan. Kurva Jordan C (tertutup sederhana) dikatakan mempunyai arah positif bila dijelajahi sedemikian hingga bagian dalam C berada disebelah kirinya.

4.2. KONTUR

Suatu busur C merupakan himpunan titik-titik $z(x,y)$ di bidang kompleks sedemikian hingga:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

dimana $x(t)$ dan $y(t)$ merupakan fungsi kontinu dari peubah real t .

Definisi ini membentuk sebuah pemetaan dalam interval $a \leq t \leq b$ ke bidang xy dan bayangan titik-titiknya sesuai dengan urutan naiknya t , membentuk persamaan:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

dimana $z(t)$ kontinu apabila $x(t)$ dan $y(t)$ keduanya kontinu.

Suatu fungsi kompleks $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ dikatakan dapat didiferensialkan ke peubah real t apabila kedua fungsi komponennya $x(t)$ dan $y(t)$ dapat dideferensialkan ke t dan derivativenya dirumuskan:

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad a \leq t \leq b$$

Suatu busur $C: z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ dinamakan *smooth* atau licin, bila derivative:

$$z'(t) \text{ ada dan kontinu}$$

dalam interval $a \leq t \leq b$ dan bila $z'(t)$ tak pernah nol.

Apabila pada titik t :

- a. $x'(t) = 0$ maka vektor $z'(t) = iy'(t)$ adalah vertikal

- b. $x'(t) \neq 0$ maka slope dari vektor $z'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ adalah sama dengan slope garis singgung busur C pada titik yang berkorespondensi dengan t yaitu $\frac{dy}{dx}$.

Hal ini berarti sudut inklinasi garis singgung dapat dirumuskan dengan $\arg z'(t)$. Selanjutnya, karena $z'(t)$ kontinu dalam interval $a \leq t \leq b$ maka busur *smooth* merupakan rangkaian kontinu garis-garis singgung yang panjangnya:

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Panjang busur *smooth* di rumuskan:

$$L = \int_a^b |z'(t)| \quad \text{atau} \quad L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Dalam perhitungan selanjutnya bisa diadakan pergantian parameter $t = \phi(r)$, $c \leq r \leq d$, dimana ϕ adalah fungsi berharga real dari suatu pemetaan dalam interval $c \leq r \leq d$ onto interval $a \leq t \leq b$. Dianggap bahwa ϕ beserta derivativenya kontinu dan $\phi'(r) > 0$ untuk setiap r , sehingga **rumus panjang busur menjadi:**

$$L = \int_c^d |z'[\phi(r)]| \phi'(r) dr$$

Busur C telah kita nyatakan dalam parameter yang baru r , yaitu:

$$z = Z(r) = z[\phi(r)], c \leq r \leq d,$$

sehingga:

$$Z'(r) = z'[\phi(r)]\phi'(r)$$

Jadi kontur yaitu rangkaian kontinu dari berhingga banyak busur-busur smooth, panjang kontur yaitu jumlah panjangnya busur-busur smooth

Soal Latihan 1

Tentukan lintasan yang dijelajahi yaitu titik awal dan titik akhir dan panjang lintasannya sesuai dengan ketentuan pada persamaan berikut:

1. $x = t^2 - 1, y = t, -1 \leq t \leq 1$
2. $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$
3. $z = -i + e^{it}, -\pi \leq t \leq \pi$
4. $x = e^{-t}, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1$

4.3. INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

Fungsi $f(z) = U(t) + iV(t), a \leq t \leq b$ dengan U dan V merupakan fungsi-fungsi bernilai real yang kontinu dari peubah real t dalam interval tertutup $a \leq t \leq b$. U dan V kontinu pada interval $[a, b]$

artinya interval $[a, b]$ terdiri atas beberapa sub interval dengan U dan V kontinu dan mempunyai limit berhingga di kedua ujung-ujungnya maka sesuai teori integral yaitu $\int_a^b U(t)dt$ dan $\int_a^b V(t)dt$ ada, sehingga bila integral tertentu dari F dinyatakan dengan dua integral menjadi:

$$\int_a^b F(t) = \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt$$

Integral tertentu fungsi berharga kompleks f dari peubah kompleks z dapat diartikan sebagai nilai $f(z)$ sepanjang kontur C yang merentang dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ di bidang kompleks sehingga integral kontur dapat ditulis:

$$\int_C f(z)dz \quad \text{atau} \quad \int_\alpha^\beta f(z)dz$$

Apabila kontur C dinyatakan dengan persamaan $z(t) = x(t) + iy(t)$ dengan $a \leq t \leq b$ merentang dari titik $z(a) = \alpha$ ke titik $z(b) = \beta$ dan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kontinu pada C yang mana fungsi $u[x(t), y(t)]$ dan $f[z(t)]$ kontinu dari t , sehingga dapat didefinisikan **integral kontur f sepanjang C** yaitu:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$$

Bentuk $f[z(t)]z'(t) = \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}$
 maka persamaan integral diatas dapat ditulis dalam bentuk integral dari fungsi
 dengan satu peubah t :

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i \int_a^b (vx' + uy')dt$$

Sebagai catatan, karena C kontur maka fungsi x' dan y' disamping
 u dan v adalah kontinu sepotong-potong dari t , sehingga harga integral dari
 kedua persamaan integral diatas mempunyai nilai.

Bentuk integral kontur dari fungsi kompleks dengan dua peubah x dan y
 dirumuskan:

$$\int_C f(z)dz = \int_C [udx - vdy] + iv \int_C [vdx + udy]$$

Bentuk persamaan diatas diperoleh dengan mengganti $f(z)$ dengan $u + iv$
 dan dz dengan $dx + idy$.

Terkait pengertian kontur C dengan persamaan integral kontur f
 sepanjang C maka kontur $-C$ merupakan kontur yang sama dengan arah yang
 berlawanan, sehingga ditulis kontur $-C$ mempunyai persamaan:

$$z = z(-t) \text{ dengan } -b \leq t \leq -a,$$

maka:

$$\int_{-c} f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)] [-z'(-t)] dt$$

atau apabila diganti peubah menjadi:

$$\int_{-c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$$

Sifat-sifat:

1. $\int_c kf(z) dz = k \int_c f(z) dz$, k = konstanta kompleks
2. $\int_c [f(z) + g(z)] dz = \int_c f(z) dz + \int_c g(z) dz$
3. $\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$
4. $\int_a^b f(z) dz = \int_a^m f(z) dz + \int_m^b f(z) dz$, dengan a, b, m pada C
5. Bila C terdiri dari kontur C_1 dari α ke β_1 dan C_2 dari β_1 ke β maka:

$$\int_c f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} g(z) dz$$

Sifat integral yang telah dipelajari:

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)| dt$$

maka untuk setiap konstanta M sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk z pada kontur C berlaku:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int_a^b |z'(t)| dt$$

