DASAR-DASAR KALKULUS

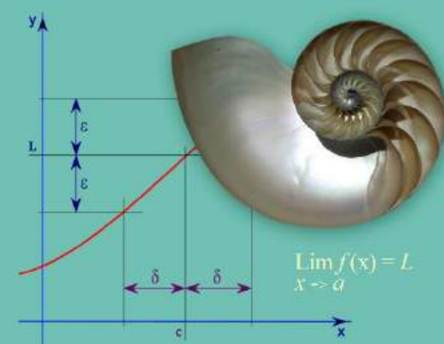
PENERBIT EDIIDE INFOGRRAFIKA
Jl. Polowijen II 421C, Blimbing, Kota Malang
Email: penerbit@edide.com
Website: www.edide.com
Telp/fax: 0341 714886

9 786239 031039

Dra. Retno Marsitin, M.Pd.
Nyamik Rahayu Sesanti, S.Pd., M.Pd.

DASAR-DASAR KALKULUS

DASAR-DASAR KALKULUS



Dra. Retno Marsitin, M.Pd.
Nyamik Rahayu Sesanti, S.Pd., M.Pd.

DASAR-DASAR KALKULUS

Dra. Retno Marsitin, M.Pd.
Nyamik Rahayu Sesanti, S.Pd., M.Pd.

DASAR-DASAR KALKULUS

© Ediide Infografika, 2019

Penulis: Retno Marsitin, Nyamik Rahayu Sesanti

Cetakan pertama, 2019
ISBN: 978-623-90310-3-9

Diterbitkan pertama kali oleh

Penerbit Ediide Infografika (Anggota IKAPI)
Jl. Polowijen II 421C, Blimbing, Kota Malang Email: penerbit@ediide.com | website: www.ediide.com | Telp/Fax: 0341-714886 | Whatsapp 081333799912

All Right Reserved. Hak Cipta Dilindungi oleh undang-undang. Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku tanpa izin tertulis dari penerbit.

PRA KATA

Syukur Alhamdulillah kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya sehingga penyusunan buku ajar Dasar-dasar Kalkulus telah terselesaikan sesuai waktu yang direncanakan. Buku ajar Dasar-dasar Kalkulus disusun untuk mempermudah mahasiswa mempelajari Kalkulus sebagai penunjang kelancaran proses pembelajaran.

Buku ajar Dasar-dasar Kalkulus berisikan teori-teori yang digunakan pada kalkulus dengan pembahasan pada limit, turunan, aplikasi turunan, integral tentu dan aplikasi integral, yang diawali dengan pembahasan bilangan real dan fungsi. Setiap pembahasan diberikan contoh-contoh soal dengan penyelesaiannya dan diakhiri dengan soal-soal sebagai latihan.

Buku ini mengacu pada sumber dalam daftar pustaka, sehingga diharapkan kritik dan saran pembaca. Buku ini jauh dari kesempurnaan, kesalahan maupun kekeliruan dalam buku ini mohon kesediaannya pembaca memberikan pembetulan dan menyampaikannya pada kami sebagai penyempurnaan buku ini.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu kelancaran penyelesaian buku ini, semoga bantuan yang telah diberikan mendapat balasan yang berlimpah dari Allah SWT. Penulis berharap buku ini memberikan manfaat dan dapat membantu mahasiswa maupun siapapun yang mempelajari matematika terutama kalkulus dalam upaya meningkatkan kualitas pendidikan.

Malang, 2 Oktober 2019

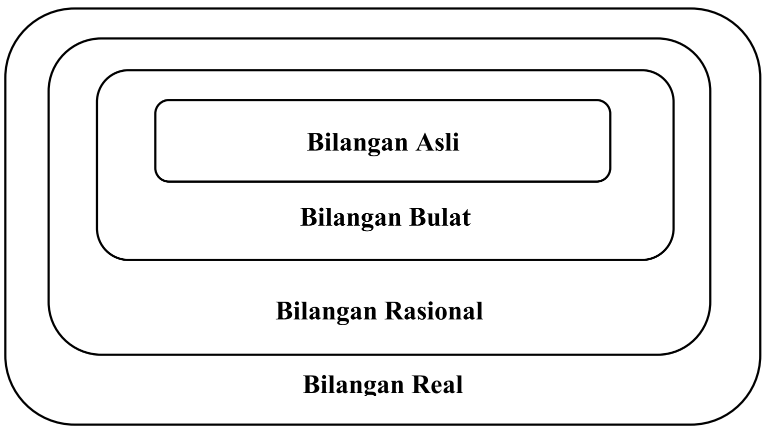
Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
BILANGAN REAL & FUNGSI

1.1. BILANGAN REAL

Bilangan real dan sifat-sifatnya merupakan dasar dari kalkulus. Bilangan real, dinotasikan dengan $\mathbb{R}$ berperanan sangat penting dalam Kalkulus. Secara geometri, bilangan real $\mathbb{R}$ dapat digambarkan sebagai garis bilangan, dinotasikan dengan $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Himpunan bagian dari garis bilangan berupa segmen garis atau interval dinotasikan dengan himpunan sebagai berikut. Hubungan antar bilangan sebagai berikut:

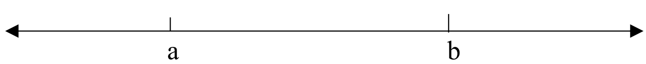


Contoh:

Manakah pernyataan berikut yang benar? Jalaskan!

1. Untuk semua x, $x^2 > 0$
2. Untuk semua x, $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$
3. Untuk setiap x, terdapat sebuah y sedemikian rupa sehingga $y > x$
4. Terdapat sebuah y sedemikian rupa sehingga, untuk semua x, $y > x$

Garis bilangan: Interval dan himpunan



$[a\,, b] = \{x|\ a \leq x \leq b\}$

$[a, b) = \{x|\ a \leq x < b\}$

$(b, \infty) = \{x|\ x > b\}$

$(-\infty, a) = \{x|\ x < a\}$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$(a, b) = \{x|\ a < x < b\}$

$(a, b] = \{x|\ a < x \leq b\}$

$[b, \infty) = \{x|\ x \geq b\}$

$(-\infty, a] = \{x|\ x \leq a\}$

1. Pertidaksamaan

Permasalahan Matematika yang berkaitan dengan interval terletak pada pertidaksamaan aljabar. Himpunan jawab atau solusi dari pertidaksamaan aljabar merupakan salah satu dari bentuk interval di atas. Adapun penjelasannya diberikan berikut. Bentuk umum pertidak samaan aljabar:

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x}$$

$A(x), B(x), C(x)\ dan\ D(x)$ merupakan suku banyak (tanda < atau $\leq, \geq, >$).

Himpunan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan disebut **himpunan penyelesaian atau solusi** pertidaksamaan.

Cara mencari solusi pertidaksamaan aljabar sebagai berikut:

a. Nyatakan pertidaksamaan tersebut sehingga didapatkan salah satu ruasnya menjadi nol

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} < 0$$

Kemudian sederhanakan bentuk ruas kiri, misal:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

b. Cari dan gambarkan pada garis bilangan semua pembuat nol dari $P(x)\ dan\ Q(x)$.

c. Tentukan setiap tanda $(+\ atau\ -)$ pada setiap interval yang terjadi dari garis bilangan di atas. Interval dengan tanda $(-)$ merupakan solusi pertidaksamaan.

Contoh:

Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan berikut:

(1) $x + 1 \geq \frac{-1}{x-1}$

(2) $\frac{x-2}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$

Penyelesaian:

(1) Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah 0 dan 1.

$$x + 1 \geq \frac{-1}{x-1}$$

$$x + 1 - \frac{-1}{x-1} > 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - \frac{-1}{x-1} > 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} > 0$$

$$\frac{x^2}{x-1} > 0$$

Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:

------ | -------- | ++++

0 1

Himpunan solusi pertidaksamaan, $\{0\} \cup (1, \infty)$

(2) Diselesaikan sendiri

2. Pertaksamaan dengan Nilai Mutlak

Secara geometris, **nilai mutlak** atau **nilai absolut** dari bilangan real x didefinisikan sebagai jarak $dari\, x\, terhadap$ 0, sehingga nilai mutlak dari setiap bilangan selalu bernilai positif. Notasi yang digunakan adalah:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat nilai mutlak:

a. $|x|^2 = x^2$ dan $|x| = \sqrt{x^2}$

b. $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$

c. $|x| > a \leftrightarrow x < -a \; atau \; x > a$

d. $|x + y| \leq |x| + |y| (\, ketidaksamaan \; segitiga \,)$

e. $|xy| = |x||y|$

f. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

g. $|x| < |y| \leftrightarrow x^2 < y^2$

Contoh:

(1) Selesaikan pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$

(2) Misalkan ε $(epsilon)$ adalah bilangan positif. Tunjukkan bahwa:

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

(3) Misalkan ε $(epsilon)$ adalah bilangan positif. Carilah bilangan positif δ $(delta)$ sedemikian hingga:

$$|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |6x - 18| < \varepsilon$$

Penyelesaian:

(1) $|3x - 5| \geq 1$, dapat ditulis sebagi berikut:

$3x - 5 \leq -1$	atau	$3x - 5 \geq 1$
$3x \leq 4$	atau	$3x \geq 6$
$x \leq \frac{4}{3}$	atau	$x \geq 2$

Himpunan penyelesaiannya adalah gabungan dua interval; yaitu $(-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, \infty)$

(2) $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$

Dalam istilah jarak, ini berarti jarak antara $x\ dan\ 2$ lebih kecil daripada $\frac{\varepsilon}{5}$ jika dan hanya jika $5x\ dan\ 10$ lebih kecil daripada ε

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

Dari kiri ke kanan (kalikan dengan 5 untuk $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$) sehingga diperoleh:

$\Leftrightarrow |5||(x - 2)| < \varepsilon$	$(|5| = 5)$
$\Leftrightarrow |5(x - 2)| < \varepsilon$	$(|a||b| = |ab|)$
$\Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$	(terbukti)

(3) $|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |6x - 18| < \varepsilon$

Dari kanan ke kiri

$\Leftrightarrow |6(x - 3)| < \varepsilon$	$(|a||b| = |ab|)$
$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}$	(kalikan dengan $\frac{1}{6}$)

Karenanya, kita pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{6}$, dengan mengikuti implikasi secara mundur, terlihat bahwa: $|x - 3| < \delta \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} \Leftrightarrow |6x - 18| < \varepsilon$

Soal latihan

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

1. $4x - 7 < 3x + 5$
2. $3 < 5x + 1 < 16$
3. $6 \leq x^{2} + x < 20$
4. $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$
5. $\frac{6}{x} - 5 + x \leq 0$
6. $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$
7. $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$
8. $|x + 1| < 4$
9. $|x - 2| < 3|x + 7|$
10. $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$

Tentukan nilai x yang mungkin agar berikut menghasilkan bilangan real:

11. $\sqrt{x^2 + x + 6}$
12. $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$
13. $|x - 3|^{2} - 4|x - 3| = 12$

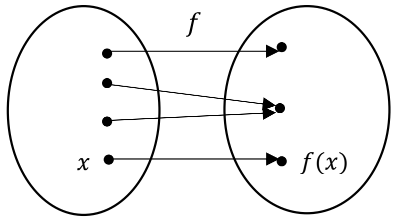
1.2. FUNGSI

Konsep fungsi merupakan konsepn yang mendasar dalam kalkulus sehinggan memiliki peranan penting dalam kalkulus.

Definisi:

Suatu fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan tiap obyek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (*domain*), dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperleh secara demikian disebut daerah hasil (*range*) fungsi.

Fungsi A



Daerah Asal Daerah Hasil

Untuk menyebutkan suatu fungsi secara lengkap maka harus dinyatakan sesuai aturan korespondensi daerah asal fungsi tersebut.

1. Notasi fungsi

Suatu fungsi diberikan notasi dengan sebuah huruf tunggal, misalnya $f\ atau\ g\ atau\ F$, sehingga dalam bentuk $f(x) atau\ g(x) atau\ F(x)$ yaitu:

$$f: A \to B$$
$$x \to f(x) = y$$

Himpunan A disebut **Daerah asal (*Domain*)** dari $f(x)$, dinotasikan D_f, sedangkan untuk $\{y|f(x) = y\ , x \in A\} \subseteq B$ disebut **Daerah hasil (*Range*)** dari $f(x)$ dinotasikan R_f. Aturan korespondensi bersama daerah asal menentukan daerah hasil.

Apabila suatu fungsi daerah asal tidak disebutkan maka dianggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan bilangan real yang terbesar, sehingga aturan fungsi memiliki makna. Hal ini disebut **daerah asal alami (natural domain)**. Bilangan yang seharusnya diingat untuk dikecualikan dari daerah asla alami yaitu nilai-nilai yang menyebabkan pembagian oleh nol atau akar kuadrat dari bilangan negatif.

Suatu fungsi dengan aturan yang diberikan dalam persamaan berbentuk: $y = f(x)$,
maka: x disebut variabel bebas dan y disebut variabel tak bebas

Sebarang elemen dari daerah asal boleh dipilih sebagai nilai dari variabel bebas x. Nilai x yang terpilih tersebut menentukan nilai korespondensi dari variabel tak bebas y.

Contoh:

(1) Tentukan daerah hasil dari $f(x) = x^2 + 1$, dengan daerah asal adalah $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(2) Tentukan daerah asal alami untuk:

a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

b. $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

c. $h(w) = \frac{1}{\sqrt{9-w^2}}$

Penyelesaian:

(1) $f(x) = x^2 + 1$, dengan daerah asal adalah $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

maka: daerah hasilnya adalah $\{1, 2, 5, 10\}$

(2) Daerah asal:

a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Syarat pembagian yaitu penyebut **tidak boleh nol**, maka:

$$x - 3 \neq 0 \longrightarrow x \neq 3$$

Jadi daerah asal alami yaitu $\{x: x \neq 3\}$

b. $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

Syarat akar kuadrat yaitu akar kuadrat **tidak boleh negatif**, maka:

$$9 - t^2 \geq 0 \longrightarrow |t| \leq 3$$

Jadi daerah asal alami yaitu $\{t: |t| \leq 3\}$ dapat dituliskan dengan notasi interval yaitu: $[-3, 3]$

c. $h(w) = \frac{1}{\sqrt{9-w^2}}$

Syarat pembagian yaitu penyebut tidak boleh nol dan akar kuadrat yaitu akar kuadrat tidak boleh negatif, maka:

$9 - w^2 \geq 0 \longrightarrow |w| \leq 3$ dan $9 - w^2 \neq 0 \longrightarrow w \neq -3, w \neq 3$

Jadi daerah asal alami yaitu mengecualikan $-3\ dan\ 3$, dapat dituliskan dengan notasi interval yaitu $(-3, 3)$.

2. Grafik Fungsi

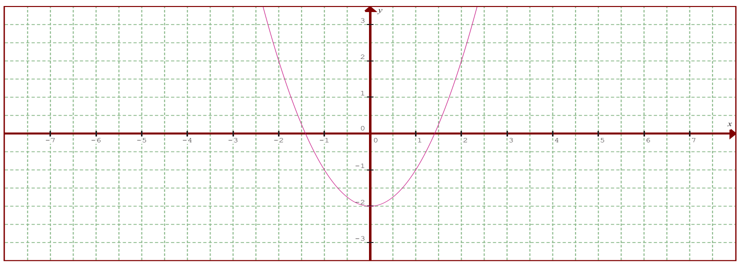
Jika daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan bilangan real maka kita dapat membayangkan fungsi tersebut dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat, dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$

Contoh:

(1) $f(x) = x^2 - 2$

Daerah asal adalah semua bilangan real

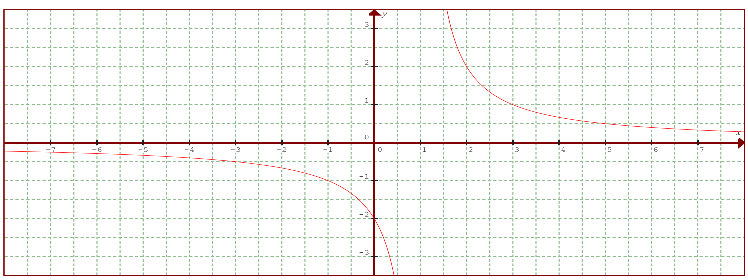
maka: daerah hasilnya adalah $\{y: y \geq -2\}$



(2) $g(x) = \frac{2}{x-1}$

Daerah asal adalah $\{x: x \neq 1\}$

maka: daerh hasilnya adalah $\{y: y \neq 0\}$



Beberapa macam fungsi dan sifat-sifat yang dimiliki akan dibahas berikut.

(1) Fungsi Genap dan Ganjil

Fungsi $f(x)$ disebut **fungsi genap** bila $f(x) = f(-x)$ untuk setiap x di domain $f(x)$ (grafik f(x) simetris terhadap sumbu y). Fungsi $f(x)$ disebut **fungsi ganjil** bila $f(x) = -f(-x)$ untuk setiap x di domain $f(x)$ (grafik $f(x)$ simetris terhadap titik pusat atau pusat sumbu). Bila suatu fungsi bukan merupakan fungsi genap maka belum tentu merupakan fungsi ganjil.

Contoh:

(1) Manakah diantara fungsi berikut yang merupakan fungsi genap, ganjil atau bukan keduanya:

a. $f(x) = x^2 - 2$

b. $f(x) = \frac{x^2-2}{x}$

c. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(2) Apakah $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4}$ termasuk fungsi genap, ganil atau tidak satupun?

Penyelesaian:

(1) Untuk fungsi:

a. $f(x) = x^2 - 2$

Termasuk fungsi genap sebab $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$

b. $f(x) = \frac{x^2-2}{x}$

Termasuk fungsi ganjil sebab $f(-x) = \frac{(-x)^2-2}{-x} = \frac{x^2-2}{x} = -f(x)$

c. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Bukan keduanya

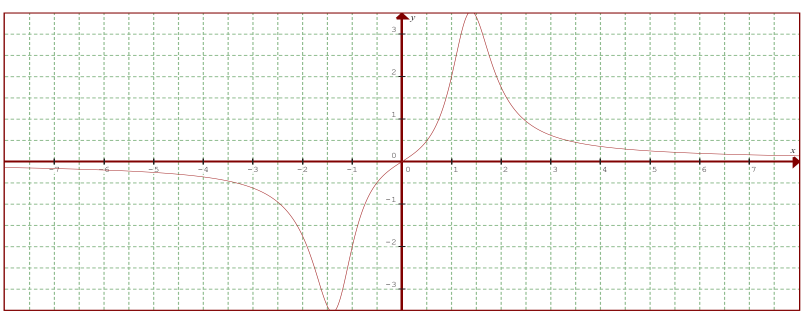
(2) $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4}$

karena

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4} = -f(x)$$

maka: f adalah fungsi ganjil.

Grafik $y = f(x)$ simetri terhadap titik asal

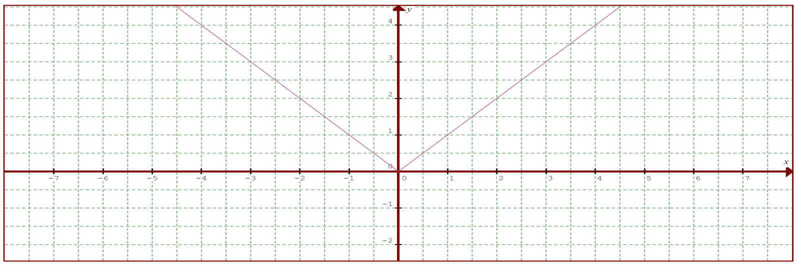


(2) Fungsi Nilai Mutlak

Diantara fungsi yang sering digunakan yaitu fungsi nilai mutlak dengan $|x|$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$|x| = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ -x, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

Fungsi nilai mutlak adalah genap karena $|-x| = |x|$, dengan grafik sebagai berikut:



Bentuk dasar fungsi bernilai mutlak dinyatakan oleh $f(x) = |x|$ dan grafik fungsi $f(x)$ simetris terhadap sumbu Y dan terletak di atasdan atau pada sumbu X.

Secara umum fungsi bernilai mutlak dapat dinyatakan oleh:

$$f(x) = g(|x|) = \begin{cases} g(x), & jika\ x \in A \\ \\ -g(x), & jika\ x \in A^c \end{cases} \quad ; dengan\ D_f = A \cup A^c$$

Contoh:

Tentukan nilai x agar grafik fungsi $f\ (x) = |x^2 + 1|$ yang terletak di bawah garis $y = 2$.

Penyelesaian:

Dicari nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $(x) = |x^2 + 1| < 2$.

Menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak:

$$|x^2 + 1| < 2 \iff (x^2 + 1)^2 < 4$$

diperoleh:

$$(x^2 + 1)^2 - 4 < 0$$

$$(x^2 + 3)(x^2 - 1) < 0$$

Jadi nilai x yang memenuhi adalah – $1 < x < 1\ atau\ |x| < 1$.

(3) Fungsi Banyak Aturan

Fungsi ini merupakan bentuk pengembangan dari fungsi bernilai mutlak dan untuk fungsi dengan dua aturan yang dinyatakan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & jika\ x \in A \\ \\ f_2(x), & jika\ x \in A^c \end{cases} \quad ; dengan\ D_f = A \cup A^c$$

Fungsi banyak aturan dapat dikembangkan sampai n buah fungsi $f_j(x)$ dengan ketentuan $j = 1,2, \dots, n$.

(4) Fungsi Polinom

Bentuk umum fungsi polinom **order** atau **pangkat** n (n bilangan bulat positif) dinyatakan:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ \ dengan\ a_n \neq 0$$

Bentuk khusus dari fungsi polinom, yaitu:

a. Fungsi Konstan: $f(x) = a_0$
b. Fungsi Linear: $f(x) = a_0 + a_1x$ ($f(x) = x$ merupakan fungsi identitas)
c. Fungsi Kuadrat: $f\ (x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Misal $f(x)$ merupakan fungsi polinom order n maka mempunyai paling banyak n buah pembuat nol yang berbeda. Untuk mendapatkan pembuat nol fungsi polinom dapat digunakan **aturan Horner**.

(5) Fungsi Rasional

Bentuk umum fungsi rasional adalah:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

dengan $p(x)\ dan\ q(x)$ merupakan **fungsi polinom**.

Fungsi rasional $f(x)$ tidak terdefinisi pada nilai x yang menyebabkan penyebut sama dengan nol atau q(x) = 0, sedangkan pembuat nol dari pembilang atau $p(x)$ tetapi bukan pembuat nol penyebut merupakan pembuat nol dari fungsi rasional $f(x)$.

Contoh: Tentukan nilai x yang menyebabkan fungsi $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

Penyelesaian: Pembuat nol pembilang yaitu $x = 2\ dan\ x = 1$.

Pembuat nol penyebut yaitu $x = -2\ dan\ x = 2$.