Apabila integral di ruas kanan dinyatakan dengan L dari kontur maka modulus dari nilai integral f sepanjang C tidak melampaui ML atau:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

Contoh:

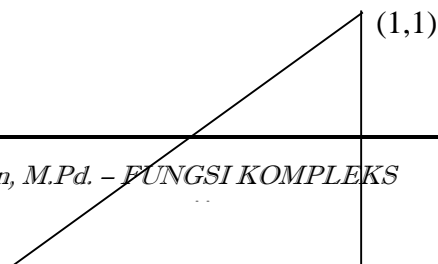
(1) Tunjukkan bahwa apabila C suatu kurva mulus dari z_0 ke ζ maka

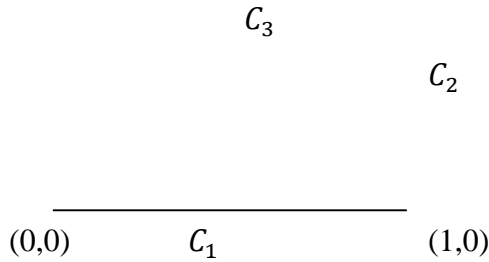
$$\int_C dz = \zeta - z_0$$

(2) Tunjukkan bahwa apabila C merupakan lingkaran dengan $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi, r > 0$

(3) Hitunglah $\int_C y dz$ sepanjang C : $x = t - 1, y = e^{t-1}, 2 \leq t \leq 3$

(4) Integralkan fungsi $f(z) = x$ sepanjang $C_1 + C_2 + C_3$ yang tampak gambar berikut:





Penyelesaian:

- (1) Apabila C suatu kurva mulus dari z_0 ke ζ maka $\int_C dz = \zeta - z_0$
 Berarti $f(z) = 1$ untuk semua z , sehingga $f(\zeta_k) = 1$ untuk setiap ζ_k pada C .

Menggunakan rumus definisi, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \int_C dz &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(\Delta z)_k \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} [(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots \\
 &\quad + (\zeta - z_{n-1})] \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} (\zeta - z_0) \\
 &= \zeta - z_0
 \end{aligned}$$

(terbukti)

Keadaan khusus, apabila C adalah kurva mulus tertutup maka:

$$\zeta = z_0 \quad \text{dan} \quad \int_C dz = 0$$

- (2) Apabila C merupakan lingkaran dengan $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$

Berarti:

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

maka diperoleh: $dz = ire^{it} dt$

sehingga:

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{z - z_0} &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} \\ &= i \int_0^{2\pi} dt \\ &= i(2\pi - 0) \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

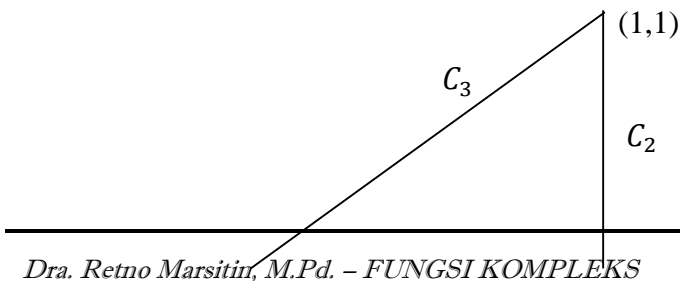
(terbukti)

(3) $\int_c y dz$ sepanjang C: $x = t - 1, y = e^{t-1}, 2 \leq t \leq 3$

Persamaan pada C, diperoleh: $dx = dt$ dan $dy = e^{t-1} dt$ maka:

$$\begin{aligned} \int_c y dz &= \int_c y (dx + i dy) \\ &= \int_2^3 e^{t-1} (dt + ie^{t-1} dt) \\ &= \int_2^3 (e^{t-1} + ie^{2t-2}) dt \\ &= e^2 - e + \frac{i}{2}(e^4 - e^2) \end{aligned}$$

(4) Integralkan fungsi $f(z) = x$ sepanjang $C_1 + C_2 + C_3$ yang tampak gambar berikut:



$$(0,0) \quad \overline{\quad\quad\quad} \quad C_1 \quad (1,0)$$

lintasan integrasi dapat dipresentasikan sebagai berikut:

$$C_1: y = 0, 0 \leq x \leq 1; \quad dy = 0$$

$$C_2: x = 1, 0 \leq y \leq 1; \quad dx = 0$$

$$C_3: y = x, \text{ dari } (1,1) \text{ ke } (0,0); \quad dy = dx$$

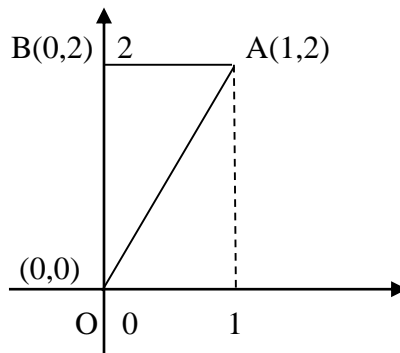
dengan substitusi yang sesuai, diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{C_1+C_2+C_3} f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz \\ &= \int_{C_1} x(dx + i dy) \\ &\quad + \int_{C_2} x(dx + i dy) \\ &\quad + \int_{C_3} x(dx + i dy) \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 i dy + \int_1^0 (1+i) dx \\ &= \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Soal Latihan 2

1. Hitunglah $\int_C z^2 dz$ sepanjang garis OA dari $z = (0,0)$ ke $z = (1,2)$!

2. Hitunglah $\int_C \bar{z} dz$ sepanjang keliling lingkaran satuan $|z| = 1$ arah positif, dimana $z = \cos t + i \sin t$!
3. Tunjukkan bahwa $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, bila C keliling lingkaran dengan $= z_0 + re^{i\theta}$, $r > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ dengan arah positif!
4. Hitunglah $\int_C f(z) dz$ bila $f(z) = y - x + 6ix^2$ dan C terdiri atas dua penggal garis dari $z = 0$ sampai $z = i$ dan dari $z = 1 + i$
5. Hitunglah $\int_C y dz$ sepanjang C dimana $x = z + i$ dan $y = e^t$ dengan $0 \leq t \leq 1$!
6. Hitunglah $\int_C f(z) dz$ bila C lintasan tertutup $OABC$ pada gambar di bawah ini:



4.4. TEOREMA CAUCHY – GOURSAT

Dua fungsi dianggap bernilai real $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ secara bersama dengan derivative parsial tingkat satu kontinu di seluruh region tertutup R yang memuat titik-titik dalam dan pada kontur tertutup sederhana C . Suatu kontur

berorientasi positif bila titik-titik dalam dari R selalu berada di sebelah kiri C . Sesuai teorema Green untuk integral garis:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy$$

Fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ yang analitik di seluruh region R di bidang z dan anggap $f'(z)$ kontinu. Fungsi u dan v bersama derivative parsial tingkat satu kontinu di R maka:

$$\int_C udx - vdy = - \iint_R (v_x + u_y) dx dy$$

$$\int_C vdx + udy = \iint_R (u_x - v_y) dx dy$$

Mengacu persamaan Cauchy-Riemann, integran di kedua dobel integral tersebut adalah nol di seluruh R dan berdasar persamaan integral garis maka dua integral pada ruas kiri masing-masing mewakili bagian real dan bagian imajiner dari harga integral $f(z)$ sepanjang C , sehingga dapat dituliskan:

$$\int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy = 0 + 0i \quad \text{atau} \quad \int_C f(z) dz = 0$$

Contoh:

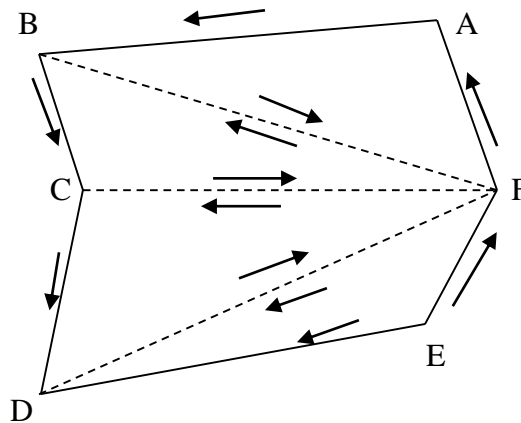
Apabila C kontur tertutup sederhana maka $\int_C dz = 0$, $\int_C z dz = 0$, $\int_C z^2 dz = 0$, karena $f(z) = 1, z$ dan z^2 masing-masing merupakan fungsi menyeluruh dan derivatifnya kontinu dimanapun.

Goursat merupakan orang pertama yang membuktikan hilangnya syarat kontinu pada $f'(z)$. Penghilangnya syarat ini penting dan salah satu akibat misalnya, derivative dari fungsi analitik adalah juga analitik, sehingga muncul revisi dari teorema Cauchy yang dikenal dengan teorema Cauchy – Goursat yaitu bila $f(z)$ analitik di semua titik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C maka $\int_C f(z) dz = 0$

Contoh:

Teorema Cauchy-Goursat untuk suatu segi banyak tertutup

Pandang sebagai contoh suatu segi banyak $ABCDEF$ yang tampak pada gambar berikut:



Gambar 4.6. Teorema $C - G$

Membuat garis sehingga terbagi menjadi segitiga-segitiga dan menurut diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{ABCDEF A} f(z) dz &= \int_{ABFA} f(z) dz + \int_{BCFB} f(z) dz + \int_{CDFC} f(z) dz \\ &+ \int_{DEFD} f(z) dz \end{aligned}$$

Mengandaikan bahwa $f(z)$ analitik di dalam dan pada segi banyak tersebut maka telah membuktikan hasil tersebut untuk segi banyak tertutup.

Teorema C – G Dalam Daerah Terhubung Tunggal/Ganda

Daerah terhubung tunggal (*simply connected domain*) D adalah domain sedemikian hingga tiap kontur tertutup sederhana, didalamnya hanyalah terdiri atas titik-titik dari D , sedangkan daerah yang tidak terhubung tunggal disebut terhubung ganda (*multiply connected domain*). Daerah interior dari suatu kontur tertutup misalnya, adalah domain terhubung tunggal, sedangkan daerah eksteriornya adalah domain terhubung ganda, dan daerah diantara dua lingkaran konsentris misalnya adalah domain terhubung ganda.

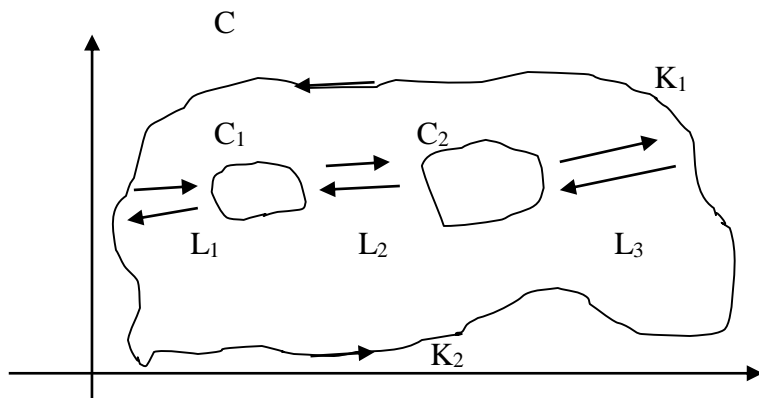
Teorema Cauchy – Goursat:

Bila f analitik di seluruh domain terhubung tunggal D maka untuk tiap kontur tertutup sederhana C di D yaitu $\int_C f(z)dz = 0$

Kontur tertutup sederhana C dapat diganti dengan kontur tertutup yang tidak tunggal, sehingga bila C memotong dirinya sendiri sebanyak berhingga maka diperoleh sebanyak berhingga kontur tertutup sederhana yang bersesuaian dan teorema Cauchy – Goursat dapat dinyatakan sebagai berikut:

Bila C kontur tertutup sederhana dan andaikan $C_j, j = 1, 2, 3, \dots, n$ sejumlah berhingga kontur tertutup sederhana di dalam C sedemikian hingga interior tiap C_j tidak mempunyai titik berserikat. Jika R region tertutup yang memuat semua titik di dalam dan pada C kecuali interior di tiap C_j . Apabila B mempunyai arah terbatas menyeluruh dari R yang memuat C dan semua C_j dan yang arahnya dinyatakan sedemikian hingga titik-titik dari R selalu berada di sebelah kiri B dan bila $f(z)$ analitik di R maka $\int_B f(z)dz = 0$

Teorema dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.7. Teorema $C - G$

Perhatikan gambar di atas, bahwa lintasan L_1 memuat sejumlah berhingga segmen garis yang menghubungkan kontur luar C ke kontur dalam C_{11} , sedangkan lintasan L_2 menghubungkan kontur C_1 ke C_2 dan seterusnya hingga lintasan L_{n+1} menghubungkan kontur C_n ke C . Dengan ditunjuk anak panah tunggal terbentuklah dua kontur K_1 dan K_2 yang masing-masing memuat lintasan polygonal L_j (atau $-L_j$) bagian dari C maupun C_j dan masing-masing dinyatakan sebagai arah positif yaitu bila interior selalu berada di sebelah kiri lintasan. Teorema Cauchy – Goursat dapat dikenakan pada $f(z)$ terhadap kontur K_1 dan K_2 tersebut dan jumlah integral kedua kontur dapat diperoleh yaitu nol.