Jadi nilai x yang memenuhi adalah $x = -2$

(6) Fungsi Trigonometri

Bentuk dasar dari fungsi trigonometri diberikan berikut

a. $f(x) = sin\ x$; $f(x) = csc\ x$

b. $f(x) = cos\ x$; $f(x) = sec\ x$

c. $f(x) = tan\ x$; $f(x) = cot\ x$

Beberapa persamaan atau identitas yang berlaku pada fungsi trigonometri diberikan:

a. $sin\ (-x) = -\ sin\ x$

b. $cos\ (-x) = cos\ x$

c. $tan\ (-x) = -\ tan\ x$

d. $csc\ (-x) = -\ csc\ x$

e. $sec\ (-x) = sec\ x$

f. $cot\ (-x) = cot\ x$

g. $sin\ (\frac{\pi}{2} - x) = cos\ x$

h. $cos\ (\frac{\pi}{2} - x) = sin\ x$

i. $tan\ (\frac{\pi}{2} - x) = cot\ x$

j. $sin\ (x + y) = sin\ x\ cos\ y + sin\ y\ cos\ x$

k. $cos\ (x + y) = cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y$

l. $sin\ (x - y) = sin\ x\ cos\ y - sin\ y\ cos\ x$

m. $cos\ (x - y) = cos\ x\ cos\ y + sin\ x\ sin\ y$

n. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$

o. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$

p. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

q. $\cos 2x = 2\ cos^2 x - 1 = 1 - 2\ sin^2 x$

ρ. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - tan^2 x}$

s. $sin^2 x + cos^2 x = 1$

t. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

u. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

v. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

w. $\sin x \sin y = \frac{\cos (x-y) - \cos (x+y)}{2}$

x. $\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$

y. $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

(7) Fungsi Periodik

Fungsi $f(x)$ disebut **fungsi periodik** jika ada bilangan real positif p sehingga berlaku $f(x+p) = f(x)$ untuk setiap x pada domain $f(x)$. Nilai p terkecil disebut **periode** dari $f(x)$.

Fungsi dasar trigonometri merupakan fungsi periodik dengan periode,

a. $f(x) = sin\ x = sin\ (x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$
b. $f(x) = cos\ x = cos\ (x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$
c. $f(x) = tan\ x = tan\ (x + \pi) = f(x + \pi)$

(8) Translasi (Pergeseran)

Bila grafik fungsi $f(x)$ digeser ke kanan (searah atau sejajar sumbu x) sepanjang k maka hasil pergeseran merupakan grafik dari fungsi $f(x-k)$. Bila grafik fungsi $f(x)$ digeser ke atas (searah atau sejajar sumbu y) sepanjang a maka hasil pergeseran merupakan grafik fungsi $f(x) + a$.

(9) Fungsi Komposisi

Komposisi dari fungsi $f(x)\ dan\ g(x)$ didefinisikan sebagai:

$$(g\ o\ f\ )\ (x)\ =\ g(f(x))$$

Sebagai catatan bahwa tidak semua fungsi dapat dilakukan komposisi. Agar dapat dilakukan komposisi antara fungsi $f\ dan\ g\ yaitu\ g\ o\ f$ maka syarat yang harus dipenuhi adalah: $R_f \cap D_g \neq 0$

Contoh:

Diketahui fungsi: $f(x) = \sqrt{1-x}$ dan $g(x) = \frac{x}{1-x}$

a. Tentukan domain dan range dari fungsi $f(x)\ dan\ g(x)$.
b. Apakah $g \circ f$ terdefinisi? Bila ya tentukan rumusannya.
c. Apakah $f \circ g$ terdefinisi? Bila ya, tentukan rumusannya.

Penyelesaian:

a. Domain adalah $D_f = (-\infty, 1);\ D_g = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

   Range adalah $R_g = \mathbb{R}$

b. Sebab $R_f \cap D_g = (1, \infty)$ maka $g \circ f$ terdefinisi dan rumusannya yaitu:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{1-x}\big) = \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$$

c. Sebab $R_f \cap D_f = (-\infty, 1)$ maka $g \circ f$ terdefinisi dan rumusannya yaitu:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) = \sqrt{1 - \frac{x}{1-x}}$$

Sifat-sifat:

1. $f \circ g \neq f \circ g$
2. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h\ )$
3. $D_{g \circ f} \subseteq D_f\ dan\ D_g \subseteq R_f$
4. $Bila\ D_g = D_f\ maka\ \ D_{g \circ f} = D_f$

Soal Latihan:

1. Diketahui: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & jika\ x > 3 \\ 2x, & jika\ x \leq 3 \end{cases}$

   Tentukan nilai dari:

   a. $f(-4)$
   b. $f(0)$
   c. $f(t^2 + 5)$

2. Nyatakan fungsi berikut tidak dalam nilai mutlak:

   a. $f(x) = |x| + |3x + 1|$
   b. $f(x) = 3 + |2x - 5|$
   c. $f(x\ ) = 3\ |x - 2|\ - |x + 1|$

3. Tentukan domain dan range dari:

   a. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$
   b. $g(x) = \frac{1}{4x-1}$
   c. $h(x) = \sqrt{(x + 1)^{-1}}$

d. $f(t) = t^{\frac{2}{3}} - 4$

e. $g(u) = |2u + 3|$

f. $h(x) = -\sqrt{625 - y^4}$

g. $f(x) = \frac{\cos(x+1)}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

4. Gambarkan grafik dari fungsi berikut:

a. $f(x) = x^2 - 1$

b. $f(x) = (x-2)^2$

c. $f(x) = (x-2)^2 - 1$

d. $f(x) = [x-2] + 2$

5. Tentukan $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, domain dan range bila terdefinisi dari:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$

b. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ dan $g(x) = 1 - x^2$

Type equation here.c. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ dan $g(x) = x^2$

d. $f(x) = \sqrt{x - 4}$ dan $g(x) = |x|$

6. Hitung $(f \circ g)(x)$ bila $f(x) = \begin{cases} 5x, \ x \leq 0 \\ -x, \ 0 < x \leq 8; g(x) = x^3 \\ \sqrt{x}, \ x > 8 \end{cases}$

7. Tentukan $f(x)$, bila:

a. $f(x) = x^2 + 3x + 5$

b. $f(3x) = \frac{x}{x^2+1}$

c. $g(x) = 2x - 1 \ dan \ (g \circ f)(x) = x^2$

d. $g(x) = \sqrt{x + 5} \ dan \ (g \circ f)(x) = 3|x|$

e. $g(x) = \sqrt{x + 5} \ dan \ (f \circ g)(x) = \frac{1}{x}\sqrt{4 - x^2}$

f. $g(x) = x^2 \ dan \ (f \circ g)(x) = ax^2 + b$

BAB II
LIMIT

2.1. Pengertian Limit

Konsep limit dapat dipahami melalui pertanyaan, misalnya: Apa yang terjadi pada fungsi $f(x)$ ketika x semakin mendekati suatu konstanta c? Pengertian limit dengan definisi limit secara intuisi dan definisi limit dengan limit kiri dan kanan, sebagai berikut:

1. **Limit secara intuisi**

Definisi limit secara intuisi:

> Untuk menyatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat tetapi berlainan dari c maka $f(x)$ dekat dengan L.

Pemikiran tentang limit selalu dihubungkan dengan kata ***dekat***.

Pernyataan fungsi di dekat c bukan berarti berada di c.

Contoh:

(1) Tentukan $\lim_{x \to 3} 4x - 5$

(2) Tentukan $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

(3) Tentukan $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Penyelesaian:

(1) $\lim_{x \to 3} 4x - 5 = 7$

(2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+2) = 3 + 2 = 5$

Pencoretan $x - 3$ dalam langkah kedua diperbolehkan karena definisi limit mengabaikan saat tepat di $x - 3$. Ingat bahwa $\frac{x-3}{x-3} = 1$ selama $x \neq 3$.

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Soal latihan:

1. Tentukan limit:

    a. $\lim_{x \to 3}(x^2 + 2x - 1)$

    b. $\lim_{t \to -1} t^2 - 1$

c. $\lim_{t \to -1} t^2 - x^2$

d. $\lim_{t \to -1} 1 - 2t$

2. Tentukan limit dengan penyelesaian aljabar:

a. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

b. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x+1}$

c. $\lim_{t \to -7} \frac{t^2+4t-21}{t+7}$

d. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

e. $\lim_{x \to 0} \frac{x^4+2x^3-x^2}{x^2}$

f. $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{(x-7)^3}}{x-7}$

g. $\lim_{u \to 1} \frac{(3u+4)(2u-2)^3}{(u-1)^2}$

h. $\lim_{x \to t} \frac{x^2-t^2}{x+t}$

i. $\lim_{x \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

j. $\lim_{x \to 3} \frac{x^4-18x^2+81}{(x-3)^2}$

2. Limit Kiri & Limit Kanan

Definisi Limit Kiri dan Limit Kanan:

Untuk menyatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah **kanan** c, maka $f(x)\ dekat\ ke - L$. Demikian pula untuk menyatakan bahwa $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah **kiri** c, maka $f(x)\ dekat\ ke - L$

Definisi tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut:

(1) Bila nilai $f(x)$ mendekati L untuk nilai x mendekati c dari arah kanan maka dikatakan bahwa limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c dari kanan sama dengan L dan dinotasikan:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

(2) Bila nilai $f(x)$ mendekati L untuk nilai x mendekati c dari arah kiri maka dikatakan bahwa limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c dari arah kiri sama dengan L dan dinotasikan:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

(3) Bila $L = 1$ maka dikatakan bahwa limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L dan dinotasikan:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

(4) Bila $L \neq 1$ maka dikatakan bahwa limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c tidak ada.

Bentuk (1) dan (2) disebut **limit sepihak (limit kiri dan limit kanan)**, sedangkan bentuk (3) mengisyaratkan bahwa nilai limit fungsi pada suatu titik dikatakan ada bila nilai limit sepihaknya sama atau nilai limit kanan (1) sama dengan nilai limit kiri (2).

Contoh:

Selesaikan limit fungsi bila ada untuk $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$

(1) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(2) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

(3) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Penyelesaian:

Limit fungsi tersebut:

(1) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$

(2) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \cdot 1 = 2$

(3) Sebab limit kiri sama dengan limit kanan maka limit fungsi ada dan $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

Soal latihan:

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{3}+x}{x}$
2. $\lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$
3. Selesaikan $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

2.2. Teorema Limit

Teorema limit meliputi:

1. Teorema A (Teorema Limit Utama)

Misalkan n bilangan positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c.

(a) $\lim\limits_{x \to c} k = k$

(b) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

(c) $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(f) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(g) $\lim\limits_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq 0$

(h) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$

(i) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ ketika n genap

2. Penerapan Teorema Limit Utama

Contoh:

(1) Tentukan nilai limit:

a. $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$

b. $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$

c. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

(2) Apabila $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ dan $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 8$ maka tentukan: $\lim\limits_{x \to 3} \left[f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}\right]$

Penyelesaian:

(1) Untuk nilai limit:

a. $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4 = 2 \lim\limits_{x \to 3} x^4 = 2\left[\lim\limits_{x \to 3} x\right]^4 = 2(3)^4 = 162$

b. $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to 4} (3x^2) - \lim\limits_{x \to 4} (2x) = 3 \lim\limits_{x \to 4} (x^2) - 2 \lim\limits_{x \to 4} (x)$

$$= 3\left(\lim_{x \to 4} (x)\right)^2 - 2 \lim_{x \to 4} (x) = 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

c. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4}x}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{4}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}=\frac{1}{4}\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}x^2+\lim\limits_{x\to 4}9}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x\to 4}x^2+9}=\frac{1}{4}\sqrt{4^2+9}=\frac{5}{4}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\left[f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}\right]=\lim\limits_{x\to 3}f^2(x)\cdot\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to 3}f(x)\right]^2\cdot\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)}$

$$=(4)^2\cdot\sqrt[3]{8}=32$$

3. Teorema B (Teorema Substitusi)

Jika f fungsi polynomial atau fungsi rasional maka:

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c),\ \text{ asalkan } f(c) \text{ terdifinisi}$$

Dalam kasus fungsi rasional,memiliki makna yaitu nilai penyebut pada $c\neq 0$

Perhatikan, bahwa pada teorema B diperbolehkan untuk menentukan limit-limit fungsi-fungsi polynomial dan rasional cukup dengan hanya mensubstisusikan c untuk x, asalkan penyebut dari fungsi rasional tidak nol pada c.

Contoh:

Tentukan $\lim\limits_{x\to 2}\frac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x+8}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2}\frac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x+8}=\frac{7(2)^5-10(2)^4-13(2)+6}{3(2)^2-6(2)+8}=-\frac{11}{2}$$

4. Teorema C

Apabila $f(x)=g(x)$ untuk semua x di dalam suatu interval terbuka yang mengandung bilangan c, terkecuali mungkin pada bilangan c sendiri, dan jika $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ ada, maka $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ ada, sehingga:

$$\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)$$

Contoh:

(1) Tentukan $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(2) Tentukan $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$

Penyelesaian:

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x}+1\right) = \sqrt{1}+1 = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+5}{x+3} = \frac{7}{5}$

Langkah yang kedua dibenarkan sesuai teorema C karena $\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$ untuk semua x kecuali pada $x = 2$ dan menerapkan teorema B untuk menghitung hasil akhir dengan substitusi.

5. Teorema D (Teorema APIT/Squeeze Theorem)

Misalkan $f, g\ dan\ h$ merupakan fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, terkecuali mungkin pada c, sehingga:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,\ \ maka\ \lim_{x\to c} g(x) = L$$

Contoh:

Asumsikan bahwa telah terbukti bahwa $\frac{1-x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ untuk semua x yang dekat tetapi berlainan dengan 0, maka apa yang dapat disimpulkan tentang $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$?

Penyelesaian:

Misalkan $\frac{1-x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{6}, \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad h(x) = 1$$

maka dapat diperoleh:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1 \end{array}\right\} \text{ akibatnya } \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

sehingga dengan teorema C:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Soal Latihan:

1. Tentukan nilai limit dengan menggunakan alasan pada teorema:
   a. $\lim_{x \to 0}[(2x+1)(x-3)]$
   b. $\lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{5-3x}$
   c. $\lim_{x \to 3} \sqrt{3x-5}$
2. Tentukan nilai limit dengan langkah aljabarnya:
   a. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+4}$
   b. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-2x-3}{x+1}$
   c. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+4x^2-19x+14}$
   d. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
   e. $\lim_{u \to -2} \frac{u^2-ux+2u-2x}{u^2-u-6}$
   f. $\lim_{x \to \pi} \frac{2x^2-6x\pi+4\pi^2}{x^2-\pi^2}$
3. Apabila $\lim_{x \to a} f(x) = 3$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = -1$ maka tentuka nilai limit:
   a. $\lim_{x \to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$
   b. $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{g(x)}\,[f(x)+3]$
   c. $\lim_{x \to a}[f(x) + |3g(x)|]^3$

2.3. Limit Fungsi Trigonometri

Limit fungsi trigonometri meliputi:

1. Teorema A (Teorema Limit Fungsi Trigonometri)

Untuk setiap bilangan real c di dalam daerah asal fungsi:

a. $\lim_{t \to c} \sin t = \sin c$

b. $\lim_{t \to c} \cos t = \cos c$

c. $\lim_{t \to c} \tan t = \tan c$

d. $\lim_{t \to c} \cot t = \cot c$

e. $\lim_{t \to c} \sec t = \sec c$

f. $\lim_{t \to c} \csc t = \csc c$

Contoh:

Tentukan $\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1}$

Penyelesaian:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t+1}\right)\left(\lim_{t\to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

2. Teorema B (Teorema Limit Trigonometri Khusus)

a. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

b. $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

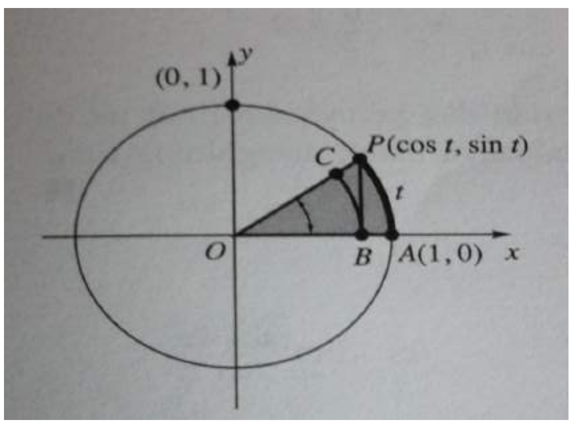
Pembuktian:

a. Pada teorema A trigonometri diperoleh:

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{t\to 0} \sin t = 0$$

untuk $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, t \ne 0$ (Ingat, tidak peduli apa yang terjadi di $t = 0$).

Perhatikan ruas garis tegak BP dan busur lingkaran BC yang tampak pada gambar berikut:



Pada gambar tersebut tampak bahwa apabila $t < 0$ maka pikirkan daerah arsir yang dicerminkan terhadap sumbu x

Selain itu, terlihat jelas bahwa:

$$luas\ (sektor\ OBC) \le luas\ (\Delta\ OBP) \le luas\ (sektor\ OAP)$$

Luas segitiga adalah setengah alas dikalikan tinggi. Luas sektor lingkaran dengan sudut pusat t dan jari-jari r adalah:

$$\frac{1}{2}r^2|t|$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{2}(\cos t)^2\,|t| \le \frac{1}{2}\cos t\,|\sin t| \le \frac{1}{2}1^2|t|$$

setelah dikalikan 2 dan dibagi bilangan positif $|t|\cos t$ maka diperoleh:

$$\cos t \le \frac{|\sin t|}{|t|} \le \frac{1}{\cos t}$$

karena $\frac{\sin t}{t}$ positif untuk $\frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\ dengan\ t \ne 0$ dan terdapat sifat bahwa $\frac{|\sin t|}{|t|} = \frac{(\sin t)}{t}$ sehingga diperoleh:

$$\cos t \le \frac{(\sin t)}{t} \le \frac{1}{\cos t}$$

Penyelesaian dengan limit dengan menggunakan teorema Apit, sehingga diperoleh:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

b. Mengalikan pembilang dan penyebut dengan $1 + \cos t$, yaitu:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}$$

$$= \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{\lim\limits_{t\to 0}\,(1+\cos t)}$$

$$= 1\cdot\frac{0}{2} = 0$$

2.4. Limit di Tak-hingga dan Limit Tak-berhingga

Matematika tidak pernah menyatakan ∞ sebagai bilangan, misalnya tidak pernah menambahkan maupun membaginya dengan bilangan. Penggunaan lambing $\infty\ dan - \infty$ tetap tidak menyatakan bilangan. Misalkan ada fungsi $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Apa yang terjadi pada $g(x)$ ketika x menjadi semakin besar? (dapat dituliskan $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}$)

Ketika $x \to \infty$ tidak dinyatakan secara langsung bahwa di suatu tempat yang jauh, jauh ke kanan pada sumbu $-x$ terdapat sebuah bilangan (lebih besar dari sebuah bilangan) yang didekati oleh x. Digunakan $x \to \infty$ sebagai cara singkat untuk menyatakan bahwa x menjadi semakin besar tanpa batas.

x	10	100	1000	10000	∞
$\dfrac{x}{1+x^2}$	0,099	0,010	0,001	0,0001	**?**

Dari tabel tersebut tampak bahwa $g(x)$ menjadi semakin kecil ketika x semakin besar, sehingga bisa dituliskan:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

2.4.1. Limit di Tak-hingga

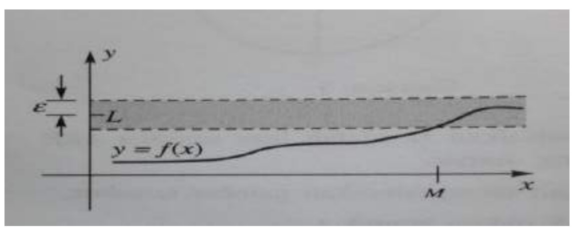
Definisi:

a. Limit ketika $x \to \infty$

Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty]$ untuk suatu bilangan c. Dikatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ apabila untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian rupa sehingga:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ada ketergantungan M pada ε, maka akan semakin besar M yang tampak terlihat pada gambar berikut:



b. Limit ketika $x \to -\infty$

Misalkan f terdefinisi pada $[-\infty, c]$ untuk suatu bilangan c. Dikatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ apabila untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian rupa sehingga:

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh:

(1) Tunjukan bahwa: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

(2) Tentukan nilai: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = 0$

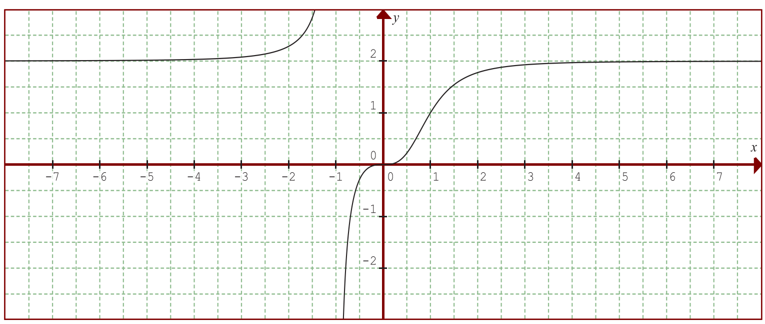
Penyelesaian:

(1) Digunakan cara biasa dengan membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat x tertinggi yang muncul di penyebut yaitu: x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty} 1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0$$

(2) Grafik $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^3}$ tampak pada gambar berikut:

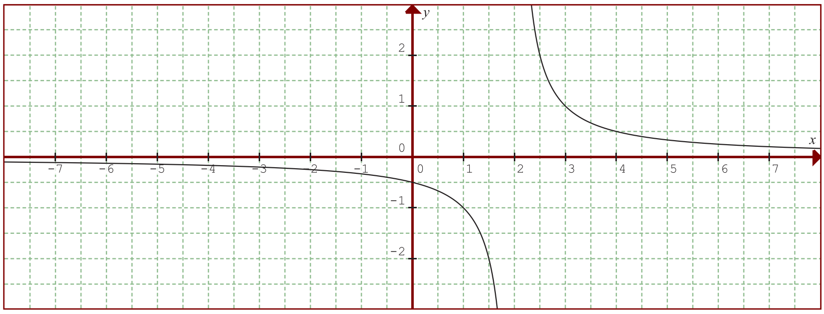


Untuk mencari limit dengan membagi pembilang dan penyebut dengan x^3, sehingga diperoleh:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

2.4.2. Limit Tak-berhingga

Fungsi $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$, ketika x menjadi deket ke 2 dari kiri tampak fungsi mengecil tanpa batas. Identik ketika x menjadi deket ke 2 dari kanan tampak fungsi membesar tanpa batas yang terlihat pada gambar berikut:



Fungsi $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)}$ dengan arah dari kiri kanan, bisa dituliskan sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty \quad dan \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)} = \infty$$

Definisi:

Dikatakan

$$\lim_{x \to c^+} \frac{1}{(x-2)} = \infty$$

Apabila untuk maisng-masing bilangan positif M berpadanan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga:

$$0 < x - c < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

Dengan kata lain $f(x)$ dpat dibuat sebesar yang diinginkan (lebih besar daripada sebarang M yang dipilih) dengan mengambil x cukup dekat tetapi di kanan c.

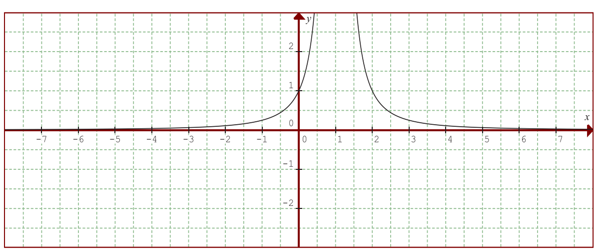
Contoh:

(1) Tentukan $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}$ $\quad dan \quad$ $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$

(2) Tentukan $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$

Penyelesaian:

(1) Grafik $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ tampak pada gambar berikut:



Ketika $x \to 1^+$ maka penyebut tetap positif tetapi menuju nol, sedangkan pembilang adalah 1 untuk semua x. Hasil bagi $\frac{1}{(x-1)^2}$ dapat dibuang sebarang besar dengan cara membatasi x berada dekat tetapi di kanan 1.

Ketika $x \to 1^-$ maka penyebut positif dan dapat dibuat sebarang dekat ke 0, sehingga $\frac{1}{(x-1)^2}$dapat dibuat sebarang besar dengan cara membatasi x berada dekat tetapi di kiri 1.

Dengan demikian, dapat disimpulkan:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \quad dan \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

kerena kedua limit adalah ∞ maka dapat dituliskan:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

(2) Untuk memperoleh nilai limit:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

Ketika $x \to 2^+$ maka tampak bahwa:

$$x+1 \to 3, x-3 \to -1, dan\ x-2 \to 0^+$$

Sehingga pembilang mendekati 3 tetapi penyebut negatif dan mendekati 0 dan disimpulkan:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = -\infty$$

2.4.3. Limit Barisan

Daerah asal untuk beberapa fungsi yaitu himpunan bilangan asli, dan umumnya untuk menyatakan suku $ke-n$ dalam seluruh barisan dituliskan dalam bentuk a_n atau $\{a_n\}$.

Contoh:

Barisan suku $ke-n$ yaitu $a_n = \frac{n}{(n+1)}$

Saat n semakin menjadi besar maka:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, \ldots, a_{100} = \frac{100}{101}$$

Tampak terlihat bahwa nilai-nilai tersebut mendekati 1, sehingga bisa dikatakan bahwa barisan tersebut adalah:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Definisi:

Misalkan a_n terdefinisi untuk semua bilangan asli yang lebih besar daripada atau sama dengan suatu bilangan c, dapat dikatakan bahwa:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

jika untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian rupa sehingga:

$$n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Definisi tersebut hamper identik dengan:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Perbedaannya pada syarat bahwa argument fungsi adalah bilangan asli dan teorema limit berlaku untuk barisan

Contoh:

Tentukan $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$

Penyelesaian:

Dengan menerapkan teorema limit maka:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Soal latihan:

Tentukan nilai limit:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-5}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{t^2}{7-t^2}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3-100x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-x^2}{\pi x^3-5x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\sqrt{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+4}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5})$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^3+1}{x^2-2x+2}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

13. $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x}{x-4}$

14. $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2}{9-x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

16. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

17. $\lim\limits_{\theta\to \pi^+} \frac{\theta^2}{\sin\theta}$

18. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\pi\theta}{\cos\theta}$

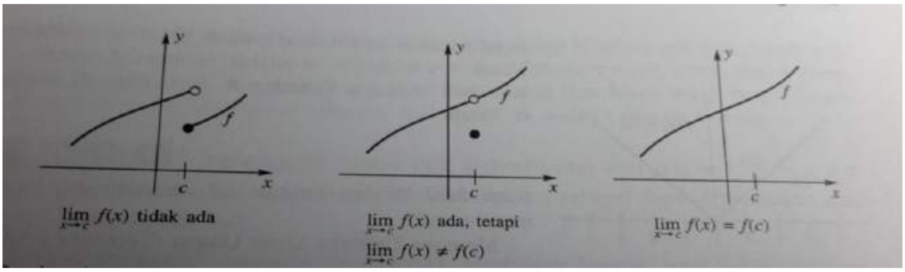
19. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[|x|]}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1+\cos x}{\sin x}$

2.5. Kontinuitas Fungsi

Kata kontinu dalam matematika untuk menyatakan suatu proses yang berkelanjutan tanpa perbuahan yang mendadak.

Perhatikan grafik berikut:



Keterangan:

Pada dua grafik pertama $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, atau ada tetapi tidak sama dengan $f(c)$ dan hanya dakam grafik ketiga $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Definisi kontinuitas di satu titik:

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval terbuka mengandung c.

Dikatakan bahwa f **kontinu** di c apabila:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu** pada suatu titik $x = c$ bila nilai limit $f(x)$ pada x mendekati c sama dengan nilai fungsi di $x = c\ atau\ f(c)$. Secara lebih jelas, $f(x)$ dikatakan kontinu di $x = c$ bila berlaku:

1. $f(c)$ ada, terdefinisi atau $f(c) \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, yaitu $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga syarat tersebut tidak terpenuhi maka f **diskontinu** di c. Jadi fungsi yang diwakili grafik yang pertama dan kedua di atas diskontiunu di c, tetapi kontinu di titik-titik lain dari daerah definisinya.

Dengan kata lain, bila minimal salah satu dari persyaratan di atas tidak dipenuhi maka f(x) dikatakan tidak kontinu atau diskontinu di $x = a$ dan titik $x = a$ disebut **titik diskontinu**.

Secara geometris, grafik fungsi kontinu tidak ada loncatan atau tidak terputus.

Bilamana kita menggambarkan suatu grafik fungsi sembarang dengan mengerakkan pensil kita di kertas dan tanpa pernah mengangkat pensil tersebut sebelum selesai maka akan kita dapatkan fungsi kontinu.

Contoh:

Misalkan $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$ maka bagaimana seharusnya terdefinsi agar f kontinu di titik $x = 2$?

Penyelesaian:

Syarat kontinuitas yaitu:

1. $f(2) = 4$ dan dapat diakatakan bahwa $f(x) = x + 2$ untuk semua x.
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 = f(2)$

Syarat kontinuitas terpenuhi dan $f(2) = 4$ maka fungsi tersebut $f(x) = x + 2$ untuk semua x

2.5.1. Teorema Kontinuitas Fungsi

Teorema kontinuitas fungsi, yaitu:

(1) Teorema A (Kontinuitas Fungsi Polinomial & Rasional)

Fungsi polinomial kontinu di setiap bilangan real C. Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan real c dalam daerah asalnya, yaitu kecuali penyebutnya nol.

(2) Teorema B (Kontinuitas Fungsi Nilai Mutlak & Fungsi Akar ke$-n$)

Fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan real c. Jika n ganjil maka fungsi akar ke$-n$ di setiap bilangan real c dan jika n genap maka fungsi akar ke$-n$ kontinu di setiap bilangan real positif c.

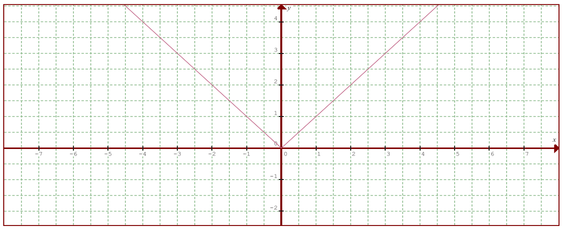
Contoh:

(1) $f(x) = |x|$

Menurut teorema, $|x|$ kontinu di semua bilangan yang berlainan dengan 0, tetapi: $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$

sehingga $|x|$ juga kontinu di 0 dan kontinu dimana-mana.

Grafik $f(x) = |x|$ tampak gambar berikut:



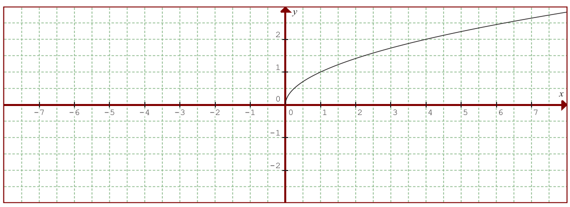
(2) $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Menurut teorema limit utama:

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} x} = \sqrt[n]{c}$$

Asalkan $c > 0$ saat n genap, berarti $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kontinu di setiap titik pada setiap bilangan real $c > 0$.

Grafik $f(x) = \sqrt{x}$ tampak pada gambar berikut:



2.5.2. Kontinuitas dalam Operasi Fungsi

(3) Teorema C (Kontinuitas di dalam Operasi Fungsi)

Jika f dan g kontinu di c maka demikian juga $kf, f + g, f - g, f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(c) \neq 0, f^n\ dan\ \sqrt[n]{f}\ (f(c) > 0\ jika\ n\ genap)$.

Bukti:

Teorema yang ada yaitu:

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = f(c)g(c)$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa $f \cdot g$ kontinu di c.

Contoh:

Pada bilangan-bilangan berapa saja $f(x) = \frac{3|x| - x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Penyelesaian:

Tidak perlu memamdang bilangan-bilangan tidak positif karena f tidak terdefinisikan pada bilangan-bilangan tersebut. Untuk sebarang bilangan positif maka fungsi-fungsi $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, |x|, dan\ x^2$ semuanya kontinu (teorema A dan B). Menurut teorema C bahwa $3|x|, 3|x| - 2, \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ kontinu di setiap bilangan positif, sehingga:

$$\frac{3|x| - x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

Kontinu di setiap bilangan positif.

(4) Teorema D (Kontinuitas Fungsi-fungsi Trigonometri)

Fungsi sinus dan cosinus kontinu di setiap bilangan real c.

Fungsi $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ kontinu di setiap bilangan real c dalam daerah asalnya.

Bukti:

Teorema yang ada yaitu:

$$\lim_{x \to c} \sin x = \sin c \ \ dan \quad \lim_{x \to c} \cos x = \cos c$$

dan seterusnya untuk semua enam fungsi trigonometri dan merupakan tepat persyaratan yang diperlukan untuk fungsi-fungsi ini agara kontinu pada setiap bilangan real di daerah asalnya masing-masing.

(5) Teorema E (teorema Limit Komposit)

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L maka:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khusunya jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$ maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c

Contoh:

a. Tunjukkan bahwa $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ kontinu di setiap bilangan real.
b. Tunjukkan bahwa $h(x) = \sin f\big(g(x)\big) = |x^2 - 3x + 6|$ kontinu kecuali di $3\ dan - 2$

Penyelesaian:

a. Misalkan $f(x) = |x|$ dan $g(x) = |x^2 - 3x + 6|$ maka keduanya kontinu di setiap bilangan real sehingga nilai komposisinya juga kontinu.

$$h(x) = f(g(x) = |x^2 - 3x + 6|$$

b. Fungsi kontinu di $3\ dan - 2$, berarti $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, sehingga fungsi rasional:

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - x - 6}$$

kontinu di $3\ dan - 2$ (teorema A).

Menurut teorema D bahwa fungsi sinus kontinu di setiap bilangan real dan teorema E maka dapat dikatakan bahwa: $h(x) = \sin(g(x))$

sehingga h kontinu kecuali di $3\ dan - 2$.

2.5.3. Kontinuitas pada Interval

Ketika memandang interval tertutup $[a, b]$ maka muncul masalah yang harus dihadapi, yaitu mungkin saja f tidak terdefinisi di sebelah kiri a (misalnya $f(x) = \sqrt{x}$ mempunyai masalah di $a = 0$), sehingga secara langsung $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada. Dapat dikatakan bahwa f kontinu pada $[a, b]$ jika f kontinu di setiap titik dari (a, b) dan jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Definisi:

Fungsi f adalah kontinu kanan pada a jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan kontinu kiri pada b jika $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Dikatakan f adalah kontinu pada sebuah interval terbuka (a, b) jika f kontinu pada setiap titik dari interval tersebut.

Dikatakan f adalah kontinu pada sebuah interval tertutup $[a, b]$ jika:

1. f kontinu pada (a, b)
2. Kontinu kanan pada a, berarti $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. Kontinu kiri pada b, berarti $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Contoh:

(1) Mengatakan bahwa $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinu pada $(0, 1)$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada $[0, 1]$ adalah benar

(2) Berapakah interval terbesar fungsi $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Penyelesaian:

Daerah asal g adalah interval $[-2, 2]$. Jika c berada pada interval terbuka $(-2, 2)$ maka g kontinu pada c (teorema E), sehingga g kontinu pada $(-2, 2)$. Limit satu sisinya yaitu:

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - \left(\lim_{x \to 2^+} x\right)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = g(-2)$$

dan

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - \left(\lim_{x \to 2^-} x\right)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = g(-2)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa g kontinu pada daerah definisinya yaitu interval tertutup $[-2, 2]$.

(6) Teorema F (Teorema Nilai Antara)

Misalkan f fungsi yang terdefinisikan pada $[a, b]$ dan misalkan W bilangan antara $f(a) dan\, f(b)$. Jika kontinu pada $[a, b]$ maka terdapat paling sedikit sebuah bilangan c di antara $a\ dan\ b$ sedemikian rupa sehingga $f(c) = W$ (diperdalam pada tingkatan lebih lanjut)

Soal latihan:

1. Nyatakan apakah fungsi yang ditujukkan kontinu atau tidak di 3 dengan alasannya:
   a. $f(x) = (x - 3)(x - 4)$
   b. $h(x) = \frac{3}{x-3}$
   c. $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
   d. $h(t) = \frac{|t-3|}{t-3}$
   e. $f(t) = |t|$

f. $r(t) = \begin{cases} \frac{t^3-27}{t-3}, jika\ t \neq 3 \\ 27, jika\ t = 3 \end{cases}$

g. $r(t) = \begin{cases} t-3, jika\ t \leq 3 \\ 3-t, jika\ t > 3 \end{cases}$

2. Fungsi yang diberikan tidak terdefinisi di suatu titik, bagaimana seharusnya didefinisikan agar membuatnya kontinu di suatu titik?

   a. $f(x) = \frac{2x^2-18}{3-x}$

   b. $h(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$

3. Titik-titik dimana, jika ada, fungsi tidak kontinu?

   a. $f(x) = \frac{33-x^2}{x\pi+3x-3\pi-x^2}$

   b. $g(u) = \frac{u^2+|u-1|}{\sqrt[3]{u+1}}$

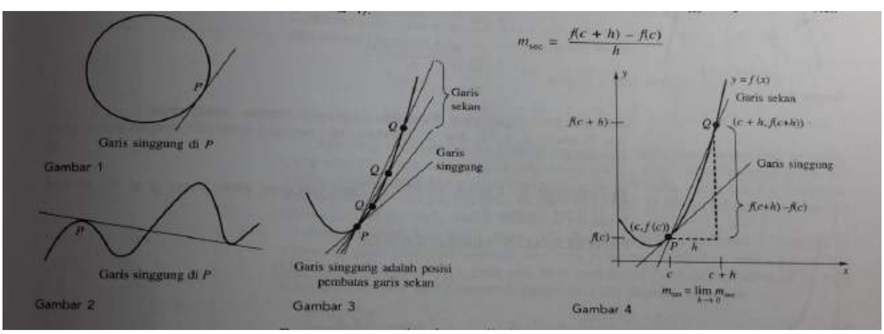
   c. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

BAB III
TURUNAN

3.1. Turunan

Pemikiran dasar turunan yaitu pada kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat. Kecepatan merupakan satu dari sekian banyak laju perubahan yang sangat penting dan kecepatan juga merupakan laju perubahan jarak terhadap waktu. Laju perubahan lain yang sangat penting yaitu kepadatan (atau densitas) suatu kawat (laju perubahan massa terhadap jarak), pendapatan marjinal (laju perubahan pendapatan terhadap beberapa jenis produk) dan arus listrik (laju perubahan muatan listrik terhadap waktu). Harus bisa membedakan antara laju perubahan rata-rata pada suatu interval dan laju perubahan sesaat pada suatu titik. Istilah laju perubahan tanpa keterangan apapun bermakna laju perubahan sesaat

Garis singgung merupakan gagasan Euclides merupakan garis yang menyentuh suatu kurva hanya pada satu titik, benar untuk lingkaran (gambar 1) tetapi sama sekali tidak memuaskan untuk kebanyakan kurva lain (gambar 2). Gagasan bahwa garis singgung pada suatu kurva di P sebgai garis yang paling baik mengaproksimasi kurva dekat P adalah lebih baik, tetapi masih tetap agak samar untuk kecermatan matematis. Konsep limit menyediakan suatu cara untuk memperoleh deskripsi yang terbaik. Misalkan P merupakan sebuah titik pada suatu kurva dan misalkan Q merupakan sebuah titik terdekat yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Pandang garis yang melalui $P\ dan\ Q$ disebut garis sekan (tali busur). Garis singgung (garis tangen) di P adalah posisi pembatas (jika ada) dari garis sekan itu bila Q bergerak ke arah P di sepanjang kurva (gambar 3). Misalkan kurva tersebut adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$ maka P mempunyai koordinat $(c, f(c))$, titik Q di dekatnya mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$, dan tali busur yang melalui $P\ dan\ Q$ mempunyai kemiringan m_{sec} yang diberikan oleh (gambar 4):



Turunan (derivative) merupakan kata yang netral dalam istilah matematis. Turunan sebagai kata kunci dalam kalkulus dan tambahan kata pada fungsi dan limit.

Definisi:

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "$f\ aksen$") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

atau

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan $\infty\ atau - \infty$

Jika limit ini memang ada maka dikatakan bahwa f **terdiferensiasi** di c. Pencarian turunan disebut **diferensiasi** dan bagian yang berhubungan dengan turunan disebut **kalkulus diferensiasi**.

Contoh:

(1) Misalkan $f(x) = 13x - 6$, Tentukan $f'(4)$

(2) Jika $f(x) = x^3 + 7x$ Tentukan $f'(x)$

(3) Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ Tentukan $f'(x)$

(4) Jika $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$, Tentukan $f'(x)$

Penyelesaian:

(1) $f(x) = 13x - 6$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13\,h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

(2) $f(x) = x^3 + 7x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 + 7(x+h)] - [x^3 + 7x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 7)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7)$$

$$= 3x^2 + 7$$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{x - (x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

(4) $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Pencarian turunan selalu melibatkan pengambilan limit suatu hasil bagi dengan pembilang dan penyebut keduanya menuju nol. Tugas kita yaitu menyederhanakan hasil bagi agar kita dapat mencoret faktor h dari pembilang dan penyebut, sehingga membolehkan untuk menghitung limit.

Pada contoh diatas dapat dilaksanakan dengan merasionalkan pembilang.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Jadi turunan dari f diberikan oleh ($f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dan daerah asalnya $(0, \infty)$

Turunan (derivative) meliputi:

1. **Bentuk-bentuk Setara Turunan**

Turunan dengan berbagai bentuk dengan menggunakan lambang huruf tertentu, misalnya:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(c) = \lim_{p\to 0} \frac{f(c+p)-f(c)}{p}$$

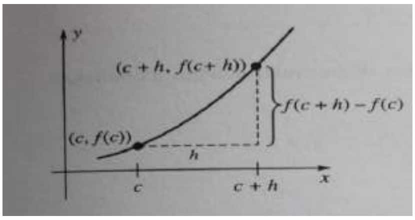
$$f'(x) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s)-f(x)}{s}$$

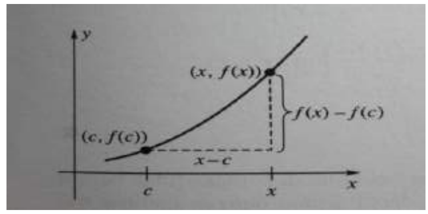
$$f'(c) = \lim_{s\to 0} \frac{f(c+s)-f(c)}{s}$$

Perubahan bagaimana x menggantikan $c+h$, sehingga $x-c$ menggantikan h, diperoleh:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}$$

Perhatikan bahwa dalam semua kasus, bilangan dimana f' dihitung tidak berubah selama operasi limit.





Contoh:

(1) Gunakan $f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ untuk mencari $g'(c)$ jika $g(x) = \frac{2}{(x+3)}$

(2) Masing-masing berikut merupakan suatu turunan tetapi tetap dari fungsi apa dan di titik mana?

a. $\lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2-16}{h}$

b. $\lim_{x \to 3} \frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{3}}{x-3}$

Penyelesaian:

(1) $g(x) = \frac{2}{(x+3)}$, diperoleh:

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{c+3}}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}$$

Penyelesaian dengan memanipulasi hasil bagi hingga dapat mencoret suatu faktor $x - c$ dari pembilang dan penyebut, kemudian menghitung limitnya.

(2) Fungsi turunan:

a. Turunan dari $f(x) = x^2$ di $x = 4$

b. Turunan dari $f(x) = \frac{2}{x}$ di $x = 3$

2. Keterdiferensiasian Mengimplikasikan Kontinuitas

Jika sebuah kurva memiliki garis singgung di sebuah titik maka kurva itu dapat melompat atau sangat berayun di titik tersebut.

Definisi:

Jika $f'(x)$ ada maka f kontinu di c

Bukti:

Perhatikan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ dengan menuliskan:

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \quad x \neq c$$

karenanya

$$\lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} f\left[(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)\right]$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{h\to 0} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c)\end{aligned}$$

Kebalikan dari teorema ini tidak benar.

Jika f kontinu di c maka tidak berarti bahwa f mempunyai turunan di c. Hal ini dapat ditunjukan dengan memperhatikan $f(x) = |x|$ di titik-titik asal. Fungsi ini pasti kontinu di nol, tetapi tidak mempunyai turunan di sana, dengan memperhatika hal berikut:

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|0 + h|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Jadi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0 + h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

sedangkan

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0 + h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

karena limit kanan dan limit kiri berlainan maka:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

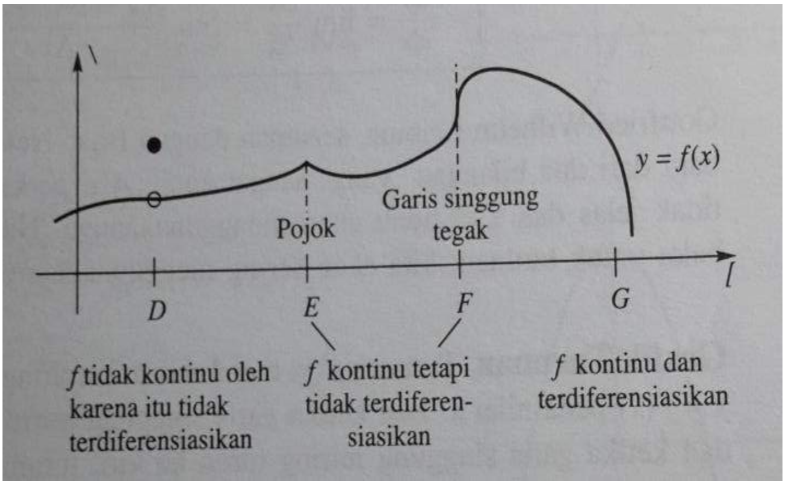
$$\Downarrow$$

tidak ada

$$\Downarrow$$

$$f'(0)\ tidak\ ada$$

Argumentasi serupa menunjukkan bahwa di sebarang titik dimana grafik suatu fungsi kontinu mempunyai pojok yang tajam mak fungsi tersebut tidak terdeferensiasikan. Grafik berikut menujukkan sejimlah cara untuk suatu fungsi agar tidak terdeferensiasikan di suatu titik.