Contoh:

(1) Hitunglah $\int_{-i}^1 \frac{dz}{z}$ sepanjang seperempat lingkaran yang ditentukan oleh

$$z = e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$$

(2) Tunjukkan bahwa $\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$ dimana B memuat lingkaran $|z| =$

2 dengan arah positif bersama lingkaran $|z| = 1$ dengan arah negatif

Penyelesaian:

(1) $\int_{-i}^1 \frac{dz}{z}$ sepanjang seperempat lingkaran yang ditentukan oleh $z = e^{it}$,

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$$

Integran tersebut tidak analitik pada $z = 0$

$$\int_{-i}^1 \frac{1}{z} dz = \log z \Big|_{-i}^1$$

$$= \log(1) - \log(-i)$$

$$= \frac{\pi i}{2}$$

Perhitungan integral yang secara langsung:

$$\int_{-i}^{1+i} 2z \, dz = z^2 \Big|_{-i}^{1+i} = (1+i)^2 - (-i)^2 = 1 + 2i$$

$$\int_0^{i\pi} e^{z+i} \, dz = e^{z+1} \Big|_0^{i\pi} = e^{i\pi+1} - e^1 = -2e$$

$$\int_{\pi}^i \sin z \, dz = -\cos z \Big|_{\pi}^i$$

$$= -\cos i + \cos \pi = -1 - \cos i$$

- (2) Perhatikan bahwa $\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$ dimana B memuat lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif bersama lingkaran $|z| = 1$ dengan arah negatif. Integran $f(z)$ analitik kecuali pada titik-titik $z = 0$ dan $z = \pm 3i$, ternyata ketiga titik ini berada di luar region terbatas B , sehingga berlaku teorema Cauchy – Goursat.

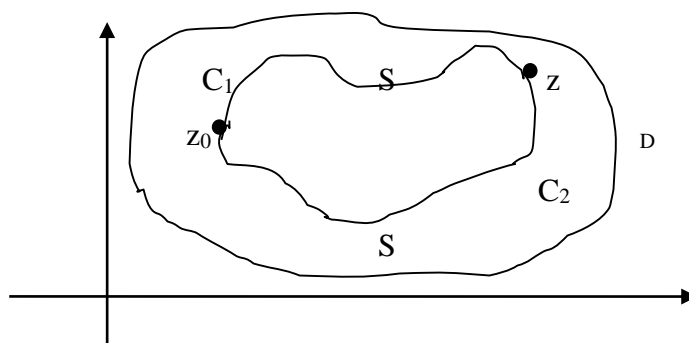
Soal Latihan 3

- Jika C adalah kurva $y = x^2 - 3x^2 + 4x - 1$ yang menghubungkan titik (1,1) dan (2,3). Tentukan nilai dari $\int_C (12z^2 - 4iz) \, dz$ dengan:
 - Melalui lintasan (1,1) \longrightarrow (2,1), (2,1) \longrightarrow (3,1)
 - Langsung (1,1) \longrightarrow (2,3)
- Hitunglah integral $f(z) = \frac{z+2}{z}$ bila C :
 - Setengah lingkaran $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$
 - Setengah lingkaran $z = 2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$
 - Lingkaran $z = 2e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$

3. Hitunglah integral fungsi yang diberikan sepanjang masing-masing lintasannya dengan lintasan tertutup sederhana dan anggaplah orientasinya positif.
- $f(z) = 6z^5 - 1$ sepanjang penggal garis lurus dari $z = i$ ke $z = 1 + i$ dan kemudian ke $z = 1$
 - $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)}$ sepanjang segitiga dengan titik-titik sudut $-1, 0$ dan $2i$
 - $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$ sepanjang setengah bagian bawah lingkaran satuan dengan pusat pada pusat koordinat yang dijelajahi searah jarum jam.

4.5. INTEGRAL TAK TENTU

Ambil dua titik z_0 dan z dalam domain terhubung tunggal D dimana fungsi $f(z)$ analitik di seluruh domain. Misal C_1 dan C_2 dua kontur yang menghubungkan z_0 ke z dan seluruhnya terletak dalam D , maka C_1 dan $-C_2$ bersama-sama akan membentuk sebuah kontur tertutup.



Gambar 4.8. Integral Tak Tentu

Teorema Cauchy – Goursat berlaku untuk sembarang kontur tertutup dalam domain terhubung tunggal maka diperoleh bahwa:

$$\int_{C_1} f(s)ds - \int_{C_2} f(s)ds = 0$$

dimana s menyatakan titik-titik pada C_1 dan C_2

Integral dari z_0 ke z yaitu $\int_{z_0}^z f(s)ds$ ini tidak tergantung pada pemilihan dan sepanjang kontur C dalam D . Integral ini akan menentukan sebuah fungsi $F(z)$ pada domain terhubung tunggal D dan ditulis:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s)ds$$

sehingga derivative $F(z)$ yaitu $F'(z)$ ini ada dan sama dengan $f(z)$

$$F'(z) = f(z) \quad F(z) = \int f(z)dz$$

harga integral tertentu dapat di hitung seperti integral pada kalkulus real dengan memasukkan nilai pada integral tak tentu yaitu:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = \int_{z_0}^{\beta} f(z)dz - \int_{z_0}^{\alpha} f(z)dz$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

Hal ini memperjelas bahwa lintasan integrasi dalam domain terhubung tunggal dengan fungsi analitik $f(z)$ berada dan apabila $G(z)$ merupakan fungsi analitik lain selain $F(z)$ sedemikian hingga $G'(z) = f(z)$ maka derivative dari $H(z) = F(z) - G(z)$ adalah nol. Apabila $H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ maka $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$ yang berarti $u_x(x, y)$ dan $v_x(x, y)$ kedua-duanya adalah nol di seluruh domain dimana fungsi F dan G analitik.

Apabila dikaitkan dengan persamaan Cauchy – Riemann maka $u_y(x, y)$ dan $v_y(x, y)$ juga nol, yang berarti $u_x(x, y)$ dan $v_x(x, y)$ adalah fungsi-fungsi konstan. $H(z)$ merupakan fungsi konstan, sehingga dua integral tak tentu $F(z)$ dan $G(z)$ hanya berbeda pada konstanta kompleks.

Contoh:

- (1) Tentukan $\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz$, apabila kontur menghubungkan dua titik batas-batas integrasi yang terletak *di atas sumbu x* di bidang z .
- (2) Tentukan $\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz$, apabila kontur menghubungkan dua titik batas-batas integrasi yang terletak *di bawah sumbu x* di bidang z
- (3) Suatu fungsi $F(z)$ yang memenuhi $F'(z) = f(z)$

Penyelesaian:

- (1) $\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz$, apabila kontur menghubungkan dua titik batas-batas integrasi yang terletak *di atas sumbu x* di bidang z

misal: $z = re^{i\theta} = r \exp(i\theta)$

maka:

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right); r > 0, 0 < \theta < 2\pi$$

Fungsi f tidak analitik khususnya pada titik dengan arah $\theta = 0$ yaitu $z = 1$. Di lain pihak:

$$f(z) = \sqrt{r} \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right); r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

Sebagai harga lain dari fungsi $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ merupakan analitik dimanapun kecuali pada arah $\theta = -\frac{\pi}{2}$