Ditegas lagi bahwa dalam grafik di atas tampak bahwa turunan tidak ada di titik c, titik tempat garis singgung tegak, ini disebabkan oleh:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\infty$$

Hal ini berhubungan dengan realita bahwa kemiringan suatu garis tegak tidak terdefinisi.

3. Pertambahan

Apabila nilai suatu variabel berubah dari x_1 ke x_2 maka $x_1 - x_2$, perubahan dalam x disebut pertambahan (*increment*) x dan biasanya dinyatakan oleh Δx (delta x). Perhatikan Δx tidak berarti $\Delta\ kali\ x$.

Jika $x_1 = 4{,}1$ dan $x_2 = 5{,}7$ maka: $\rightarrow$ $\Delta x = x_2 - x_1 = 5{,}7 - 4{,}1 = 1{,}6$

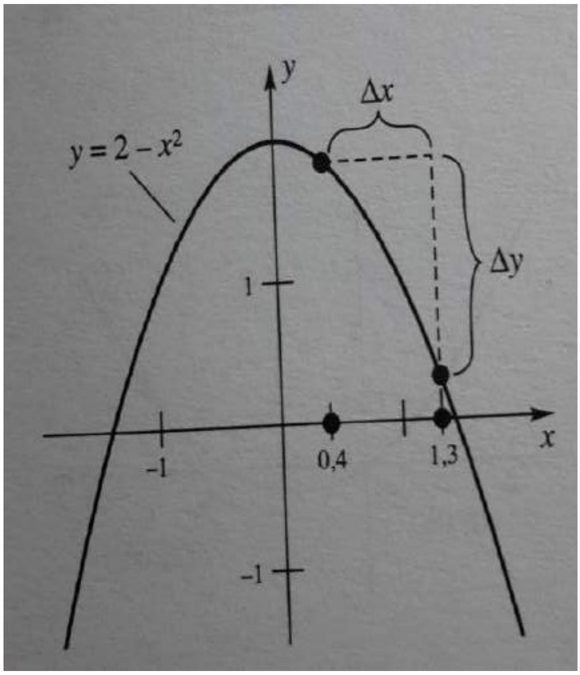
Jika $x_1 = c$ dan $x_2 = c + h$ maka: $\rightarrow$ $\Delta x = x_2 - x_1 = (c + h) - c = h$

Misalkan $y = f(x)$ menentukan suatu fungsi. Jika x berubah dari x_1 ke x_2 maka y berubah dari $y_1 = f(x_1)$ ke $y_2 = f(x_2)$. Jadi berkorespondensi terhadap pertambahan $\Delta x = x_2 - x_1$ dalam x, terdapat suatu pertambahan dalam y yang diberikan oleh:

$$\boxed{\Delta x = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)}$$

Contoh:

Misalkan $y = f(x) = 2 - x^2$. Tentukan Δy saat x berubah dari $0{,}4\ ke\ 1{,}3$ yang tampak pada grafik berikut:



Penyelesaian:

$$\Delta y = f(1{,}3) - f(0{,}4) = [2 - (1{,}3)^2] - [2 - (0{,}4)^2] = 1{,}53$$

4. Lambang Leibniz untuk Turunan

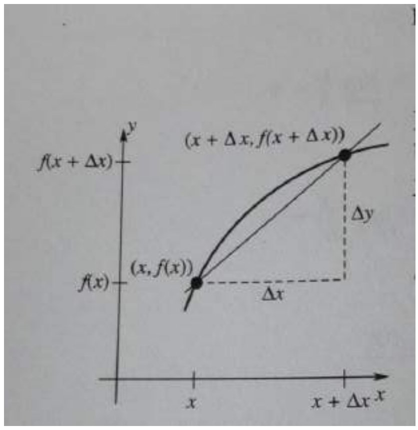
Misalkan sekarang variabel bebas berubah dari $x\ ke\ x + \Delta x$ maka perubahan berkorespondensi dalam variabel tak bebas y berupa:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

dan hasil bagi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Menggambarkan kemiringan suatu garis sekan yang melalui $(x, f(x))$ seperti tampak pada gambar berikut:



Ketika $\Delta x \to 0$ maka kemiriang garis sekan ini mendekati kemiringan garis singgung dan untuk kemiringan garis singgung digunakan lambing $\frac{dy}{dx}$ sehingga diperoleh:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

$\frac{dy}{dx}$ merupakan hasil bagi dari dua bilangan yang sanagt kecil (infinitesimal), artinya tidak jelas dan tidak dapat digunakannya. Namun $\frac{dy}{dx}$ merupakan lambang baku untuk turunan yang sering digunakan hingga saat ini.

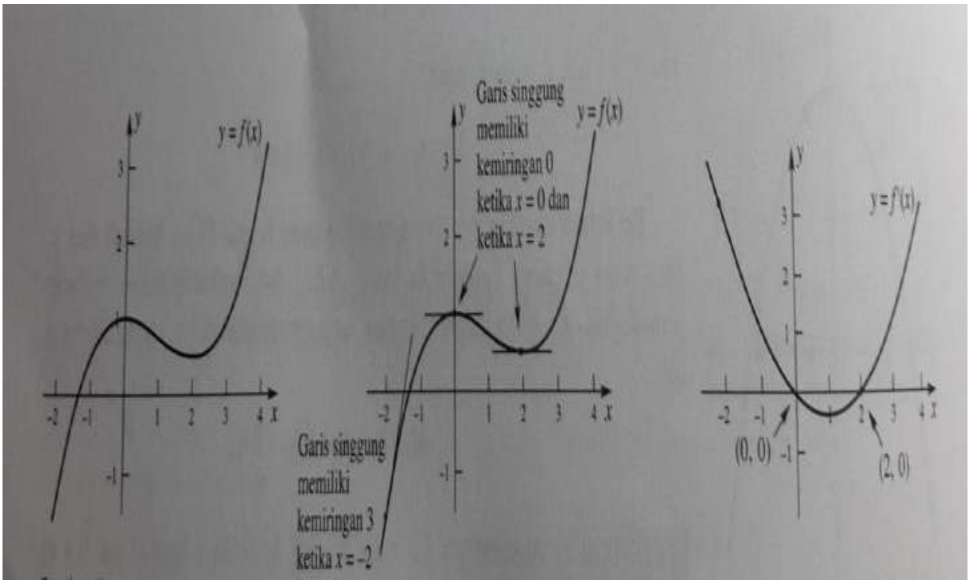
6. Garis Turunan

Turunan $f(x)$ memberikan kemiringan garis singgung terhadap garis $y = f(x)$ pada nilai x, sehingga ketika garis singgung miring naik ke kanan maka turunan positif dan ketika gari singgung miring turun ke kiri maka turunan negative, sehingga bisa memperoleh gambaran kasar dari turunan hanya dengan diketuhui grafik fungsi.

Contoh:

Diketahui garis $y = f(x)$ yang tampak pada gambar berikut.

Gambarkan grafik turunan $f'(x)$.



Penyelesaian:

- Untuk $x < 0$ maka garis singgung terhadap garis $y = f(x)$ mempunyai kemiringan positif. Perhitungan kasar dari plot menyarankan bahwa ketika $x = -2$ maka kemiringannya sekitar 3. Ketika bergerak dari kiri ke kanan di sepanjang kurva dalam gambar tampak bahwa kemiringan masih tetap positif (untuk sementara) tetapi garis singgung semakin mendatar.
- Ketika $x = 0$ maka garis singgung mendatar sehingga $f'(0) = 0$
- Untuk x *diantara* $0\, dan\, 2$ $(0 < x < 2)$ maka garis singgung mempunyai kemiringan negative di sepnajang interval.
- Ketika $x = 2$ maka ada sebuah titik dengan garis singgung mendatar sehingga turunan sama dengan nol ketika $x = 2$
- Untuk $x > 2$ maka garis singgung mempunyai kemiringan positif lagi dan grafik turunan tampak pada bagian terakhir.

Soal Latihan:

1. Gunakan definisi: $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ untuk mencari turunan:

   a. $f'(1)\, jika\, f(x) = x^2$

   b. $f'(3) jika\, f(t) = t^2 - 1$

2. Gunakan $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ untuk mencari turunan:

   a. $s(x) = 2x + 1$

   b. $r(x) = 3x^2 + 4$

   c. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

   d. $h(x) = \frac{2}{x}$

   e. $F(x) = \frac{6}{x^2+1}$

   f. $H(x) = \frac{2x-1}{x-4}$

   g. $g(x) = \sqrt{3x}$

   h. $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$

3. Limit yang diberikan adalah suatu turunan tetapi dari fungsi apa dan di titik mana?

   a. $\lim_{h \to 0} \frac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$

   b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

   c. $\lim_{t \to x} \frac{t^2-x^2}{t-x}$

   d. $\lim_{x \to t} \frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{t}}{x-1}$

   e. $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

4. Tentukan Δy untuk nilai-nilai $x_1 \; dan \; x_2$ yang diketahui:

   a. $y = 3x + 2, untuk \; x_1 = 1 \; dan \; x_2 = 1{,}5$

   b. $y = \frac{1}{x}, untuk \; x_1 = 1{,}0 \; dan \; x_2 = 1{,}5$

   c. $y = \frac{3}{x+1}, untuk \; x_1 = 2{,}34 \; dan \; x_2 = 2{,}31$

   d. $y = \cos 2x \, , untuk \; x_1 = 0{,}571 \; dan \; x_2 = 0{,}573$

5. Carilah dan sederhanakan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, kemudian tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan mengambil jawaban ketika $\Delta x \to 0$

   a. $y = x^2$

   b. $y = \frac{1}{x+1}$

   c. $y = \frac{x-1}{x+1}$

3.2. Aturan Turunan

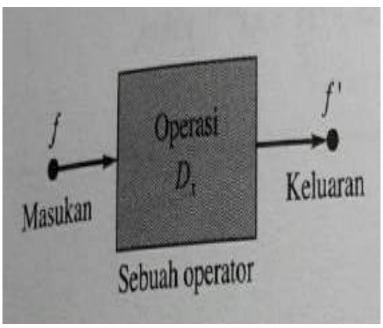
Proses Pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan yaitu dengan menyusun hasil bagi selisih:

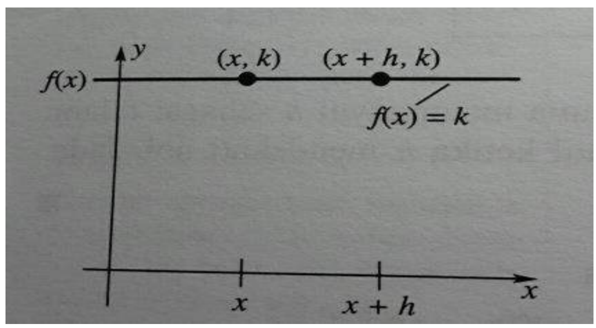
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Beberapa notasi dalam turunan.

Apabila $y = f(x)$ maka turunannya dapat dinotasikan:

$$f'(x) \;\; atau \;\; D_x f(x) \;\; atau \;\; \frac{dy}{dx}$$





Beberapa aturan turunan, yaitu:

1. Aturan Konstanta dan Pangkat

Aturan konstata dan pangkat dengan teorema sebagai berikut:

(a) Teorema A (Aturan Fungsi Konstanta)

Jika $f(x) = k$ suatu konstansta maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$ yaitu:

$$f'(k) = 0$$

Bukti:

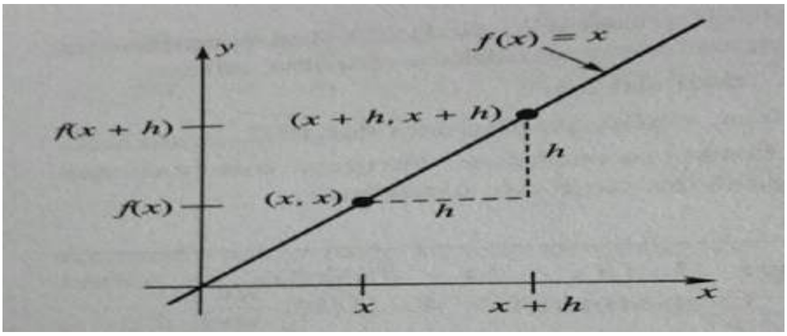
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Grafik fungsi $f(x) = k$ merupakan sebuah garis mendatar yang karena kemiringannya nol dimana-mana, yang tampak pada gambar berikut:

(b) Teorema B (Aturan Fungsi Satuan)

Jika $f(x) = x$ maka $f'(x) = 1$ yaitu:

$$f'(k) = 1$$



Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Sebelum menyatakan teorema berikutnya maka perlu diingat tentang pemangkatan suatu binomial:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\vdots$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^4$$

(c) Teorema C (Aturan Pangkat)

Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif maka:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)\right]$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

sehingga terbukti:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

sebagai ilustrasi, perhatikan bahwa:

$$D_x(x)^3 = 3x^2$$

$$D_x(x)^9 = 9x^8$$

$$D_x(x)^{100} = 100x^{99}$$

2. Operator Linear

D_x merupakan operator linear dan sangat baik ketika diterapkan pada kelipatan konstanta fungsi atau pada jumlah fungsi.

(d) Teorema D (Aturan Kelipatan Konstanta)

Jika k suatu konstants dan f satu fungsi yang terdeferensiasikan maka:

$$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$$

Dikatakan bahwa pengganti konstanta k dapat dikeluarkan dari operator D_x

Bukti:

Misalkan $f(x) = k \cdot f(x)$ maka:

$$f'^{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

Sebagai ilustrasinya, perhatikan bahwa:

$$D_x(-7x^3) = -7D_x(x^3) = -7 \cdot 3x^2 = -21x^2$$

$$D_x\left(\frac{4}{3}x^9\right) = \frac{4}{3}D_x(x^9) = \frac{4}{3} \cdot 9x^8 = 12x^8$$

(e) Teorema E (Aturan Jumlah)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdeferensiasikan maka:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$\Downarrow$$
$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

Dikatakan bahwa turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.

Bukti:

Misalkan $F(x) = f(x) = g(x)$ maka:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x) + g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

(f) Teorema F (Aturan Selisih)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdeferensialkan maka:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$
$$\Downarrow$$
$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

Contoh:

Tentukan turunan dari $5x^2 + 7x - 6$ dan $4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16$

Penyelesaian:

$D_x\ (5x^2 + 7x - 6) = D_x\ (5x^2 + 7x) - D_x(6)$

$= D_x(5x^2) + D_x(7x) - D_x(6)$ (Teorema F)

$= 5D_x(x^2) + 7D_x(x) - D_x(6)$ (Teorema E)

$= 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0$ (Teorema D)

$= 10x + 7$ (Teorema C, B. A)

$D_x(4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16)$

$= D_x(4x^6) - D_x(3x^5) - D_x(10x^2) + D_x(5x) + D_x(16)$

$= 4D_x(x^6) - 3D_x(x^5) - 10D_x(x^2) + 5D_x(x) + D_x(16)$

$= 4(6x^5) - 3(5x^4) - 10(2x) + 5(1) + 0$

$= 24x^5 - 15x^3 4 - 20x + 5$

3. Aturan Hasil Kali dan Hasil Bagi

(g) Teorema G (Aturan Hasil Kali)

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdeferensiasikan maka:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g(x) + g(x)D_x f(x)$$

Bukti:

$F(x) = f(x)g(x)$ maka:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} + \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= f(x+h) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Penurunan yang diberikan menggunakan dua hal, yaitu:

(1) Taktik penambahan dan pengurangan pada hal yang sama yaitu $f(x+h)g(x)$

(2) Menggunakan realita bahwa: $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

Contoh:

Tentukan turunan $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ dengan **menggunakan aturan hasil kali** dan periksa dengan cara lain.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} D_x[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)] &= (3x^2 - 5)D_x(2x^4 - x) + (2x^4 - x)D_x(3x^2 - 5) \\ &= (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + (2x^4 - x)(6x) \\ &= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2 \\ &= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5 \end{aligned}$$

Pemerikasaan cara lain, yaitu dengan mengalikan kemudian mencari turunannya:

$(3x^2 - 5)(2x^4 - x) = 6x^6 - 10x^4 - 3x^3 + 5x$

sehingga:

$$\begin{aligned} D_x\,(3x^2 - 5)(2x^4 - x) &= D_x\,(6x^6) - D_x(10x^4) - D_x(3x^3) + D_x(5x) \\ &= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5 \end{aligned}$$

(h) Turunan H (Aturan Hasil Bagi)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'^{(x)}g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D_x f(x) g(x) - f(x) D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Bukti:

Misalkan $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ maka:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\}$$

$$= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]\cdot\frac{1}{g(x)g(x)}$$

$$= [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]\cdot\frac{1}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Contoh:

(1) Tentukan turunan $\frac{d}{dx}\left[\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}\right]$

(2) Tentukan $D_x y$ apabila $y = \frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}$

Penyelesaian:

(1) Turunan $\frac{d}{dx}\left[\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}\right]$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}(3x-5)\cdot(x^2+7) - (3x-5)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+7)}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{(3) \cdot (x^2 + 7) - (3x - 5) \cdot (2x)}{(x^2 + 7)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$$

(2) $D_x y$ apabila $y = \frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}$

$$D_x y = D_x\left(\frac{2}{x^4 + 1}\right) + D_x\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= \frac{D_x(2) \cdot (x^4 + 1) - (2) \cdot D_x(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^2} + \frac{D_x(3) \cdot (x) - 3 \cdot D_x(x)}{x^2}$$

$$= \frac{(0) \cdot (x^4 + 1) - (2) \cdot (4x^3 + 1)}{(x^4 + 1)^2} + \frac{D_x(3) \cdot (x) - 3 \cdot D_x(x)}{x^2}$$

$$= \frac{-8x^3}{(x^4 + 1)^2} - \frac{3}{x^2}$$

(i) Turunan I (Aturanan Pangkat)

Aturan pangkat berlaku untuk pangkat bulat negatif, yaitu:

$$D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

Bukti:

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Soal-soal Latihan:

1. Tentukan turunan:
   a. $y = 2x^2$
   b. $y = \frac{100}{x^5}$
   c. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
   d. $y = \pi x^7 - 2x^5 - 5x^{-2}$
   e. $y = \frac{3}{x^3} + x^{-4}$
   f. $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$
   g. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$
   h. $y = \frac{1}{3x^2+1}$

i. $y = \frac{x-1}{x+1}$

j. $y = \frac{2x^2-1}{3x+5}$

k. $y = \frac{2x^2-3x+1}{2x+1}$

l. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$

2. Apabila $f(0) = 4, f'(0) = -1, g(0) = -3\ dan\ g'(0) = 5$ maka tentukan:
   a. $(f \cdot g)'(0)$
   b. $(f + g)'(0)$
   c. $(\frac{f}{g})'(0)$
3. Tunjukkan bahwa $D_x[f(x)]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot D_x f(x)$ dengan menggunakan aturan hasil kali.

3.3. Turunan Fungsi Trigonometri

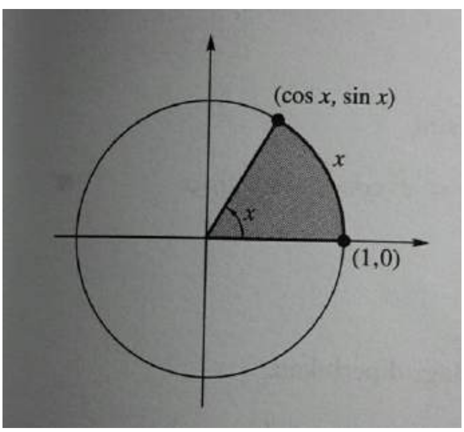
Teorema penting dalam trigonometri, yaitu:

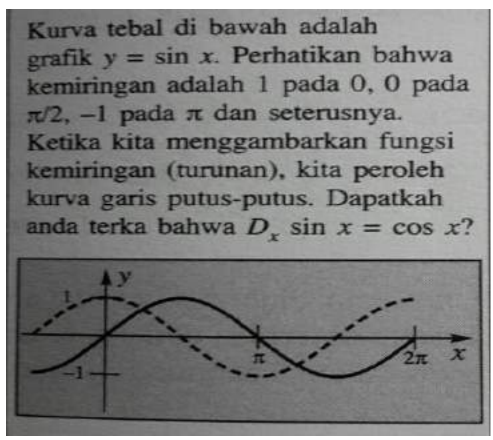
(a) Teorema A

Fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$, keduanya terdeferensiasikan yaitu:

$$D_x\,(\sin x) = \cos x$$

$$D_x\,(\cos x) = -\sin x$$





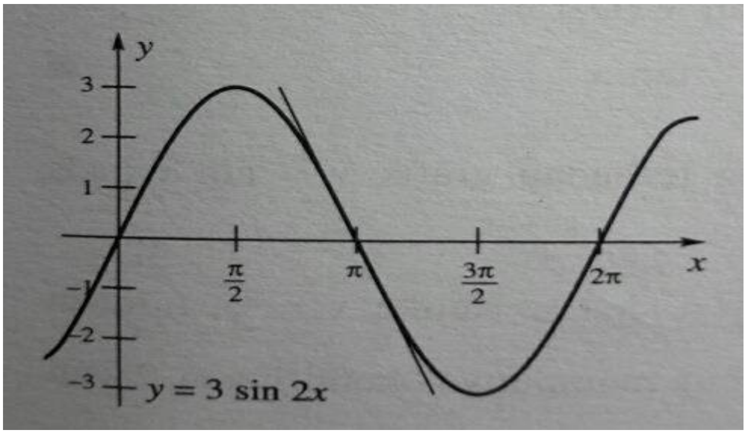
Contoh:

(1) $D_x(3\sin x - 2\cos x)$

(2) $D_x\ (x^2 \sin x)$

(3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

(4) Tentukan persamaan garis singgung pada grafik $y = 3\sin x$ di titik $(\pi, 0)$ yang tampak pada gambar di bawah ini:



(5) Pada saat t detik, pusat sebuah pelampung gabus berada pada $y = 2\sin t$ cm di atas (atau di bawah) permukaan air. Berapa kecepatan garpu pada $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

Penyelesaian:

(1) $D_x(3\sin x - 2\cos x) = 3D_x(\sin x) - 2D_x(\cos x) = 3\cos x + 2\sin x$

(2) $D_x\ (x^2 \sin x) = x^2 D_x(\sin x) + \sin x(D_x x^2) = x^2\cos x + 2x\sin x$

(3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x(\frac{d}{dx}(1+\sin x)) - (1+\sin x)(\frac{d}{x}\cos x)}{(\cos x)^2}$

$$= \frac{cos^2 x + \sin x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{cos^2 x}$$

(4) Persamaan garis singgung pada grafik $y = 3\sin x$ di titik $(\pi, 0)$ yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x$$

sehingga untuk titik $(\pi, 0)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x = 3\cos\pi = 3(-1) = -3$$

Persamaan garis singgung:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = -3(x - \pi)$$
$$y = -3x + \pi$$

(5) $y = 2\sin t$ cm maka kecepatan garpu pada $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ adalah:

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos t$$

sehingga

$$t = 0\ maka\ \frac{dy}{dt} = 2\cos 0 = 2$$
$$t = \frac{\pi}{2}\ maka\ \frac{dy}{dt} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$t = \pi\ maka\ \frac{dy}{dt}\cos\pi = -2$$

(b) Teorema B

Untuk semua titik x di dalam daerah asal fungsi:

$$D_x\,(\tan x) = \sec^2 x$$
$$D_x\,(\cot x) = -\csc^2 x$$
$$D_x\,(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$D_x\,(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Contoh:

(1) Tentukan $D_x(x^n \tan x)$ untuk $n \geq 1$

(2) Tentukan persamaan garis singgung terhadap grafik $y = \tan x$ pada titik $(\frac{\pi}{4}, 1)$

(3) Tentukan semua titik pada grafik $y = sin^2\, x$ yang mempunyai garis singgung mendatar

Penyelesaian:

(1) Diterapkan hasil kali dengan teorema B, yaitu:

$$D_x(x^n \tan x) = x^n D_x(\tan x) + \tan x(D_x x^n) = x^n sec^2\, x + nx^{n-1}\tan x$$

(2) Persamaan garis singgung terhadap grafik $y = \tan x$ pada titik $(\frac{\pi}{4}, 1)$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2 x$$

sehingga untuk titik $(\frac{\pi}{4}, 1)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = sec^2 x = sec^2\frac{\pi}{4} = (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 = 2$$

Persamaan garis singgung:

$$y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4})$$

$$y - 1 = 2x - 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

(3) Grafik $y = sin^2\, x$ yang mempunyai garis singgung mendatar:

$$\frac{d}{dx} sin^2\, x = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x) = sinx \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

Hasil kali $\sin x\ dan \cos x$ adalah sama dengan nol ketika salah satu $\sin x\ dan \cos x$ sama dengan nol yaitu pada $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots$

Soal-soal Latihan:

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari:

   3.4. $y = 2 \sin x + 3 \cos x$

   3.5. $y = sin^2 x + cos^2 x$

   3.6. $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

   3.7. $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

   3.8. $y = \sin x \cos x$

   3.9. $y = \frac{\sin x}{x}$

   3.10. $y = x^2 \cos x$

   3.11. $y = tan^2 x$

2. Tentukan persamaan garis singgung pada $y = \sin x$ di $x = \frac{\pi}{3}$
3. Tentukan persamaan garis singgung pada $y = \tan x$ di $x = 0$

3.4. Aturan Rantai

Aturan rantai sangat penting sehingga sering digunakan dalam mendiferesnsiasikan, sehingga ada teorema yaitu:

(a) Teorema A (Aturan Rantai)

Misalkan $y = f(u)\ dan\ u = g(x)$. Jika g terdiferensiakan di x dan f terdiferensiakan di $u = g(x)$, maka fungsi komposit $f \circ g$ yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ adalah terdiferensiasikan di x dan

$$(f \circ g)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

yaitu

$$D_x(f\big(g(x)\big)) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(b) Penerapan Aturan Rantai

Contoh:

(1) Apabila $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ maka tentukan $D_x y$

(2) Jika $y = \frac{1}{(2x^5-7)^3}$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

(3) Tentukan $D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13}$

(4) Apabila $y = \sin 2x$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

(5) Tentukan $F'(y)$ jika $F(y) = y \sin y^2$

(6) Tentukan $D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)$

(7) Tentukan $\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3}$

(8) Tentukan $D_x sin^3(4x)$

(9) Tentukan $D_x \sin[\cos(x^2)]$

(10) Nyatakan turunan-turunan berikut dalam bentuk $F(x)$ dan anggap bahwa F dapat didiferensiasikan:

a. $D_x(F(x^3))$

b. $D_x[(F(x))^3]$

Penyelesaian:

(1) $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ maka harus terpikirkan y sebagai pangkat ke 60 suatu fungsi x, yaitu:

$$y = u^{60}$$
$$u = 2x^2 - 4x + 1$$

Fungsi luar menjadi:

$$f(u) = u^{60}$$

Fungsi dalam menjadi:

$$u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

sehingga diperoleh:

$$D_x y = D_x(f(g(x))$$
$$= f(u)g(x)$$
$$= (60u^{59})(4x - 4)$$
$$= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

(2) $y = \frac{1}{(2x^5-7)^3}$ dengan memisalkan u, yaitu:

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \text{ dengan } u = 2x^5 - 7$$

sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$= (-3u^{-4})(10x^4) = \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4 = \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4}$$

(3) $D_t \left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13}$

$$D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13} = 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13-1} D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)$$
$$= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \frac{(3t^2 - 2)(t^4 + 3) - (4t^3)(t^3 - 2t + 1)}{(t^4 + 3)^2}$$
$$= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \frac{-t^6 + 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 6}{(t^4 + 3)^2}$$

(4) $y = \sin 2x$

$$y = \sin u \quad dengan \quad u = 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = (\cos 2x)\left(\frac{d}{dx}2x\right) = 2\cos 2x$$

(5) $F(y) = y \sin y^2$

$$F'^{(y)} = yD_y(\sin y^2) + (\sin y^2)D_y(y)$$
$$= y(\cos y^2)D_y(y^2) + (\sin y^2)(1)$$
$$= 2y^2 \cos y^2 + \sin y^2$$

(6) $D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)$

$$D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right) = \frac{D_x(x^2(1-x)^3)(1+x) - (x^2(1-x)^3)D_x(1+x)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{[D_x x^2(1-x)^3 + x^2 D_x(1-x)^3 +](1+x) - (x^2(1-x)^3)(1)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{[2x(1-x)^3 + x^2(3(1-x)^2)(-1)](1+x) - (x^2(1-x)^3)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{[2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2](1+x) - (x^2(1-x)^3)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{[(1-x)^2(2x(1-x) - 3x^2)](1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{(1+x)(1-x)^2(2x - 2x^2 - 3x^2) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{(1+x)(1-x)^2 x(2-5x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}$$

(7) $\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3}$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3} = \frac{d}{dx}(2x-1)^{-3} = -3(2x-1)^{-3-1}\frac{d}{dx}(2x-1) = \frac{-6}{(2x-1)^4}$$

(8) $D_x sin^3(4x)$

$$D_x sin^3(4x) = D_x[\sin(4x)]^3 = 3[\sin(4x)]^{3-1}D_x[\sin(4x)]$$
$$= 3[\sin(4x)]^2 D_x[\sin(4x)]$$
$$= 3[\sin(4x)]^2 \cos 4x \, D_x(4x)$$
$$= 3[\sin(4x)]^2 \cos 4x \,(4)$$
$$= 12 \cos 4x \sin^2(4x)$$

(9) $D_x \sin[\cos(x^2)]$

$$D_x \sin[\cos(x^2)] = \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\sin(x^2)] \cdot 2x$$
$$= -2x \sin(x^2) \cdot \cos[\cos(x^2)]$$

(10) Turunan-turunan dalam bentuk $F(x)$:

a. $D_x(F(x^3))$

$$D_x\big(F(x^3)\big) = F'(x^3)D_x(x)^3 = 3x^2(F'(x^3)$$

b. $D_x[(F(x))^3]$

$$D_x[(F(x))^3] = 3[F(x)]^2D_x\big(F(x)\big) = 3[F(x)]^2F'(x)$$

Soal-soal Latihan:

1. Tentukan D_xy:
   a. $y = (1 + x)^{15}$
   b. $y = (3 - 2x)^5$
   c. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 11)^{11}$
   d. $y = \frac{1}{(x+3)^5}$
   e. $y = \sin(x^2 + x)$
   f. $y = \cos^3 x$
   g. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$
   h. $y = \cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)$
   i. $y = (3x - 2)^2(3 - x^2)^2$
   j. $y = \frac{(x+1)^2}{3x-4}$
2. Tentukan turunan:
   a. $y' dengan\ y = (x^2 + 4)^2$
   b. $D_t\left(\frac{3t-2}{t+5}\right)^3$
   c. $\frac{d}{dt}\left(\frac{(3t-2)^3}{t+5}\right)$
   d. $\frac{dy}{dx}\ dengan\ y = \left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3$
   e. $\frac{dy}{dt}\ dengan\ y = [\sin t \tan(t^2 + 1)]$
3. Hitunglah turunan berikut:
   a. $f'(3) apabila\ f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^3$
   b. $F'(1) apabila\ F(t) = \sin(t^2 + 3t + 1)$

4. Tentukan turunan dengan menggunakan aturan rantai:
   a. $D_x[\sin^2(x^2+3x)]$
   b. $D_t[\sin^3(\cos t)]$
   c. $D_\theta[\cos^4(\sin\theta^2]$
   d. $\frac{d}{dt}[\sin\{\cos(\sin 2x)\}]$
5. Nyatakan turunan-turunan berikut dalam bentuk fungsi $F(x)$ diasumsikan bahwa F dapat dideferensiasikan:
   a. $D_x(F(2x))$
   b. $D_x((F(t))^{-2})$
   c. $\frac{d}{dz}\left(1+\left(F(2z)\right)\right)^2$
   d. $\frac{d}{dx}F(\cos x)$
   e. $D_x \tan F(2x)$
   f. $D_x(F(x)\sin^2 F(x))$
6. Tentukan persamaan garis singgung pada $y=(x^2+1)^{-2}$ di titik $(1,\frac{1}{4})$

3.5. Turunan Tingkat Tinggi

Operasi diferensiasi mengambil sebuah fungsi f dan menghasilkan sebuha fungsi baru yaitu f' (**turunan pertama**). Apabila f' dideferensiasikan maka tetap menghasilkan fungsi lain yang dinyatakan dengan f'' (**turunan kedua**). Apabila f'' dideferensiasikan lagi maka tetap menghasilkan fungsi lainnya yang dinayatakan f''' (**turunan ketiga**), selanjutnya **turunan keempat** dinyatakan $f^{(4)}$, **turunan kelima** dinyatakan $f^{(5)}$, dan seterusnya.

misalkan:

$$f(x)=2x^3-4x^2+7x-8$$

maka:

$$f'(x)=6x^2-8x+7$$
$$f''(x)=12x-8$$
$$f'''(x)=12$$
$$f^{(4)}(x)=0$$

karena turunan fungsi nol adlaah nol maka turunan keempat dan semua turunan tingkat yang lebih tinggi (*higher-order derivative*) dari *f* akan nol.

Notasi turunan yang umum dari $y = f(x)$ dikatakan turunan pertama yang dinotasikan:

$$f'(x)\ atau\ y'\ disebut\ notasi\ aksen$$

$$D_x y\ disebut\ notasi\ D$$

$$\frac{dy}{dx}\ disebut\ notasi\ Leibniz$$

Khususnya untuk motasi Leibniz pada turunan kedua misalnya dinotasikan:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\ sebagai\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

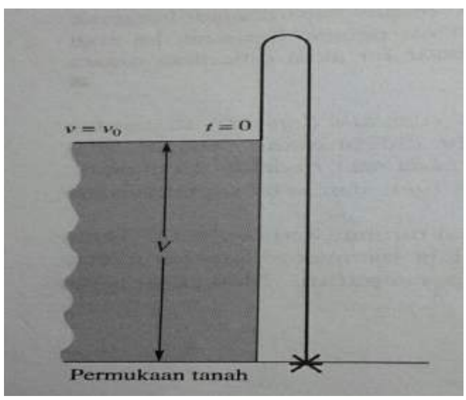
Notasi tersebut dibaca: turunan kedua dari y terhadap x

Masalah Benda Jatuh

Jika sebuah benda dilempar ke atas (atau ke bawah) dari suatu ketinggian awal s_0 dm dengan kecepatan awal $v_0\ dm/dt$ dan jika s adalah tingginya di atas tanah dalam desimeter setalah t detik, maka:

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

Hal ini mengasumsikan bahwa percobaan berlangsung dekat permukaan laut dan tekanan udara dapat diabaikan. Perhatikan kecepatan positif berarti bahwa benda bergerak ke atas. Situasi yang dibayangkan tampak pada gambar berikut:



Contoh:

(1) Apabila $y = \sin 2x$, tentukan turunan ketiga, keempat dan keduabelas

(2) Sebuah benda bergerak di sepanjang garis koordinat sehingga posisinya s memenuhi $s = 2t^2 - 12t + 8$ dimana s diukur dalam cm dan t dalam detik dengan $t \geq 0$.

a. Tentukan kecepatan benda ketika $t = 1$ dan ketika $t = 6$.

b. Kapan kecepatannya nol?

c. Kapan kecepatannya positif?

(3) Sebuah benda bergerak di sepanjang garis koordinat mendatar sedemikian rupa sehingga posisinya pada saat t dinyatakan oleh:

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$$

s dalam satuan dm dan t dalam satuan detik

a. Kapan kecepatan 0?

b. Kapan kecepatan positif?

c. Kapan titik itu bergerak mundur (yaitu ke kiri)?

d. Kapan percepatannya positif?

(4) Dari puncak gedung setinggi 160 $feet$, sebuah bola dilempar ke atas dengan kecepatan awal 64 $feet$ per detik.

a. Kapan bola mencapai ketinggian maksismum?

b. Berapa ketinggian maksimumnya?

c. Kapan bola membentur tanah?

d. Dengan laju berapa bola membentur tanah?

e. Berapa percepatannya pada $t = 2$?

Penyelesaian:

(1) $y = \sin 2x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx} = -2^2 \sin 2x$$

Turunan ketiga:

$$\frac{d^3y}{dx} = -2^3 \cos 2x$$

Turunan keempat:

$$\frac{d^4y}{dx} = 2^4 \sin 2x$$

Turunan ke dua belas:

$$\frac{d^{12}y}{dx} = 2^{12} \sin 2x$$

(2) Menggunakan lambing $v(t)$ untuk kecepatan pada saat t maka:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

a. Kecepatan benda ketika $t = 1$ dan ketika $t = 6$.

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8\ cm/dt$$

$$v(6) = 4(6) - 12 = 12\ cm/dt$$

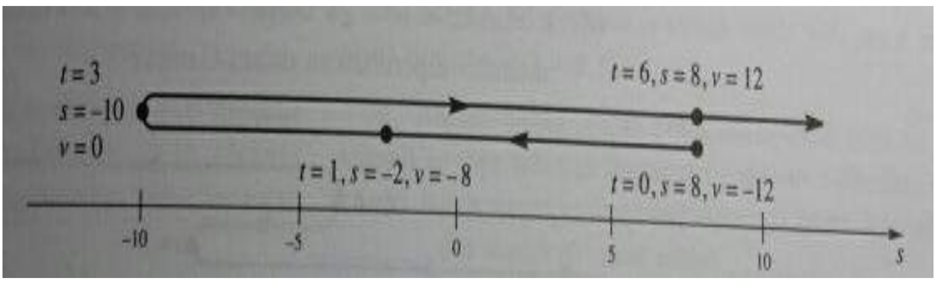
b. Kecepatannya nol

Kecepatan nol ketika $4t - 12 = 0$ yaitu saat $t = 3$

c. Kecepatannya positif

Kecepatan positif ketika $4t - 12 > 0$ yaitu saat $t > 3$

Skema tampak sebagai berikut:



(3) $s = t^3 - 12t + 36t - 30$, s dalam satuan dm dan t dalam satuan detik

a. Kecepatan nol:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)(t-6)$$

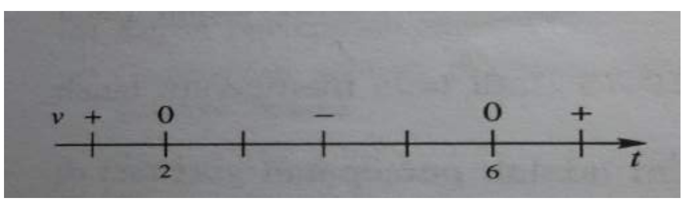
Jadi $v = 0$ pada $t = 2\ dan\ t = 6$

b. Kecepatan positif:

$$v > 0\ ketika\ (t-2)(t-6) > 0$$

Sehingga diperoleh:

$$t < 2\ atau\ t > 6$$



Jadi penyelesaiannya adalah:

$$\{t: t < 2\ atau\ t > 6\}$$

atau dengan notasi interval yaitu: $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

c. Kapan titik itu bergerak mundur ke kiri:

$$v < 0 \; ketika \; (t-2)(t-6) < 0$$

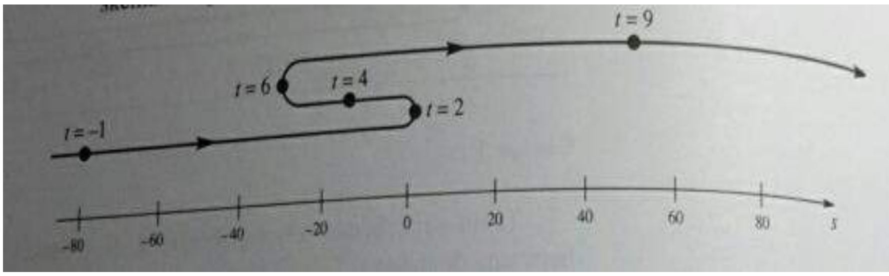
Penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah berupa interval (2, 6)

d. Kapan percepatannya positif:

$$a > 0 \; ketika \; a = \frac{dv}{dt} = 6t - 24 = 6(t-4) > 0$$

Sehingga diperoleh: $a > 0 \; ketika \; t > 4$

Tampak pada gambar berikut:



(4) Misalkan $t = 0$ berkorespondensi dengan saat pada waktu bola dilempar, maka $s_0 = 160$ dan $v_0 = 64$ ($v_0 \; positif \; karena \; bola \; dilempar \; ke \; atas$), sehingga:

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

a. Bola mencapai ketinggian maksimum, pada waktu kecepatannya 0 yaitu ketika:

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64 = 0 \longrightarrow t = 2$$

Sehingga bola mencapai ketinggian maksimum, pada waktu kecepatannya 0 yaitu ketika $t = 2$ detik

b. Ketinggian maksimumnya, pada $t = 2$ maka:

$$s = -16t^2 + 64v_0 t + 160 = -16(2^2) + 64(2) + 160 = 224 \; feet$$

c. Bola membentur tanah pada waktu $s = 0$ yaitu ketika:

$$s = -16t^2 + 64v_0 t + 160$$

$$0 = -16t^2 + 64v_0 t + 160$$

dibagi -16

$$t^2 - 4v_0 t - 10 = 0$$

Diperoleh:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Hanya jawaban positif yang dianggap masuk akal, sehingga bola membentur tanah pada $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5{,}74$ detik.

d. Bola membentur tanah, saat $t = 2 + \sqrt{14}$ maka diperoleh:

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64 = -32\left(2 + \sqrt{14}\right) + 64 \approx -119{,}73$$

Sehingga bola membentur tanah pada laju $119{,}73$ feet per detik

e. Percepatannya pada $t = 2$, maka:

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

Sehingga percepatan selalu -32 feet per detik.

Hal ini merupakan percepatan gravitasi didekat permukaan air laut.

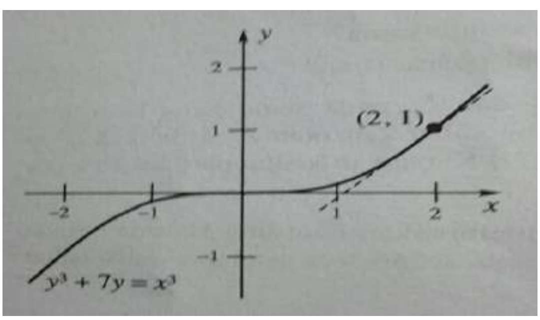
Soal-soal Latihan:

1. Tentukan $\frac{d^3y}{dt^3}$
   a. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$
   b. $y = (3x + 5)^3$
   c. $y = \sin(7x)$
   d. $y = \frac{1}{x-1}$
2. Tentukan $f''(2)$
   a. $f(x) = x^2 + 1$
   b. $f(t) = \frac{2}{t}$
   c. $f(\theta) = (\cos\theta\pi)^{-2}$
   d. $f(s) = s(1 - s^2)^3$
3. Tanpa melakukan perhitungan apapun, tentukan tiap turunan dari:
   a. $D_x^4(3x^3 + 2x - 19)$
   b. $D_x^{11}(x^2 - 3)^5$

4. Jika $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$ maka tentukan f'' pada setiap titik nol dari f' yaitu pada setiap titik c yang memenuhi $f'(c)$
5. Apabila $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$ maka tentuka kecepatan benda bergerak tersebut ketika percepatannya nol.
6. Dua benda bergerak di sepanjang suatu garis koordinat. Setelah t detik jarak-jarak berarahnya dari titik-titik asal, masing-masing diberikan oleh $s_1 = 4t - 3t^2$ dan $s_2 = t^2 - 2t$
   a. Kapan keduanya mempunyai kecepatan sama?
   b. Kapan keduanya mempunyai laju sama?
   c. Kapan keduanya mempunyai posisi sama?
7. Sebuah benda yang dilemparkan langsung ke atas berada pada ketinggian yaitu $s = -16t^2 + 48t + 256$ feet setelah t detik.
   a. Berapa kecepatan awalnya?
   b. Kapan benda mencapai maksimum?
   c. Berapa tinggi maksimumnya?
   d. Laju berapa benda membentur tanah?

3.6. Diferensiasi Implisit

Diferensiasi implisit merupakan metode yang diilustrasikan untuk mencari $\frac{dy}{dx}$ tanpa terlebih dahulu menyelesaikan secara gamblang persamaan yang diberikan untuk y dalam x.