Harga dari $f(z)$ yang berada di atas sumbu x sesuai dengan persamaan, sehingga integrannya dapat diganti dengan $f(z)$

Integralkan tak tentu dari $f(z)$ yaitu:

$$F(z) = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i3\theta}{2}\right), r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz &= \frac{2}{3} \left(e^0 - e^{\frac{i3\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} (1 + i) \end{aligned}$$

(2) Untuk $\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz$ yang terletak di bawah sumbu x dengan mengganti integralkan yaitu:

$$g(z) = \sqrt{r} \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right); r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

sedangkan fungsi analitik sebagai integral tak tentu dari $g(z)$:

$$G(z) = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i3\theta}{2}\right), r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

sehingga diperoleh:

$$\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{2}{3} \left(e^{3\pi i} - e^{\frac{i3\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{2}{3} (-1 + i)$$

Jadi $\int_{-1}^1 z^{\frac{1}{2}} dz$ dengan arah positif sepanjang kontur tertutup sederhana dari dua lintasan integrasi sebagaimana telah dibahas memiliki nilai:

$$\frac{2}{3} (-1 + i) - \frac{2}{3} (1 + i) = -\frac{4}{3}$$

Soal Latihan 4

1. Fungsi $f(z) = z^2$ dan $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ adalah menyeluruh maka dapat ditentukan integral tak tentu $F(z) = \int_c f(z) dz$ dan integral tertentu dari $z = 0$ ke $z = 1 + i$. Tentukan integral tentunya!
2. Fungsi dari $f(z) = \sqrt[3]{r} e^{\frac{i\theta}{3}}$ ($r > 0, -\pi < \theta < \pi$) merupakan cabang utama dari $z^{\frac{1}{3}}$ yang analitik kecuali pada OX^- yang mempunyai suatu anti derivative $F(z) = \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}}$ untuk sembarang lintasan dari $-i$ sampai i yang tidak memotong OX^- . Tentukan integral tentunya!
3. Suatu fungsi $F(z)$ yang memenuhi $F'(z) = f(z)$ dinamakan suatu integral tak tentu dari $f(z)$ dan dinyatakan dalam $\int f(z) dz$. Tentukan:
 - a. $\int \sin z dz = -\cos z + c$
 - b. $\int \frac{dz}{z} = \ln z + c$

4.6. INTEGRAL CAUCHY

Teorema:

Bila f analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C arah positif dan bila z_0 suatu titik di dalam C maka:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

atau apabila z_0 dengan lambang a maka:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a)$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Rumus di atas mengatakan bila f analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C maka nilai titik di dalam C sepenuhnya ditentukan oleh nilai dari f pada C , sehingga perubahan harga f dari titik di dalam C pasti berubahnya nilai f pada C .

Contoh:

(1) Hitunglah $\int_C \frac{z^2}{z-i} dz$ dengan $C: |z| = 2$ dan berorientasi positif

(2) Hitunglah $\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$ dimana $C: z = -3i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Penyelesaian:

(1) $\int_C \frac{z^2}{z-i} dz$ dengan $C: |z| = 2$ dan berorientasi positif

Fungsi tersebut merupakan fungsi menyeluruh dan $z_0 = i$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z^2}{z-i} dz &= 2\pi i [f]_i \\ &= -2\pi i\end{aligned}$$

(2) $\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$ dimana $C: z = -3i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Integralnya analitik kecuali $z = 0$ yang berada di $Lr(C)$ dan pada $z = -\pi i$ yang berada di $Lr(C)$, sehingga diperoleh:

$$\int_C \frac{\frac{1}{z}}{z + \pi i} dz$$

menggunakan integral Cauchy dengan $f(z) = \frac{1}{z}$ dan $z_0 = -\pi i$ maka:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{z(z + \pi i)} &= \int_C \frac{\frac{1}{z}}{z + \pi i} \\ &= 2\pi i [f(-\pi i)] \\ &= -2\end{aligned}$$

Apabila suatu fungsi analitik di suatu titik maka derivative semua tingkat ada dan analitik di titik tersebut ada. Anggap f analitik di dalam dan

pada kontur tertutup sederhana C , z adalah sembarang titik dalam C dan misal s di C dan menggunakan rumus integral Cauchy maka diperoleh:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z} ds \quad (1)$$

Derivative f di z dapat dinyatakan sebagai integral:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds \quad (2)$$

Derivative kedua dari f di setiap titik z dalam C :

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^3} ds \quad (3)$$

Realitanya, apabila suatu fungsi adalah analitik di setiap titik maka derivativenya juga analitik di titik tersebut, sehingga apabila f analitik di titik z maka harus ada lingkaran yang mengelilingi z sedemikian hingga f analitik di dalam dan pada lingkaran tersebut. Pada rumus (3), $f''(z)$ ada di setiap titik dalam lingkartan dimana $f'(z)$ yang analitik berbeda, sehingga alasan keanalitikan $f'(z)$ untuk menyimpulkan keanalitikan $f''(z)$.

Teorema:

Apabila f analitik di suatu titik maka derivative dari semua tingkat juga analitik di titik tersebut.

Bukti:

Dari $f'(z)$ kontinu, dan karena $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$ maka derivative parsial tingkat satu dari u dan v adalah kontinu. Dari $f''(z)$ analitik serta kontinu, dan karena $f''(z) = u_{xx}(x, y) + iv_{xx}(x, y) = v_{yy}(x, y) - iu_{yy}(x, y)$ maka derivative parsial tingkat satu dari u_x, u_y, v_x dan v_y adalah kontinu, begitu seterusnya hingga derivative parsial u dan v dari semua tingkat adalah kontinu pada titik dimana f analitik.

Rumus (2) dan (3) dapat digunakan untuk menjelaskan rumus integral bagi derivative dari berbagai tingkat, dan berikut ini rumus umum yang diperoleh dari induksi matematik:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Rumus berlaku untuk $n = 1$ dan apabila dianggap rumus berlaku untuk sembarang bilangan positif $n = k$ maka rumus berlaku untuk $n = k + 1$.