Contoh:

(1) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ $jika\ 4x^2y - 3y = x^3 - 1$

(2) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ $jika\ x^2 + 5y^3 = x + 9$

(3) Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$ di titik $(0, 1)$

Penyelesaian:

(1) $\frac{dy}{dx}$ $jika\ 4x^2y - 3y = x^3 - 1$

Cara A, dengan menyelesaikan persamaan yang diberikan untuk y secara gambling:

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2)(4x^2 - 3) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Cara B, dengan diferensiasi implisit yaitu disamakan turunan-turunan kedua ruas:

$$\frac{d}{dx}(4x^2y - 3y) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

Setelah menggunakan aturan hasil kali pada suku pertama maka diperoleh:

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 8xy - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Dua jawaban dalam cara A & B tampak berbeda yaitu jawaban yang diperoleh cara A dalam x saja, sedangkan jawaban cara B dalam $x\ maupun\ y$.

Sebenarnya jawaban cara B bisa dirubah dalam bentuk jawaban cara A dengan mensubstitusikan $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$ ke dalam ekspresi untuk $\frac{dy}{dx}$ yang baru saja diperoleh, sehingga didapat:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\left(\frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3} = \frac{\frac{3x^2(4x^2 - 3) - 8x(x^3 - 1)}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{1}{4x^2 - 3} \cdot \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{4x^2 - 3} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

(2) $\frac{dy}{dx}\ jika\ x^2 + 5y^3 = x + 9$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$15y^2\frac{dy}{dx} = 1 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

(3) Persamaan garis singgung pada kurva $y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$, dengan mendiferensiasikan kedua ruas dan menyamakan hasilnya, sehingga diperoleh:

$$y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$$

$$3y^2y' - x(2yy') - y^2 - (\sin xy)(xy' + y) = 0$$

$$3y^2y' - 2xyy' - y^2 - xy'(\sin xy) - y(\sin xy) = 0$$

$$y'(3y^2 - 2xy - x(\sin xy)) = y^2 + y(\sin xy)$$

$$y' = \frac{y^2 + y(\sin xy)}{3y^2 - 2xy - x(\sin xy)}$$

Di titik $(0, 1)$ maka $y' = \frac{1}{3}$, sehingga persamaan garis singgung di $(0, 1)$ yaitu:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

Teorema A (Aturan Pangkat):

Misalkan r sebarang bilangan rasional, maka untuk $x > 0$

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Jika r dapat dituliskan dalam suku terendah sebagai $r = \frac{p}{q}$ dengan $q$ganjil maka:

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}, untuk\ semua\ x$$

Bukti:

Karena r rasional maka r dapat ditulis sebagai $\frac{p}{q}$, $p\ dan\ q$ bilangan bulat dan $q > 0$.

Misalkan:

$$y = x^r = x^{\frac{p}{q}}\ maka\ diperoleh\ y^q = x^p$$

Dan diferensiasi implisit yaitu:

$$qy^{q-1}D_x y = px^{p-1}$$

Sehingga diperoleh:

$$D_x y = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} == \frac{p}{q} x^{p-1-p+\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$$

Contoh:

Jika $y = 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x^2+1}$ maka tentukan $D_x y$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema A dan aturan rantai maka diperoleh:

$$y = 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x^2+1}$$

$$D_x y = 2D_x x^{\frac{5}{3}} + D_x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} == 2 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} + \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x) == \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soal Latihan:

1. Asumsikan bahwa masing-masing persamaan berikut mendefinisikan sebuah fungsi dalam x yang terdiferensiasi. Tentukan $D_x y$ dengan menggunakan diferensiasi implisit:
   a. $y^2 - x^2 = 1$
   b. $xy = 1$
   c. $xy^2 = x - 8$

d. $4x^2 + 7xy^2 = 2y^3$

e. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$

f. $xy + \sin(xy) = 1$

2. Tentukan persamaan garis singgung sesuai dengan titik yang telah ditentukan:

a. $x^3y + y^3x = 30$ di titik $(1, 3)$

b. $\sin(xy) = y$ di titik $(\frac{\pi}{2}, 1)$

c. $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - 2y = 2$ di titik $(1, -1)$

3. Tentukan $\frac{dy}{dx}$

a. $y = 3x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x}$

b. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

c. $y = \sqrt[3]{3x^2 - 4x}$

d. $y = \frac{1}{(x^3+2x)^{\frac{2}{3}}}$

e. $y = \sqrt{x^2 + \sin x}$

f. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+\sin x}}$

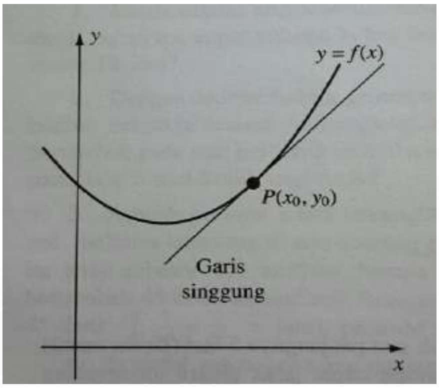
g. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x)}$

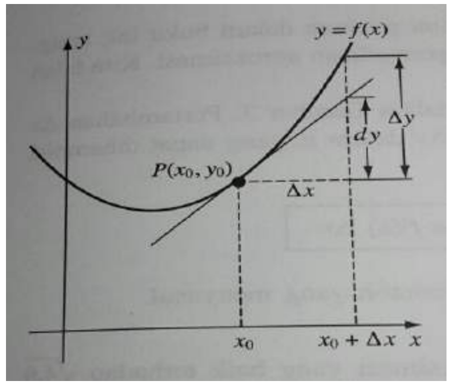
4. Apabila $s^2t + r^3 = 1$ maka tentukan $\frac{ds}{dt}\ dan\ \frac{dt}{ds}$

5. Apabila $y = \sin(x^2) + 2x^3$ maka tentukan $\frac{dx}{dy}$

3.7. Diferensial dan Aproksimasi

Notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}$ telah digunakan untuk turunan $y\ terhadap\ x$. Notasi $\frac{dy}{dx}$ digunakan sebagai operator untuk turunan (dari apapun yang mengikuti $\frac{d}{dx}$) terhadap x. Jadi $\frac{d}{dx}$ dan D_x sinonim. Hingga saat ini, telah diberlakukan $\frac{dy}{dx}$ $(atau\ \frac{d}{dx})$ sebagai lambang tunggal belaka dan tidak mencoba memberikan makna tersendiri pada $D_y\ dan\ D_x$ sehingga perlu memberikan makna terhadap D_y dan terhadap D_x





1. **Definisi Diferensial:**

Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi terdiferensiasi dari variabel bebas x.

Δx adalah pertambahan sebarang dalam variabel bebas x

dx disebut **diferensial variabel bebas** x, adalah sama dengan Δx

Δx adalah perubahan sebenarnya dalam variabel y ketika x berubah dari $x\ ke\ x + \Delta x$ yaitu $y = f(x + \Delta x) - f(x)$

dy disebut **diferensial variabel tak bebas** y, didefinisikan oleh $dy = f'(x)dx$

Contoh:

Tentukan dy apabila:

(1) $y = x^3 - 3x + 1$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

(3) $y = \sin(x^4 - 3x^2 + 11)$

Penyelesaian:

Apabila telah mengetahui bagaimana menghitung turunan maka tahu bagaimana menghitung diferensial, sehingga cukup menghitung turunan dan mengalikannya dengan dx

(1) $y = x^3 - 3x + 1$ maka:

$$dy = (3x^2 - 3)d$$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ maka:

$$y = (x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3)dx$$

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}}} dx = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}} dx$$

(3) $y = \sin(x^4 - 3x^2 + 11)$ maka:

$$dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) \cdot (4x^3 - 6x)dx$$

Perhatikan bahwa dapat dikatakan:

$$dy = f'(x)dx$$

$$\Downarrow$$

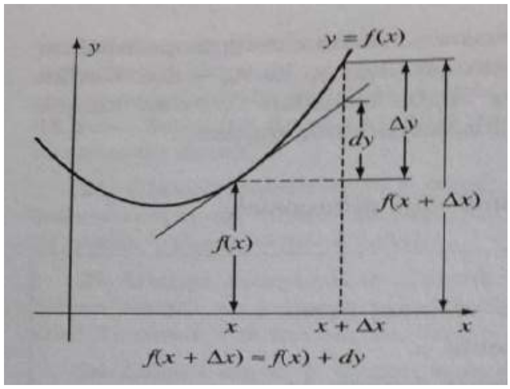
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Sehingga dapat dilustrasikan aturan-aturan dalam tabel berikut:

N0	ATURAN TURUNAN	ATURAN DIFERENSIAL
1	$\frac{dk}{dx} = 0$	$dk = 0$
2	$\frac{d(ku)}{dx} = k\frac{du}{dk}$	$d(ku) = k\,du$
3	$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	$d(u+v) = du + dv$
4	$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	$d(uv) = u\,dv + v\,du$
5	$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
6	$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$d(u^n) = nu^{n-1}du$

2. Aproksimasi

Diferensial mempermainkan beberapa peranan, tetapi saat ini penggunaan utamanya yaitu dalam penyediaan aproksimasi. Misalkan, $y = f(x)$ yang tampak dalam gambar berikut:



Pertambahan Δx menghasilkan pertambahan yang berkorespondensi Δy dalam y yang dapat dihampiri oleh dy, sehingga $f(x+\Delta x)$ dihampiri oleh:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + dy = f(x) + f(x)\Delta x$$

Rumus tersebut sebagai acuan dalam menyelesaian permaslahan yang ada.

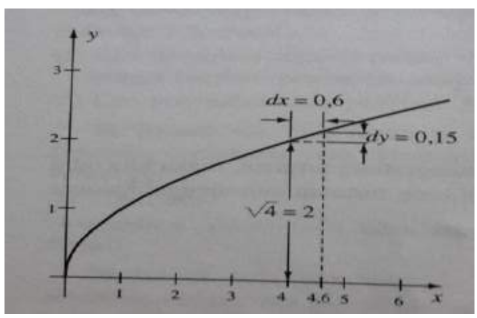
Contoh:

(1) Misalkan Anda memmerlukan aproksimasi yang baik terhadap $\sqrt{4,6}\ dan\ \sqrt{8,2}$ tetapi kalkulutor Anda mati. Apa yang mungkin Anda kerjakan?

(2) Gunakan diferensial untuk mengaproksimasikan pertambahan luas sebuah gelombang sabun pada saat jari-jarinya bertambah dari 3 inci menjadi 3,25 inci.

Penyelesaian:

(1) Tinjau grafik $y = \sqrt{x}$ yang disketsakan dalam gambar berikut:



Ketika x berubah dari 4 ke 4,6 maka $\sqrt{x}$ berubah dari $\sqrt{4} = 2$ ke (***secara aproksimasi***) $\sqrt{4} + dy$.

Sehingga diperoleh:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\ maka\ dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Pada saat $x = 4\ dan\ dx = 0{,}6$ memiliki nilai:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0,6) = \frac{0,6}{4} = 0{,}15$$

Sehingga diperoleh: $\sqrt{4,6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0{,}15 = 2{,}15$

Ketika x berubah dari 9 ke $8,2$ maka $\sqrt{x}$ berubah dari $\sqrt{9} = 3$ ke (***secara aproksimasi***) $\sqrt{9} + dy$

Pada saat $x = 9\ dan\ dx = -0,8$ memiliki nilai:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0,8) = \frac{-0,8}{6} \approx -0{,}133$$

Sehingga diperoleh: $\sqrt{8,2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0,133 = 2{,}867$

Nilai-nilai aproksimasi $2,15\ dan\ 2,867$ boleh dibandingkan terhadap nilai-nilai yang sebenarnya hingga empat posisi decimal yaitu $2,1448\ dan\ 2,8636$

(2) Luas gelembung bola sabun diberikan oleh $A = 4\pi r^2$ maka boleh mengaproksimasi nilai sebenarnya, $\Delta A\ dengan\ diferensial\ dA$ dengan:

$$A = 4\pi r^2$$

$$dA = 8\pi r\ dr$$

Pada $r = 3$ dan $\Delta r = 0{,}025$ maka: $dA = 8\pi(3)(0{,}025) \approx 1{,}885\ inci\ persegi$

Soal Latihan:

Tentukan dy:

(1) $y = x^2 + x - 3$

(2) $y = (2x + 3)^{-4}$

(3) $y = (\sin x + \cos x)^3$

(4) $y = (7x^2 + 3x - 1)^{\frac{-3}{2}}$

(5) $y = \sqrt{(t^2 - \cos t + 2)^3}$

BAB IV

APLIKASI TURUNAN

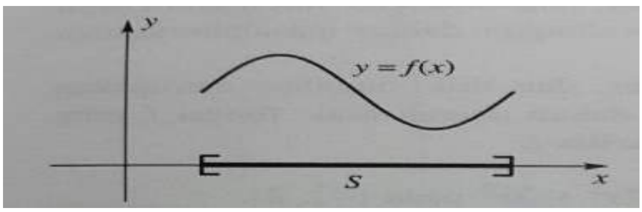
4.1. Maksismum dan Minimum

Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x)$ dengan daerah asal S maka ada tiga pertanyaan sebagai berikut:

(1) Apakah $f(x)$ memiliki nilai maksimum dan minimum pada S?

(2) Jika $f(x)$ mempunyai nilai maksimum atau minimum maka dimanakah nilai-nilai tersebut dicapai?

(3) Apabila nilai-nilai itu ada maka berapakah nilai-nilai maksimum dan minimum itu?



1. Definisi:

Misalkan S, daerah asal f, mengandung titik c. Dikatakan bahwa:

a. $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S

b. $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S

c. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum

d. Fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan adalah **fungsi objektif**

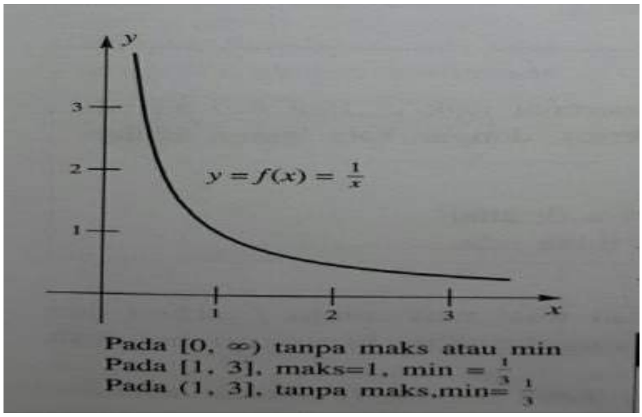
Apakah f mempunyai nilai maksimum (atau minimum) pada S? Jawabannya bergantung pertama-tama pada himpunan S tersebut dengan meninjau fungsi sebagi berikut:

a. $f(x) = \frac{1}{x}\ pada\ S = (0, \infty)$; fungsi ini tidak mempunyai nilai maksimum atau minimum.

b. $f(x) = \frac{1}{x}\ pada\ S = [1, 3]$; fungsi ini mempunyai nilai maksimum:

$$f(1) = 1\ dan\ f(3) = \frac{1}{3}.$$

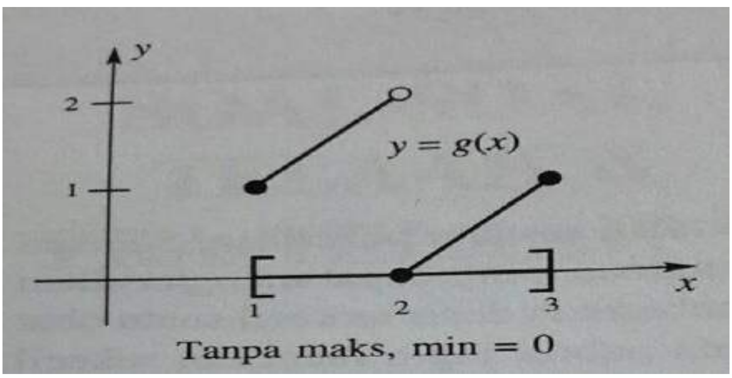
c. $f(x) = \frac{1}{x}\ pada\ S = (1,3]$; fungsi ini tidak mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum $f(3) = \frac{1}{3}$



Jawaban juga tergantung pada jenis fungsi dengan meninjau fungsi diskontinu yang didefinisikan:

$$g(x) = \begin{cases} x, jika\ 1 \leq x < 2 \\ x - 2, jika\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Pada $S = [1, 3]$, fungsi g tidak mempunyai nilai maksimum (cukup dekat dengan 2 tetapi tidak pernah mencapainya) dan mempunyai nilai minimum $g(2) = 0$.



2. **Teorema A (Teorema Keberadaan Maksimum-Minimum)**

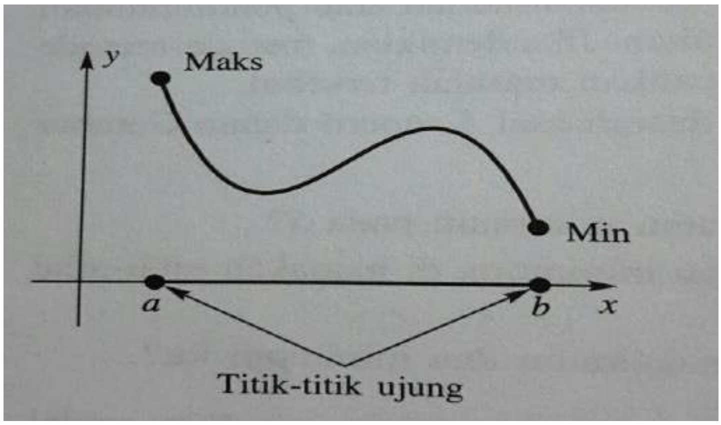
   Apabila f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ maka f mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum disana.

   Perhatikan kata-kata kunci dalam teorema A: ***f* *disyaratkan harus kontinu dan himpunan S disyaratkan harus berupa interval tertutup***.

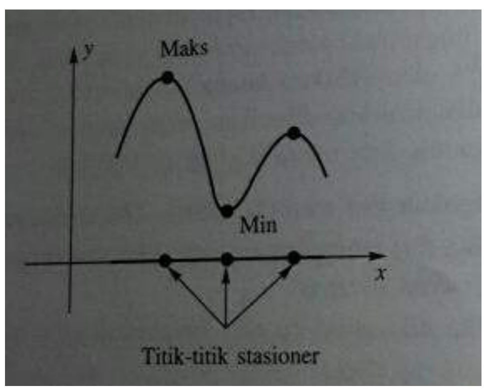
Umumnya fungsi objektif mempunyai suatu interval I sebagai daerah asalnya, tetapi interval ini boleh berupa sebarang dari berbagai type interval. Beberapa permasalahan yaitu:

a. Misalkan $I = [a, b]$ yang memuat kedua titik ujungnya; $[a, b)$ hanya memuat tiitk ujung kiri; (a, b) sama sekali tidak memuat titik ujung.

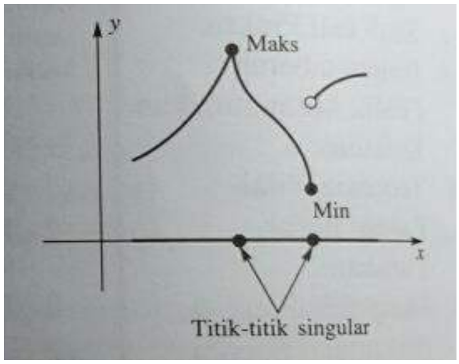
   Nilai-nilai ekstrim dari fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup seringkali terjadi pada titik-titik ujung yang tampak pada gambar berikut:



b. Jika c sebuah titik tempat $f'(x) = 0$ disebut ***titik stasioner***. Nama itu dari fakta bahwa pada titik stasioner maka grafik f mendatar katen garis singgung mendatar. Nilai-nilai ekstrim seringkali terjadi pada titik stasioner yang tampak pada gambar berikut:



c. Jika c merupakan titik dalam dari I dan f' tidak ada maka titik c disebut ***titik singular***. Pada titik singular maka f memiliki sudut yang tajam, garis singgung vertical, atau berupa loncatan, atau di dekatnya grafik bergoyang sangat buruk. Nilai-nilai ekstrim dapat terjadi pada titik-titik singular yang tampak pada gambar berikut:



d. Ketiga jenis titik yaitu titik ujung, titik stasioner dan titik singular merupakan titik-titik kunci dari teori maksimum minimum. Sebarang titik dalam daerah asal fungsi f yang termasuk salah satu dari tiga type ini disebut ***titik kritis***.

Contoh:

Tentukan titik-titik kritis dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2\ pada\ \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

Penyelesaian:

Titik-titik ujung adalah $-\frac{1}{2}\ dan\ 2.$

Untuk mencari titik stasioner dipecahkan $f(x) = -6x^2 + 6x = 0$

Untuk x diperoleh 0 dan 1. Tidak ada titik-titik singular

Jadi titik-titik kritisnya adalah $-\frac{1}{2}, 0, 1\ dan\ 2$

3. Teorema B (Teorema Titik Kritis)

Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim maka c haruslah berupa satu titik kriti. Dengan kata lain, c adalah salah satu dari:

a. Titik ujung dari I

b. Titik stasioner dari f; yaitu titik dimana $f'(c) = 0$ atau

c. Titik singular dari f; yaitu titik dimana $f'(c)\ tidak\ ada$

Bukti:

Perhatikan pada kasus pertama, dengan $f(c)$ adalah nilai maksismum f pada I dan misalkan bahwa c bukan titik ujung ataupun titik singular maka harus dibuktikan bahwa c adalah titik stasioner.

Sekarang, karena $f(c)$ adalah nilai maksimum maka $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I yaitu:

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Jika $x < c$ sehingga $x - c < 0$ maka:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad (1)$$

Sedangkan jika $x > c$ maka:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad (2)$$

Tetapi $f'(c) ada$, karena c bukan titik singular.

Akibanya, ketika misalkan $x \to c^-$ dalam (1) dan $x \to c^+$ dalam (2) maka diperoleh masing-masing $f'(c) \geq 0 \; dan \; f'(c) \leq 0$, sehinga disimpulkan bahwa $f'(c) = 0$ (dalam pembuktian ini berarti digunakan fakta bahwa pertidaksamaan $\leq$ tidak beribah pada operasi pengambilan limit.

4. Nilai Ekstrim

Dari teorema A dan B dapat disederhanakan saat menghitung nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi kontinu f pada $interval\ tertutup\ I$.

Langkah 1: carilah titik-titik kritis f pada I

Langkah 2: hitunglah f pada setiap titik kritis, yang terbesar diantara nilai-nilai adalah maksimum dan yang terkecil adalah minimum

Contoh:

Tentukan nilai-nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x^3$ pada $[-2, 2]$

Penyelesaian:

$$f'(x) = 3x^2$$

Ketika $x = 0$ maka $f'(x) = 0$ maka titik kritisnya adalah $x = 0$ dan titik-titik ujungnya adalah $x = -2 \; dan \; x = 2$.

Perhitungan f pada titik-titik kritis menghasilkan:

$$f(-2) = -8, f(0) = 0 \ dan \ f(2) = 8$$

Jadi nilai maksimum f adalah 8 (tercapai di $x = 2$) dan nilai minimum adalah -8 (tercapai di $x = -2$).

Perhatikan pada contoh di atas, tampak bahwa $f'(0) = 0$ tetapi f tidak mencapai suatu minimum ataupun maksimum di $x = 0$. Hal ini tidak bertentangan dengan teorema B *karena teorema B menyatakan bahwa jika* c *adalah titik kritis maka* $f(c)$ *adalah suatu minimum atau maksimum dan teprema B menyatakan bahwa jika* $f(c)$ *adalah minimum atau maksimum maka* c *adalah titik kritis.*

Contoh:

(1) Tentukan nilai-nilai maksimum dan minimum dari:$f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

(2) Fungsi $F(x) = x^{\frac{2}{3}}$ kontinu dimana-mana. Tentukan nilai-nilai maksimum dan minimumnya pada $[-1,2]$

(3) Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x + 2\cos x$ pada $[-\pi, 2\pi]$

Penyelesaian:

(1) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$, maka:

$$f'(x) = -6x^2 + 6x$$

Titik-titik ujung adalah $-\frac{1}{2} \ dan$ 2.

Untuk mencari titik stasioner dipecahkan $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$

Untuk x diperoleh 0 dan 1. Tidak ada titik-titik singular

Diperoleh titik-titik kritisnya adalah $-\frac{1}{2}, 0, 1 \ dan$ 2, sehingga:

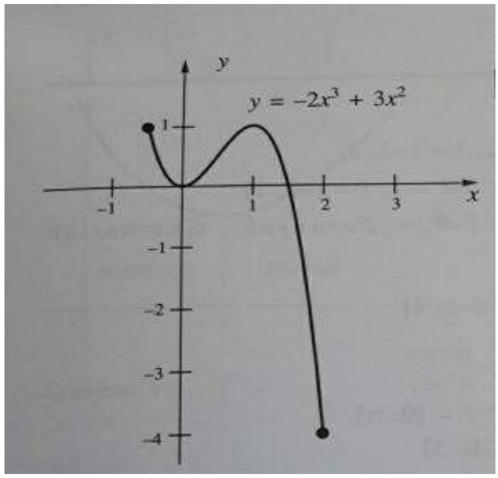
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = -4$$

Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai di $-\frac{1}{2} \ dan$ 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai di 2).



(2) Fungsi $F(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada $[-1{,}2]$, maka:

$$F'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

sehingga diperoleh:

$F'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ tidak pernah nol, tetapi $F'(x)$ tidak ada dan 0 $adalah\ titik\ kritis.$

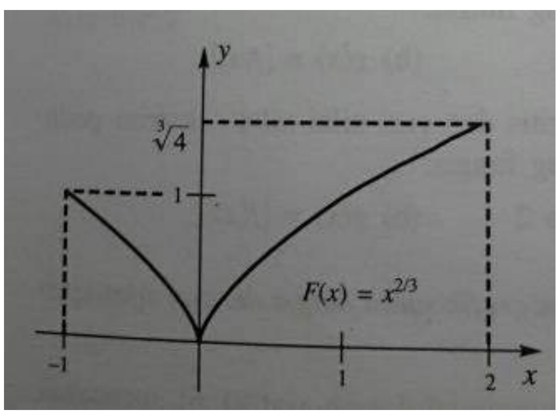
Titik-titik ujungnya $-1\ dan\ 2$

$$F(-1) = 1$$

$$F(0) = 0$$

$$F(2) = \sqrt[3]{4}$$

Jadi nilai maksimum adalah $\sqrt[3]{4}$ dan nilai minimum adalah 0



(3) Fungsi $f(x) = x + 2\cos x$ pada $[-\pi, 2\pi]$, maka:

$$f'(x) = 1 - 2\sin x$$

Yang terdefinisi pada $(-\pi, 2\pi)$ dan $nol\ ketika$ $\sin x = \frac{1}{2}$.

Satu-satunya dalam interval $[-\pi, 2\pi]$ yang memenuhi $\sin x = \frac{1}{2}$ adalah:

$$x = \frac{\pi}{6}\ dan\ x = \frac{5\pi}{6}$$

Sehingga diperoleh titik-titik kritis adalah $-\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, 2\pi$

Nilai fungsi pada titik-titik kritis:

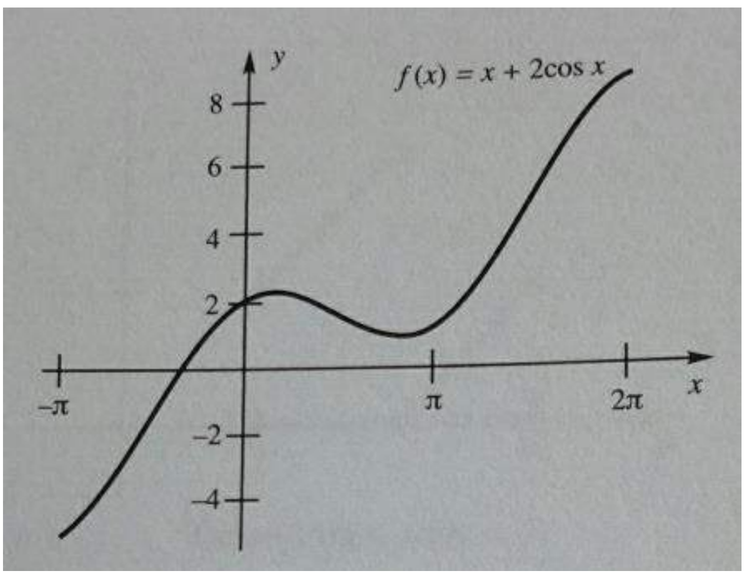
$$f(-\pi) = -2 - \pi \approx -5{,}14$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2{,}26$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} \approx 0{,}89$$

$$f(2\pi) = 2 + 2\pi \approx 8{,}28$$

Jadi nilai maksimum adalah $2 + 2\pi$ (tercapai di $x = 2\pi$) dan nilai minimum adalah $-2 - 2\pi$ (tercapai di $x = -\pi$).

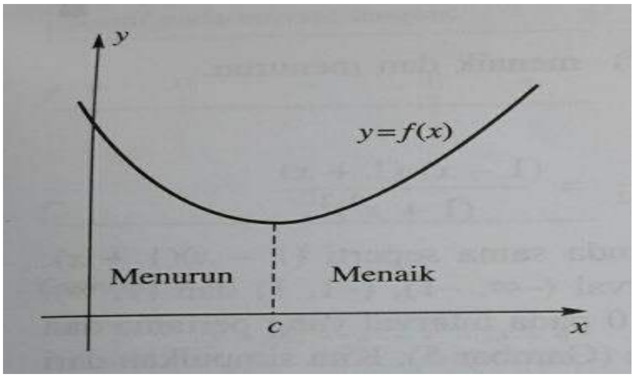


Soal-soal latihan:

1. Telaah Konsep:
   a. Suatu fungsi ……………. pada suatu interval …………… akan selalu mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada interval tersebut.
   b. Istilah nilai …….. menyatakan suatu nilai maksimum dan minimum
   c. Suatu fungsi dapat mencapai nilai ekstrim hanya pada titik kritis. Titik-titik kritis ada tiga tipe yaitu : …………………, …………….. dan ……………….
   d. Titik stasioner untuk f adalah sebuah nilai c sedemikian hingga ……………. dan titik singular untuk f adalah sebuah nilai c sehingga ………………………
2. Tentukan titik-titik kritis, nilai maksimum dan nilai minimum pada interval yang diberikan:
   a. $f(x) = x^2 + 4x + 4\ pada\ I = [-4,0]$
   b. $h(x) = x^2 + 3x\ pada\ I = [-2,1]$
   c. $g(x) = \frac{1}{x}\ pada\ I = [-1,3]$
   d. $h(x) = x^4 - 2x^2 + 2\ pada\ I = [-2,2]$
   e. $f(\theta) = \sin\theta\ pada\ I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
   f. $g(x) = \sqrt[3]{x}\, pada\ I = [-1, 27]$
   g. $h(t) = \cos t\ pada\ I = [0, 8\pi]$
   h. $f(x) = \theta^2 \sec\theta\ \ pada\ I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
3. Tentukan titik-titik kritis dan nilai ekstrim pada $[-1,5]$ untuk masing-masing fungsi:
   a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 2$
   b. $g(x) = |f(x)|$

4.2. Kemonotonan dan kecekungan

Sebagai ilustrasi untuk memahami grafik naik dan grafik turun, maka perhatikan gambar berikut:



Dari gambar tersebut dapat dikatakan bahwa f turun di kiri c dan naik di kanan c.

Definisi:

Misalkan f terdefinisi pada interval I (terbuka, atau tak satupun). Dikatakan bahwa:

a. $f\ naik\ pada\ I$, jika untuk setiap pasangan bilangan $x_1\ dan\ x_2$ dalam I maka:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

b. $f\ turun\ pada\ I$, jika untuk setiap pasangan bilangan $x_1\ dan\ x_2$ dalam I maka:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

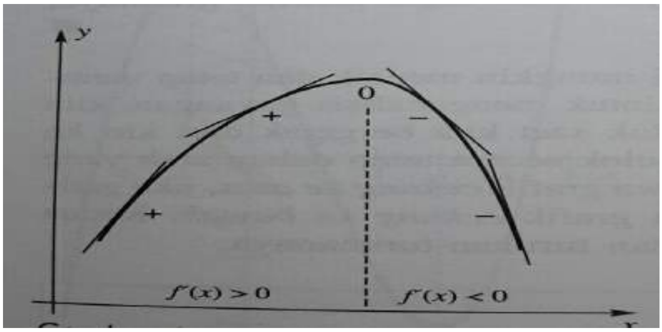
c. $f\ monoton\ murni\ pada\ I$, jika f naik pada I atau turun pada I

1. Turunan Pertama dan Kemonotonan

Perhatikan untuk diingat kembali bahwa:

a. Turunan pertama $f'(x)$ memberikan kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x, sehingga $f'(x) > 0$ maka garis singgung menaik ke kanan yang berarti bahwa f menaik

b. Turunan pertama $f'(x)$ memberikan kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x, sehingga $f'(x) < 0$ maka garis singgung menurun ke kanan yang berarti bahwa f menurun



Teorema A (Teorema Kemonotonan):

Misalkan f kontinu ada interval I dan terdefinisikan pada setiap titik dalam dari I maka:

a. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik-dalam I maka $f\ naik\ pada\ I$

b. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik-dalam I maka $f\ turun\ pada\ I$

Contoh:

(1) Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, tentukan dimana f naik dan dimana f turun

(2) Tentukan dimana $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$ menaik dan menurun

Penyelesaian:

(1) Diawali dengan mencari turunan f

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$$

Selanjutnya mencari nilai x yang memenuhi:

$$(x + 1)(x - 2) > 0$$

Dan juga yang memenuhi:

$$(x + 1)(x - 2) < 0$$

Sehingga diperoleh:

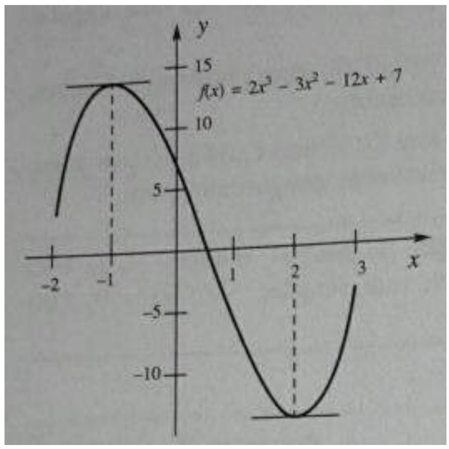
$$x = -1\ dan\ x = 2$$

Dengan interval yaitu: $(-\infty,-1),(-1,2),(2,\infty)$, yang dilakukan titik-titik uji, maka:

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 2 & \end{array}$$

Menurut teorema A diperoleh kesimpulan bahwa:

a. Fungsi naik pada $(-\infty,-1)\ dan\ (2,\infty)$
b. Fungsi turun pada $(-1,2)$



(2) Diawali dengan mencari turunan f

$$g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$$

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

Karena penyebut harus selalu positif maka maka $g'(x)$ mempunyai tanda sama yaitu $(1-x)(1+x)$, sehingga diperoleh:

$$x = -1\ dan\ x = 1$$

Dengan interval yaitu: $(-\infty,-1),(-1{,}1),(1,\infty)$, yang dilakukan titik-titik uji, maka:

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

Menurut teorema A diperoleh kesimpulan bahwa:

a. Fungsi turun pada $(-\infty,-1)\ dan\ (1,\infty)$
b. Fungsi naik pada $(-1,1)$

2. Turunan Kedua dan Kecekungan

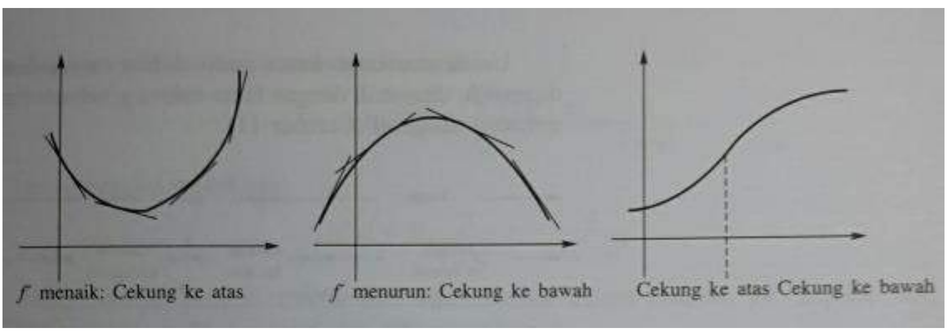
Suatu fungsib mungkin menaik dan tetp mempunyai grafik yag sangat bergoyang dengan analisa yaitu:

a. Jika garis singgung berbelok secara tetap dalam arah yang berlawanan arah putaran jarum jam maka dikatakan grafik cekung ke atas
b. Jika garis singgung berbelok secara tetap dalam arah yang searah putaran jarum jam maka dikatakan grafik cekung ke bawah

Definisi:

Misalkan f terdefinisi pada interval terbuka maka dikatakan bahwa f (dan grafiknya) ***cenderung ke atas*** pada *I* jika $\boldsymbol{f'}$ **menaik** pada I dan f (dan grafiknya) ***cenderung ke bawah*** pada *I* jika $\boldsymbol{f'}$ **turun** pada I.

Keterkaitan dengan teorema A maka dapat dikatakan bahwa turunan kedua dari f adalah turunan pertama dari f', sehingga $f'naik\ jika\ f''positif\ dan\ f'turun\ jika\ f''negatif$.



Teorema B (Teorema Kecekungan):

Misalkan f terdefinisikan dua kali pada interval terbuka I maka:

a. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I maka f **cekung ke atas** pada *I*
b. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I maka f ***cekung ke bawah*** pada *I*

Contoh:

(1) Dimana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ menaik, menurun, cekung ke atas dan cekung ke bawah?

(2) Dimana $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$ cekung ke atas dan dimana cekung ke bawah? Sketsalah grafiknya g.

Penyelesaian:

(1) Fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ dengan turunan:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$
$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

Untuk $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ maka mencari nilai x yaitu:

$$(x+1)(x-3) > 0$$

Dan

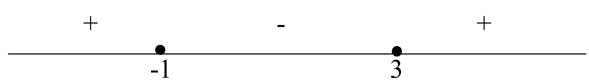
$$(x+1)(x-3) < 0$$

Sehingga diperoleh:

$$x = -1 \; dan \; x = 3$$

Sehingga intervalnya:

$$(-\infty, 1], (-1, 3), [3, \infty)$$



Diperoleh kesimpulan bahwa:

a. Fungsi f menaik pada $(-\infty, 1] dan \; [3, \infty)$
b. Fungsi f turun pada $(-1, 3)$

Untuk $f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$ maka mencari nilai x yaitu:

$$2(x-1) > 0$$

Dan

$$2(x-1) < 0$$

Sehingga diperoleh: $x = 1$

Dengan intervalnya:

$$(-\infty, 1) dan\ (1, \infty)$$

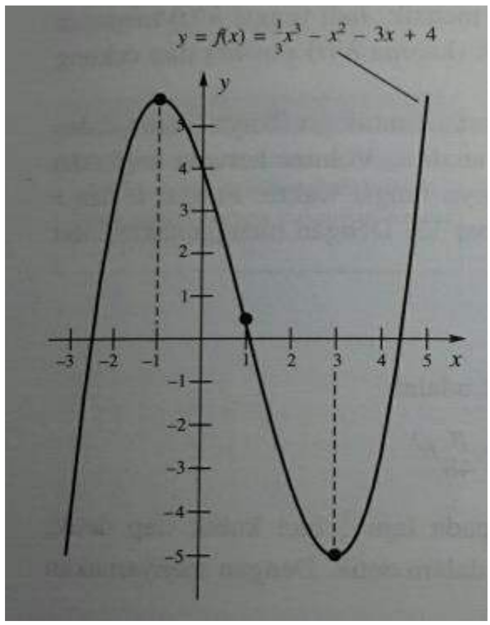
$+ \qquad\qquad\qquad -$

$\overset{\circ}{1}$

Diperoleh kesimpulan bahwa:

a. Fungsi f cekung ke bawah pada (-∞, 1)

b. Fungsi f cekung ke atas pada $(1, \infty)$



(2) Fungsi $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$

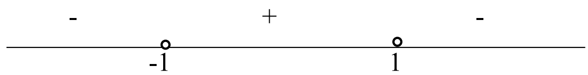
$$g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$$

$$g'(x) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

Karena penyebut harus selalu positif maka $g'(x)$ mempunyai tanda sama yaitu $(1-x)(1+x)$, sehingga diperoleh:

$$x = -1\ dan\ x = 1$$

Dengan interval yaitu: $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$, yang dilakukan titik-titik uji, maka:



Menurut teorema A diperoleh kesimpulan bahwa:

a. Fungsi turun pada $(-\infty,-1)\ dan\ (1,\infty)$
b. Fungsi naik pada $(-1,1)$

Untuk turunan kedua:

$$g'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$g''(x)=\frac{(1+x^2)^2(-2x)-(1-x^2)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{(1+x^2)[(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(1+x^2)(2x)]}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

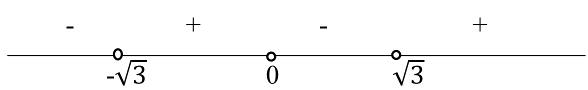
Karena penyebut selalu positif maka hanya perlu menyelesaikan:

$$2x(x^2-3)>0$$

Sehingga diperoleh:

$$x=-\sqrt{3},x=0\ \ dan\ x=\sqrt{3}$$

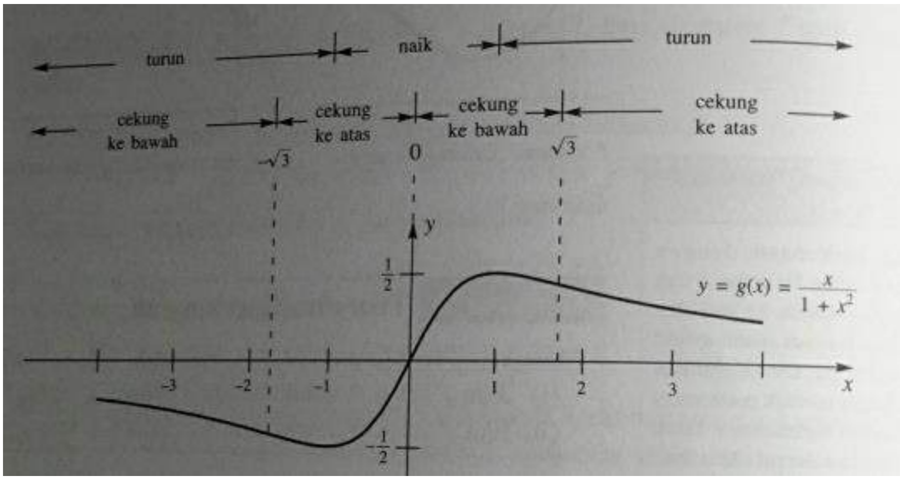
Dengan interval $(-\infty,-\sqrt{3}),(-\sqrt{3},0),(0,\sqrt{3}),(\sqrt{3},\infty)$ dengan dilakukan titik-titik uji:



Diperoleh kesimpulan bahwa:

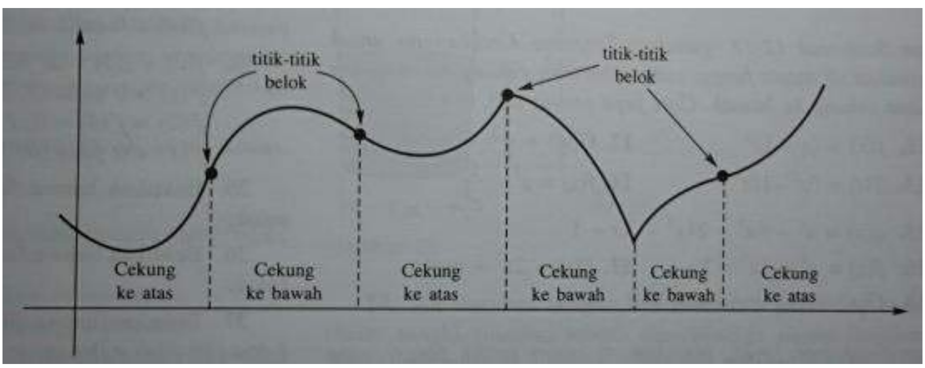
a. Fungsi f cekung ke bawah pada $(-\infty,-\sqrt{3})\ dan\ (0,\sqrt{3})$
b. Fungsi f cekung ke atas pada $(-\sqrt{3},0)\ dan\ (\sqrt{3},\infty)$

Sketsa grafik:



3. Titik Belok

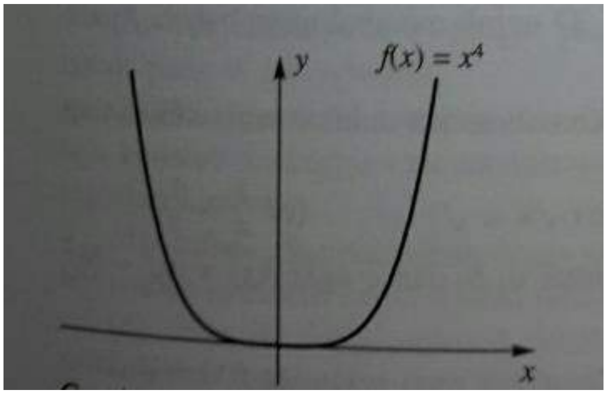
Misalkan f kontinu di c, maka $(c, f(c))$ merupakan suatu titik belok (*inflection point*) dari grafik f jika f cekung ke atas pada suatu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c, dengan beberapa kemungkinan:



Titik-titik dimana $f'''(x) = 0$ atau dimana $f'''(x)\ tidak\ ada$ merupakan calon-calon titik belok. Kata calon berarti ada kemungkinan berhasil atau gagal sebagai ttitik belok, misalnya titik dengan $f'''(x) = 0$ mungkin gagal menjadi suatu titik belok.