Apabila $f^{(0)}(z_0)$ dapat ditulis $f(z_0)$, dan $0! = 1$ maka rumus (4) dapat ditulis:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

dengan menjadi rumus integral Chauchy bila $n = 0$ dan akan menjadi rumus (4) dengan notasi yang berbeda bila $n = 1, 2, \dots$

Contoh:

(1) Hitunglah integral $\int_C \frac{z^3+z^2}{(z+\pi i)^3} dz$ dengan $C: z = 7e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(2) Hitunglah integral $\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$ untuk $C: |z - 3| = 2$ dengan orientasi positif

Penyelesaian:

(1) $\int_C \frac{z^3+z^2}{(z+\pi i)^3} dz$ dengan $C: z = 7e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Persamaan integral tersebut diperoleh:

$$f(z) = z^3 + z^2$$

Untuk $z_0 = -\pi i$ dan $n = 2$

maka:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z^3 + z^2}{(z + \pi i)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} \cdot f''(-\pi i) \\ &= 6\pi^2 - \pi i \end{aligned}$$

(2) $\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$ untuk $C: |z - 3| = 2$ dengan orientasi positif

Persamaan tersebut diperoleh bahwa singularitas integran hanya pada $z = 2$

Misal:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}$$

Untuk $z_0 = 2$ dan $n = 1$

maka:

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{(z-2)^2 z^3} &= \int_c \frac{\frac{1}{z^3}}{(z-2)^2} dz \\ &= 2\pi i f'(2) \\ &= -\frac{3\pi i}{8} \end{aligned}$$

Soal Latihan 5

1. Hitunglah integral sesuai lintasannya:
 - a. $f(z) = \frac{3z^4}{(z-6i)}, |z| = 10$
 - b. $f(z) = \frac{1}{z^2+4}, |z-i| = 2$
 - c. $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}, |z-i| = 2$
 - d. $f(z) = \frac{1}{(z+i)z^4}, |z-i| = \frac{3}{2}$
2. Hitunglah $\int_c \frac{dz}{z-3}$ dengan C adalah:
 - a. Lingkaran $|z| = 1$
 - b. Lingkaran $|z-i| = 4$
3. Misalkan C lingkaran $|z| = 2$ arah positif maka $\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz = \frac{\pi}{5}$, karena fungsi $f(z) = \frac{z}{(9-z^2)}$ analitik di dalam dan pada C .
Buktikan dengan menggunakan rumus integral Cauchy untuk $z = -i$ dan $f(-i) = \frac{-i}{10}$, sehingga hasil yang diinginkan = $\frac{\pi}{5}$
4. Tunjukkan bahwa bila $h(z) = \int_c \frac{2s^2-s-2}{s-z} ds, z \neq 3$ maka $h(z) = 8\pi i$ dengan C lingkaran $|z| = 3$ yang dinyatakan sebagai arah positif.
5. Tunjukkan bahwa fungsi $\int_C \frac{dz}{z^3+4z} = \frac{\pi}{2}i$ dengan C lingkaran $|z| = 1$, arah positif

6. Tentukan nilai fungsi $\int_C \frac{\sin z}{(z+\pi i)} dz$ dengan C lingkaran $|z| = 4$, arah positif
7. Tentukan nilai fungsi $\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ dengan C lingkaran $|z| = 4$, arah positif
8. Hitunglah $\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ dengan C lingkaran $|z| = 4$, arah positif
9. Hitunglah $\int_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$ dengan C lingkaran $|z - 1| = 3$, arah positif
10. Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada sebuah kurva tertutup sederhana C , dan a adalah sebarang titik di dalam C maka buktikan bahwa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

4.7. TEOREMA MORERA

Teorema Morera merupakan kebalikan dari teorema Cauchy, yaitu:

Jika $f(z)$ kontinu dalam suatu daerah terhubung sederhana \mathcal{R} dan jika $\int_C f(z) dz = 0$ di sekeliling setiap kurva tertutup sederhana C dalam \mathcal{R} maka $f(z)$ analitik dalam \mathcal{R} .

Bukti:

Apabila $\int_C f(z) dz = 0$ tidak bergantung pada C maka:

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz$$

Tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan a dan z , sepanjang lintasan itu ada di dalam \mathcal{R} , sehingga $F(z)$ analitik dalam \mathcal{R} dan:

$$F'(z) = f(z)$$

sehingga mengakibatkan $F'(z)$ juga analitik dan $f(z)$ analitik dalam \mathcal{R} .

4.8. TEOREMA KETAKSAMAAN CAUCHY

Teorema Ketaksamaan Cauchy:

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu lingkaran C yang berjari-jari r dan berpusat di $z = a$ maka:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

dengan M suatu konstanta sehingga:

$$|f(z)| < M$$

pada C yaitu M suatu batas atas dari $|f(z)|$ pada C

Bukti:

Menurut teorem Cauchy:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

karena $|z - a| = r$ pada C dan panjang C adalah $2\pi r$ maka diperoleh:

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M \cdot n!}{r^n}$$

4.9. TEOREMA LIOUVILLE

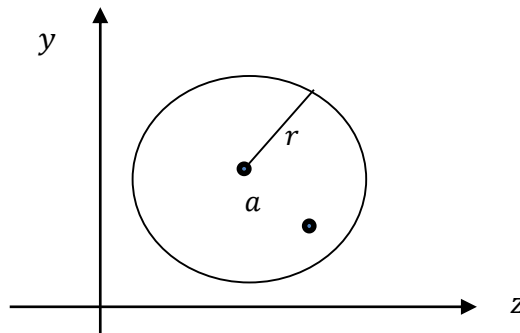
Teorema Liouville:

Untuk setiap z di dalam bidang kompleks maka:

- a. $f(z)$ analitik
- b. $f(z)$ terbatas, yaitu $|f(z)| \leq M$ untuk suatu konstanta M maka $f(z)$ harus suatu konstanta

Bukti:

Misalkan a dan b dua titik dalam bidang z dan andaikan C adalah suatu lingkaran berjari-jari r dan berpusat di a dan juga mengelilingi b yang tampak pada gambar berikut:



Menurut rumus integral Cauchy:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-b} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)} dz \end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} |z-a| &= r, |z-b| = |z-a+a-b| \geq |z-a| - |a-b| \\ &= r - |a-b| \geq \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Apabila memilih r cukup besar sehingga $|a - b| < \frac{r}{2}$ dan $|f(z)| \leq M$ serta panjang C yaitu $2\pi r$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \frac{|b - a|}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - b)(z - a)} dz \right| \leq \frac{|b - a|M(2\pi r)}{2\pi \left(\frac{r}{2}\right) r} \\ &= \frac{2|b - a|M}{r} \end{aligned}$$

Untuk $r \rightarrow \infty$ maka $|f(b) - f(a)| = 0$ atau $f(b) = f(a)$ maka hal ini menunjukkan bahwa $f(z)$ harus fungsi konstan.

Metode lain dengan memisalkan $n = 1$ ketaksamaan Cauchy, yaitu:

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M \cdot n!}{r^n}$$

sehingga diperoleh:

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$$

Untuk $r \rightarrow \infty$ maka $|f'(z)| = 0$ sehingga $f'(z) = 0$ dan $f(z) = \text{konstanta}$ (terbukti).

4.10. TEOREMA NILAI RATA-RATA GAUSS

Teorem

a Nilai Rata-Rata Gauss:

Apabila $f(z)$ analitik di dala dan pada suatu lingkaran C dengan pusat a dan jari-jari r maka $f(a)$ adalah nilai rata-rata dari $f(z)$ pada C , yaitu:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Bukti:

Menurut rumus integral Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Apabila C berjari-jari r , maka persamaan C adalah:

$$|z - a| = r$$

atau:

$$z = a + re^{i\theta}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{z - a} d\theta \\ f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

(terbukti)

4.11. TEOREMA MODULUS MAKSIMUM

Teorema Modulus Maksimum:

Apabila $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C dan tidak sama dengan konstanta maka nilai maksimum dari $|f(z)|$ terjadi pada C .

Bukti:

Menggunakan rumus bahwa:

$$|f(a)| \cong \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{1\theta})| d\theta$$

Apabila $|f(a)|$ adalah suatu maksimum maka $|f(a + re^{1\theta})| \cong |f(a)|$ dan apabila $|f(a + re^{1\theta})| < |f(a)|$ untuk suatu nilai dari θ dan kekontinuan dari f maka berlaku untuk suatu busur berhingga misalnya $\theta_1 < \theta < \theta_2$, tetapi dalam hal ini nilai rata-rata dari $|f(a + re^{1\theta})| < |f(a)|$ yang tidak sesuai dengan ketentuan, akibatnya dalam suatu lingkungan dari a yaitu $|z - a| = \delta$ dan $f(z)$ harus tercapai pada C

4.12. TEOREMA MODULUS MINIMUM

Teorema Modulus Minimum:

Apabila $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C dan $f(z) \neq 0$ di dalam C maka $|f(z)|$ mencapai nilai minimumnya pada C .

Bukti:

$f(z)$ analitik di dalam dan pada C dan juga karena $f(z) \neq 0$ di dalam C maka mengakibatkan $\frac{1}{f(z)}$ analitik di dalam C . Menurut teorema maksimum, $\frac{1}{|f(z)|}$ tidak dapat mencapai maksimumnya di dalam C

akibatnya $|f(z)|$ tidak dapat mencapai nilai minimumnya di dalam C sehingga minimum ini tercapai pada C .

Hal ini juga dapat dikatakan bahwa:

Apabila $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C dan $f(z) = 0$ pada suatu titik di dalam C maka $|f(z)|$ tidak perlu mencapai nilai minimumnya pada C

Bukti:

Misalkan $f(z) = z$ untuk $|z| \leq 1$ sehingga C adalah suatu lingkaran dengan pusat di titik asal dan berjari-jari satu maka $f(z) = 0$ di $z = 0$. Jika $z = re^{i\theta}$ maka $|f(z)|$ tampak bahwa nilai minimum $|f(z)|$ tidak tercapai pada C tetapi tercapai di dalam C pada $z = 0$

4.13. TEOREMA DASAR ALJABAR

Teorema-teorema berikut dikenal sebagai teorema dasar aljabar:

Tiap polynomial $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n, a_n \neq 0$ dan $n \geq 1$ mempunyai paling sedikit satu titik nol, yaitu terdapat paling tidak satu titik z_0 sehingga $P(z_0) = 0$

Pembuktian teorema ini melalui teorema Liouville dengan mengandaikan $P(z)$ tidak nol untuk tiap z maka fungsi $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ adalah menyeluruh dan merupakan terbatas (*bounded*) untuk semua z .

Untuk melihat bahwa fungsi itu terbatas yaitu fungsi tersebut kontinu dan oleh karenanya terbatas tiap cakram tertutup yang pusatnya titik asal, sehingga terdapatlah bilangan positif R , sehingga:

$$|f(z)| = \frac{1}{P(z)} < \frac{2}{|a_n|R^n}$$

untuk semua z di luar $|z| \leq R$, sehingga f *bounded* untuk semua nilai z . Selanjutnya dengan teorema Liouville, $f(z)$ dan akibatnya $P(z)$ merupakan fungsi konstan, padahal $P(z)$ bukan fungsi konstan maka terjadilah kontradiksi.

Teorema-teorema dasar dalam aljabar elementer biasanya tidak dibuktikan, sebagaimana teorema berikut ini bahwa *tiap polynomial derajat n , dimana $n \geq 1$, dapat dinyatakan sebagai perkalian faktor – faktor linear* yaitu:

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

dimana c dan z_k merupakan konstanta-konstanta kompleks, $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Teorema dilengkapi dengan pernyataan bahwa bila untuk bilangan $z = z_1$ ternyata $P(z_1) = 0$ maka polynomial dapat habis dibagi dengan $z - z_1$ dan dapat ditulis:

$$P(z) = (z - z_1)Q(z)$$

dimana $Q(z)$ merupakan polynomial derajat $(n - 1)$, yang pembuktiannya dapat diperoleh dari induksi matematik, sehingga akhirnya satu polynomial derajat n mempunyai tidak lebih dari n titik nol yang berbeda.

Contoh:

- (1) Tunjukkan bahwa setiap persamaan suku banyak $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, $a_n \neq 0$ dan $n \geq 1$ memiliki paling sedikit satu akar
- (2) Tunjukkan bahwa setiap persamaan suku banyak $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, $a_n \neq 0$ dan $n \geq 1$ memiliki tepat n akar.

Penyelesaian:

- (1) Jika $P(z)$ tidak memiliki akar maka $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ analitik untuk setiap z dan $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$ (terbatas dan dalam kenyataannya mendekati nol) untuk $|z| = \infty$.

Teorema Liouville mengakibatkan bahwa $f(z)$ dan $P(z)$ haruslah suatu konstanta dan ini bertentangan dengan derajat $n \geq 1$ dan $a_n \neq 0$ sehingga $P(z)$ memiliki paling sedikit satu akar atau dikatakan bahwa $P(z)$ memiliki paling sedikit satu nilai nol.

- (2) Menurut teorema dasar aljabar bahwa $P(z)$ memiliki paling sedikit satu akar dengan akarnya α maka $P(\alpha) = 0$ sehingga:

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n - (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \\ &\quad + \dots + a_n\alpha^n) \\ &= a_1(z - \alpha) + a_2(z^2 - \alpha^2) + \dots + a_n(z^n - \alpha^n) \end{aligned}$$

dengan $Q(z)$ merupakan suatu suku banyak berderajat $(n - 1)$.

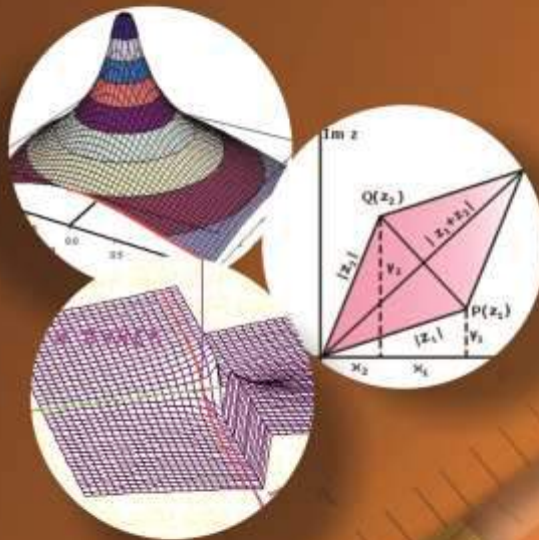
Menggunakan teorema dasar aljabar sekali lagi maka terlihat bahwa $Q(z)$ memiliki paling sedikit satu akar yang dapat dinyatakan dengan β (yang mungkin sama dengan α) maka $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)R(z)$ dan bisa dilanjutkan sehingga $P(z)$ memiliki tepat n akar.

DAFTAR PUSTAKA

- Churchilill, R.V. (1990). *Complex Variables and Applications*, 4d ed. New York: MCGraw-Hill Book Company. Inc.
- John D. Paliouras (terjemahan Wibisono Gunawan). (1987). *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga.
- Murray R. Spiegel, Ph.D. (1991). *Peubah Kompleks dengan Pengenalan Pemetaan Konvormal dan Penerapannya*. Jakarta: Erlangga.
- Rerge Lang. (1993). *Complex Analysis*. 3d ed. New York: Sringer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Slamet HW. (2006). *Teori Fungsi Variabel Kompleks*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.

Dra. Retno Marsitin, M.Pd.

FUNGSI KOMPLEKS



The Multicultural University
unikama
Universitas Kanjuruhan Malang

FUNGSI KOMPLEKS

© Yayasan Edelweis
All Right Reserved

Penulis:

Dra. Retno Marsitin, M.Pd

Desain:

Eko Fachtur Rochman, M.Kom

Editor:

Eko Fachtur Rochman, M.Kom

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan

ISBN:

978-602-14916-3-8

Cetakan 1 , Pebruari 2017

Penerbit:

Yayasan Edelweis

Jl. Karangduren Gang 10 (Perum Citra Graha
Residence Blok B7) Pakisaji Kab. Malang Kode pos 65162

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbilalamin, banyak nikmat yang Allah berikan, tetapi sedikit sekali yang kita ingat. Segala puji hanya layak untuk Allah Tuhan seru sekalian alam atas segala berkat, rahmat, taufik, serta hidayah-Nya yang tiada terkira besarnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku dengan judul "Fungsi Kompleks".

Dalam penyusunannya, penulis memperoleh banyak bantuan dari berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada: Kedua orang tua dan segenap keluarga besar penulis yang telah memberikan dukungan, kasih, dan kepercayaan yang begitu besar. Dari sanalah semua kesuksesan ini berawal, semoga semua ini bisa memberikan sedikit kebahagiaan dan menuntun pada langkah yang lebih baik lagi.

Meskipun penulis berharap isi dari buku ini bebas dari kekurangan dan kesalahan, namun selalu ada yang kurang. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Akhir kata penulis berharap agar buku ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Wassalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh

Malang, 8 Maret 2017

Penulis

TINJAUAN MATA KULIAH

Mata kuliah Fungsi Kompleks merupakan mata kuliah wajib yang ditempuh dengan bobot 3 sks. Mata kuliah Fungsi Kompleks memiliki capaian pembelajaran yaitu setelah mengikuti mata kuliah fungsi kompleks, mahasiswa diharapkan mampu menganalisa dan melakukan pembuktian matematika pada fungsi kompleks dengan cermat dan teliti.

Materi dalam fungsi kompleks meliputi pengertian bilangan kompleks, fungsi-fungsi analitik, fungsi-fungsi elementer dan integral. Setiap materi diberikan capaian pembelajaran dan contoh beserta penyelesaiannya sehingga mempermudah mahasiswa dalam memahami permasalahan Fungsi Kompleks. Matematika tak bisa lepas dari soal-soal, begitupun Fungsi Kompleks yang setiap akhir materi diberikan soal-soal sebagai latihan untuk memperdalam materi yang telah dibahas dan sebagai tolak ukur ketercapaian untuk melanjutkan pada materi berikutnya.

Semoga bahan ajar Fungsi Kompleks ini lebih mudah dipahami dan dipelajari sehingga tujuan pembelajaran bisa tercapai dan bisa menambah khasanah keilmuan mahasiswa di bidang matematika khususnya fungsi kompleks.

Malang, 8 Maret 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I BILANGAN KOMPLEKS

Capaian Pembelajaran.....	1
1.1. Bilangan Kompleks dan Aljabarnya.....	1
Soal Latihan 1.....	6
1.2. Geometri Bilangan Kompleks.....	7
1. Koordinat Cartesius.....	7
2. Vektor	9
Soal Latihan 2.....	13
3. Koordinat Kutub	14
Soal Latihan 3.....	17
4. Bentuk Eksponen.....	18
Soal Latihan 4.....	21
1.3. Region	22
Soal Latihan 5.....	29

BAB II FUNGSI – FUNGSI ANALITIK

Capaian Pembelajaran	31
2.1. Fungsi Variabel Kompleks	31
2.2. Pemetaan	34
Soal Latihan 1.....	39
2.3. Limit.....	40
Soal Latihan 2.....	48
2.4. Kontinuitas.....	50
Soal Latihan 3.....	52
2.5. Derivative.....	53
Soal Latihan 4.....	58
2.6. Persamaan Cauchy – Rienmann	60

	Soal Latihan 5.....	62
2.7.	Fungsi Analitik	63
	Soal Latihan 6.....	65
2.8.	Fungsi Harmonik.....	66
	Soal Latihan 7.....	68

BAB III FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

	Capaian Pembelajaran	71
3.1.	Fungsi Eksponen	71
	Soal Latihan 1.....	76
3.2.	Fungsi Trigonometri.....	77
	Soal Latihan 2.....	82
3.3.	Fungsi Hiperbolik	83
	Soal Latihan 3.....	86
3.4.	Fungsi Logaritma	87
	Soal Latihan 4.....	90
3.5.	Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik.....	90
	Soal Latihan 5.....	93

BAB IV INTEGRAL

	Capaian Pembelajaran	94
4.1.	Lintasan (Kurva Jordan).....	94
4.2.	Kontur.....	99
	Soal Latihan 1.....	102
4.3.	Integral Fungsi Kompleks	102
	Soal Latihan 2.....	109
4.4.	Teorema Cauchy – Goursat.....	110
	Soal Latihan 3.....	116
4.5.	Integral Tak Tentu.....	116
	Soal latihan 4.....	120
4.6.	Integral Cauchy.....	121

Soal Latihan 5	126
4.7. Teorema Morera	127
4.8. Teorema Ketaksamaan Cauchy	128
4.9. Teorema Liouville	129
4.10. Teorema Nilai Rata-Rata Gauss	131
4.11. Teorema Modulus Maksimum	132
4.12. Teorema Modulus Minimum	132
4.13. Teorema Dasar Aljabar	133
DAFTAR PUSTAKA.....	137



unikama
The Multicultural University
Universitas Kanjuruhan Malang

Jl.S.Supriadi No.48 Malang Jawa Timur, Indonesia
Phone : (+62341) 801488
Fax : (+62341) 831532
Email : email@unikama.ac.id