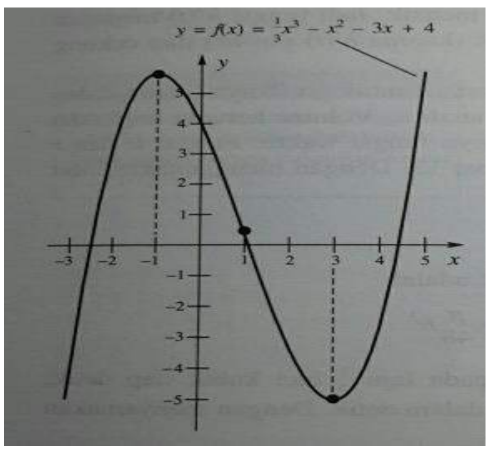
Contoh:

(1) Untuk $f(x) = x^4$ dengan gambar berikut:



Diperoleh bahwa benar $f'''(x) = 0$ $maka$ $f'''(0) = 0$, tetapi titik asal bukan titik belok. Hal ini karena dalam mencar titik belok, diawali dengan mengenali apakah titik-titik dengan sifat $f'''(x) = 0$ (dan titik dimana $f'''(x)$ $tidak\ ada$), selanjutnya memeriksa apakah titik-titik tersebut benar-benar merupakan titik-titik belok.

(2) Perhatikan saat grafik $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ (contoh seselumnya)



Tampak terlihat bahwa fungsi tersebut memiliki tiga titik belok yaitu $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right), (0,0) dan \left(\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$

(3) Tentukan semua titik belok untuk $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$

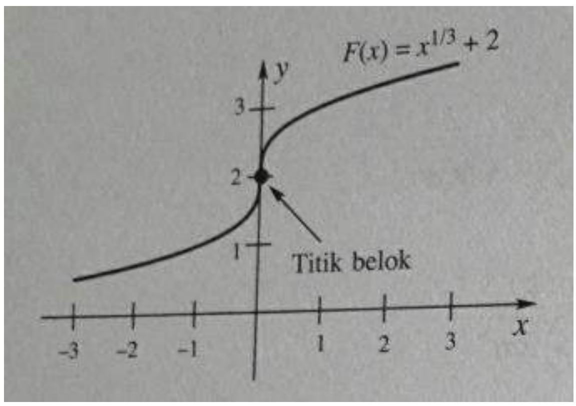
Penyelesaian:

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f''^{(x)} = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$$

Turunan kedua, $f''(x)$ tidak pernah nol tetapi gagal untuk ada di $x = 0$. Titik $(0, 2)$ merupakan titik belok karena $f'''(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $f'''(x)$ untuk $x > 0$.

Fungsi tergambar sebagai berikut:



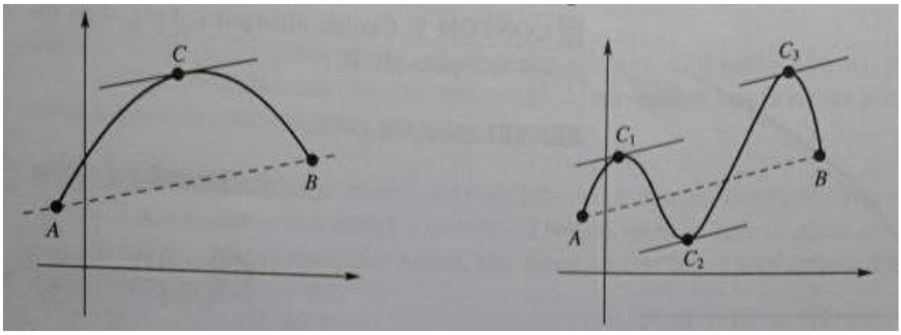
Soal-soal latihan:

1. Telaah konsep:
   a. Jika $f'(x) > 0$ dimana-mana maka f adalah ……….., dimana-mana; jika$f'(x) > 0$ dimana-mana maka f adalah …………….
   b. Jika ………… dan ………….. pada interval terbuka I maka f menaik dan cekung ke bawah pada I.
   c. Sebuah titik ada grafik suatu fungsi kontinu tempat kecekungan berubah arah disebut ……….
   d. Dalam mencoba melokasikan titik-titi belok untuk grafik suatu fungsi f, seharusnya mencari bilangan c yang atau ………… atau …………….

2. Gunakan teorema kemonotonan untuk mencari dimana fungsi yang diberikan **naik** dan dimana **turun**:
   a. $f(x) = 3x + 3$
   b. $f(t) = t^2 + 2t - 3$
   c. $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
   d. $h(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{4z^3}{6}$
   e. $h(t) = \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$
3. Gunakan teorema kecekungan untuk menentukan dimana fungsi yang diberikan **cekung ke atas** dan dimana **cekung ke bawah**. Tentukan **titik belok**:
   a. $f(x) = (x-1)^2$
   b. $f(t) = 3t^3 - 18t$
   c. $g(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$
   d. $f(x) = 2x^2 + cos^2x$
4. Tentukan dimana fungsi **naik, turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah**:
   e. $f(x) = x^3 - 12x + 1$
   f. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$
   g. $g(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
   h. $f(x) = \sqrt{\sin x}\ di\ [0, \pi]$
   i. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$
5. Pada interval $[0, 6]$ sketsalah grafik suatu fungsi f yang memenuhi semua syarat yang dinyatakan:
   a. $f(0) = 1; f(6) = 3;$ menaik dan cekung ke bawah pada $(0,6)$
   b. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4; f(x) < 0\ pada\ (0,3); f'(x) > 0\ pada\ (3,6);$
   $f''^{(x)} > 0\ pada\ (0,5); f''(x) > 0\ pada\ (5,6)$

4.3. Teorema Nilai Rataan untuk Turunan

Teorema nilai rataan mudah dinyatakan dan dipahami. Teorema mengatakan bahwa jika grafik sebuah fungsi kontinu mempunyai garis singgung tegak pada setiap titik antar A dan B, maka terdapat paling sedikit satu titik C pada grafik di antara A dan B sehingga garis singgung di titik C sejajar tali busur AB.



1. Teorema A (Teorema Nilai Rataan untuk Turunan)

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdefinisikan pada titik dalamnya (a, b) maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a, b) dengan:

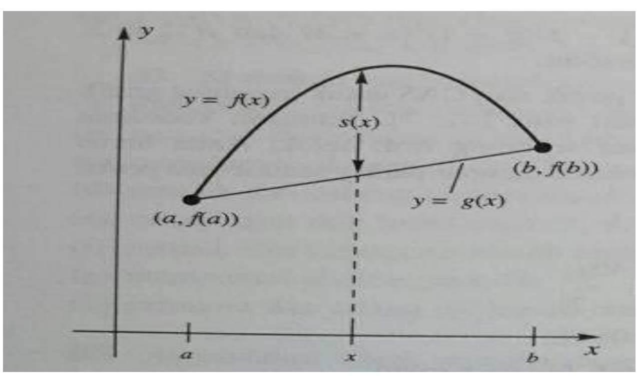
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Atau secara setara:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Bukti:

Analisis skema fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$ yang tampak pada gambar berikut:



Tampak bahwa $y = g(x)$ merupakan persamaan garis yang melalui $\big(a, f(a)\big) dan\ (b, f(b))$. Garis ini memiliki kemiringan $\frac{[f(b)-f(a)]}{(b-a)}$ dan melalui titik $(a, f(a))$, bentuk kemiringan – titik untuk persamaannya adalah:

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Kemudian menghasilkan rumus untuk $s(x)$:

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Perhatikan bahwa $s(b) = s(a) = 0$ dan untuk x dalam (a, b) maka:

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Perhatikan, apabila terdapat suatu bilangan c dalam (a, b) yang memnuhui $s'(c) = 0$ maka akan selesai, karena persamaan terakhir menyatakan bahwa:

$$0 = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Yang setara dengan kesimpulan teorema tersebut.

Untuk melihat bahwa $s'(c) = 0$ untuk suatu c dalam (a, b) dengan alasan yaitu:

a. s kontinu pada $[a, b]$ karena merupakan selisih dua fungsi kontinu, sehingga menurut teorema maksimum minimum maka s harus mencapai baik nilai maksimum ataupun minimum pada $[a, b]$. Apabila kedua nilai kebetulan adalah nol maka $s(x)$ secara identik adalah 0 pada $[a, b]$ akibatnya $s'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b), jauh lebih banyak dari yang diperlukan.

b. Jika salah satu nilai maksimum atau nilai minimum berlainan dengan 0 maka nilai tersebut dicapai pada sebuah titik dalam c, karena $s(a) = s(b) = 0$. Sekarang s mempunyai turunan di setiap titik dari (a, b) sehingga menurut teorema kritis maka $s'(c) = 0$.

Contoh:

(1) Tentukan bilangan c dengan teorema nilai rataan untuk $f(x) = 2\sqrt{x}\ pada\ [1,4]$

(2) Misalkan $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1\ pada\ [-1,2]$. Tentukan semua bilangan yang memenuhi kesimpulan terhadap teorema nilai rataan.

(3) Misalkan $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\ pada\ [-8,27]$ maka perlihatkan bahwa kesimpulan terhadap teorema nilai rataan gagal dan jelaskan mengapa demikian.

Penyelesaian:

(1) $f(x) = 2\sqrt{x}\ pada\ [1,4]$

Maka:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Dan

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

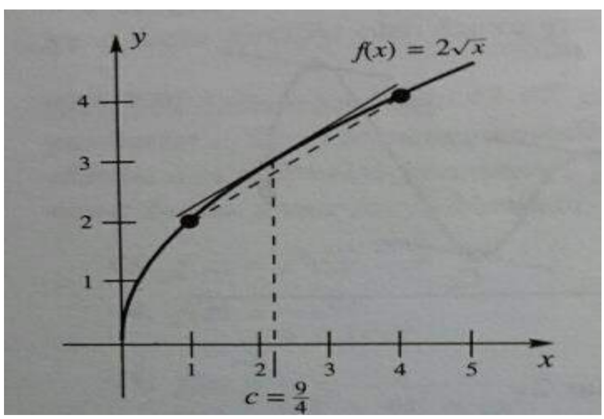
Sehingga:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$

Penyelesaian tunggalnya yaitu:

$$c = \frac{9}{4}$$

Tampak pada gambar berikut:



(2) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \; pada \; [-1,2]$

Maka:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Dan:

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Sehingga:

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$

Atau secara setara:

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

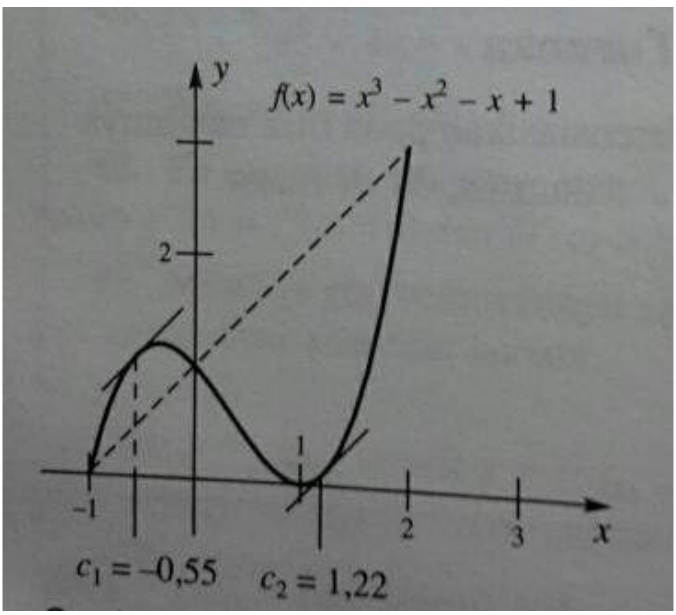
Penyelesaian ada dua yaitu:

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6}$$

$$c_1 \approx -0{,}55 \; dan \; c_2 \approx 1{,}22$$

Kedua bilangan tersebut berada dalam interval $(-1, 2)$

Tampak pada gambar berikut:



(3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\, pada\ [-8, 27]$

Maka:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\, dengan\ x \neq 0$$

Dan:

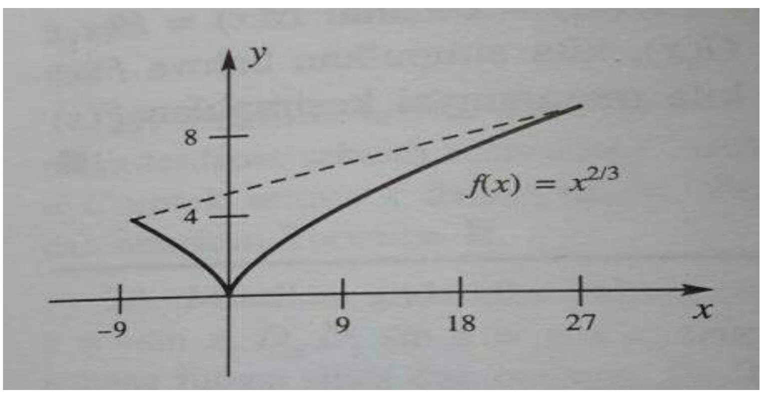
$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Sehingga:

$$\frac{2}{3}c^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{7}$$

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$$

Tetapi $c = 102\ tidak\ pada\ inerval\ (-8, 27)$ seperti yang diisyaratkan dan tampak pada grafik bahwa $f'(0) gagal\ ada$, sehingga $f(x)$ tidak terdefinisikan dimana-mana pada $(-8, 27)$



2. **Teorema B**

Jika $F'(x) = G'(x)$ untuk semua x dalam (a, b) maka terdapat konstanta c sedemikian rupa sehingga:

$$F(x) = G(x) + c$$

Untuk semua x dalam (a, b).

Bukti:

Misalkan $H(x) = F(x) - G(x)$ maka:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x)$$

Untuk semua x dalam (a, b).

Pilih x_1 sebagai suatu titik (tetap) dalam (a, b) dan misalkan x sebarang titik lain disana. Fungsi H memenuhui hipotesis teorema nilai rataan pada interval tertutup dengan titik-titik ujung $x_1\ dan\ x$. Jadi terdapat bilangan c sedemikian rupa sehingga:

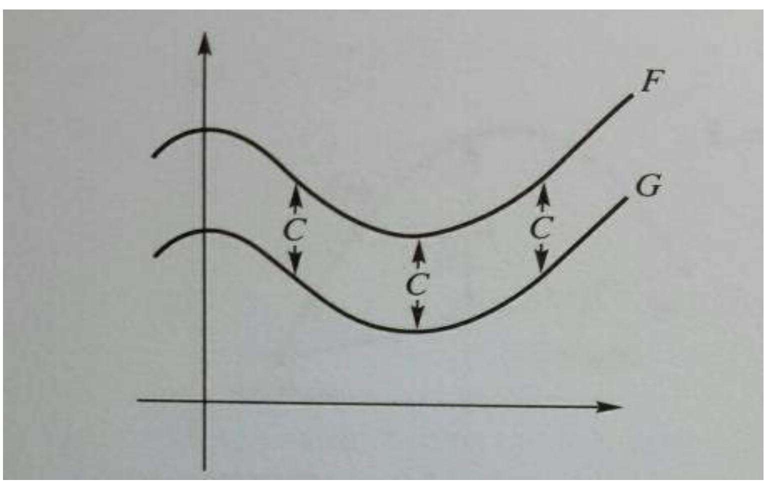
$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Tetapi menurut hipotesis $H'(c) = 0$, sehingga $H(x) - H(x_1) = 0$

Atau $H(x) - H(x_1)$ untuk semua x dalam (a, b).

Karena $H(x) = F(x) - G(x)$ dapat disimpulkan bahwa $F(x) - G(x) = H(x_1)$

Misalkan $c = H(x_1)$ maka disimpulkan bahwa $F(x) = G(x) + c$



Soal-soal latihan:

1. Telaah konsep:
   a. Teorema nilai rataan untuk turunan menyatakan bahwa jika f ………… pada (a, b) dan terdiferensiasikan pada …………… maka terdapat suatu titik c dalam (a, b) sedemikian rupa sehingga …………………..
   b. Fungsi $f(x) = |\sin x|$ akan memenuhui hipotesis teorema nilai rataan pada interval $[0,1]$ tetapi tidak memenuhuinya pada interval $[-1, 1]$ karena …………………
   c. Jika dua fungsi $F\ dan\ G$ mempunya turunan yang sama pada interval (a, b) maka terdapat kontanta C sedemikian rupa sehingga ……………
   d. Karena $D_x(x^4) = 4x^3$ maka jelas bahwa fungsi F yang memenuhui $F'(x) = 4x^3$ mempunyai bentuk $F(x) =$ …………………………………
2. Didefinisikan sebuah fungsi dan diketahui sebuah interval tertutup. Putuskan apakah teorema nilai rataan dapat diberikan terhadap fungsi yang diketahui pada interval yang diberikan? Jika demikian, cari semua nilai c yang mungkin dan sketsalah grafik fungsi yang diketahui dengan interval yang diberikan!
   a. $f(x) = x^2 + x\ ;\ [-2, 2]$
   b. $H(s) = s^2 + 3s - 1\ ;\ [-3, 1]$
   c. $f(z) = \frac{1}{3}(z^2 + z - 4)\ ;\ [-1, 2]$
   d. $h(x) = \frac{x}{x-3}\ ;\ [0, 2]$
   e. $h(t) = t^{\frac{2}{3}}\ ;\ [0, 2]$
   f. $G(\theta) = \sin\theta\ ;\ [-\pi, \pi]$
   g. $f(x) = x + \frac{1}{x}\ ;\ [1, 2]$
3. Gunakan teorema nilai rataan untuk memperlihatkan bahwa $s = \frac{1}{t}$ menurun pada sebarang interval dimana didefinisikan.

4.4. Anti-Turunan

Matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan, diantaranya penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pemangkatan dan penarikan akar. Apabila memecahkan persamaan yang melibatkan turunan maka memerlukan balikannya yaitu anti-turunan atau anti-diferensiasi atau integrasi (integral).

Definisi:

F merupakan suatu anti turunan f pada interval I jika $D_xF(x) = f(x)$ pada I yaitu jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I

Notasi anti-turunan merupakan notasi asal Leibviz dengan menggunakan lambing $\int ... dx$, sehingga:

$$D_x \int f(x)dx = f(x) \quad dan \quad \int D_x f(x)dx = f(x) + C$$

Teorema A (Teorema Aturan Pangkat)

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1 maka:

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

Bukti:

Turunan ruas kanan adalah:

$$D_x \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r + C$$

Teorema ini mencakup $r = 0$ yaitu:

$$\int 1\ dx = x + C$$

Teorema ini tidak ada interval I yang dirinci, maka dipahami hanya untuk interval tempat x^r terdefinisi. Secara khusus, yang mengecualikan interval yang mengandung titik asal jika $r < 0$.

Anti-turunan merupakan integral tak tentu. Anti-diferensiasi juga berarti integrasi.
Lambang $\int f(x)\ dx$, lambing $\int$ $disebut\ tanda\ integral$ dan $f(x)$ $disebut\ integran.$

Leibniz menggunakan kata sifat tak-tentu (indefinite) untuk menyatakan secara tidak langsung bahwa integral tak-tentu selalu melibatkan konstanta sebarang.

Contoh:

(1) Tentukan anti-turunan fungsi $f(x) = x^2$

(2) Tentukan anti-turunan fungsi $f(x) = 4x^3$

Penyelesaian:

(1) Anti-turunan $f(x) = x^2$

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$$

(2) Anti-turunan $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

$$\int x^{\frac{4}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C$$

Teorema B

$$\int \sin x \;\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \;\, dx = \sin x + C$$

Bukti:

Cukup lihat bahwa $D_x(-\cos x + C) = \sin x$ dan $D_x(\sin x + C) = \cos x$

4.5. Integral Tak-Tentu adalah Linear

Perhatikan bahwa pada turunan, D_x merupakan suatu operator linear, yang memiliki dua sifat yaitu:

$$D_x[k\, f(x)] = kD_x f(x)$$

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x\, f(x) + D_x\, g(x)$$

Dari dua sifat tersebut maka menyusul sifat ketiga secara otomatis yaitu:

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x\, f(x) - D_x\, g(x)$$

Ternyata bahwa $\int \ldots dx$ juga memiliki sifat-sifat operator linear.

Teorema C (Integral Tak-Tentu adalah Operator Linear)

Misalkan $f\ dan\ g$ mempunyai anti-turunan (integral tak-tentu) dan misalkan k suatu konstanta, maka:

$$\int k\, f(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

Bukti:

Untuk memperlihatkan sifat yang pertama dan kedua, cukup mendiferensiasikan ruas kanan dan perhatikan bahwa diperoleh integran dari ruas kiri:

$$D_x\left[k \int f(x)dx\right] = kD_x \int f(x)dx = k\, f(x)$$

$$D_x\left[\int f(x)\ dx + \int g(x)dx\right] = D_x \int f(x)\, dx + D_x \int g(x)\, dx = f(x) + g(x)$$

Sifat yang ketiga diperoleh dari sifat pertama dan kedua.

Contoh:

Menggunakan kelinearan $\int$, hitunglah:

(1) $\int (3x^2 + 4x)\, dx$

(2) $\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u + 14\right)\, du$

(3) $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right)\, dt$

Penyelesaian:

(1) $\int (3x^2 + 4x)\, dx$

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 4x)\, dx &= \int 3x^2\ dx + \int 4x\ dx \\ &= 3\int x^2\ dx + 4\int x\ dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{3} + C_2\right) \\ &= x^3 + 2x^2 + (3C_1 + 4C_2) \\ &= x^3 + 2x^2 + C\end{aligned}$$

Dua konstanta $C_1\ dan\ C_2$ digabunga dalam sautu konstanta C merupakan suatu hal yang secara konsisten selalu diikuti.

(2) $\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u + 14\right)\, du$

$$\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u + 14\right)\, du = \int u^{\frac{3}{2}}\, du - 3\int u\, du + 14\int 1\, du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}u^2 + 14u + C$$

(3) $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right)\, dt$

$$\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right)\, dt = \int \left(t^{-2} + t^{\frac{1}{2}}\right)\, dt = \int t^{-2}\, dt + \int t^{\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \frac{t^{-2}}{-1} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{t} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

4.6. Aturan Pangkat yang Digeneralisir

Perhatikan ketika aturan rantai diterapkan pada pangkat suatu fungsi. Jika $u = g(x)$ merupakan fungsi yang dapat didiferensiasi dan r suatu bilangan rasional $(r \neq -1)$, maka:

$$D_x\left[\frac{u^{r+1}}{r+1}\right] = u^r \cdot D_x u$$

Atau dengan cara penulisan fungsional:

$$D_x\left[\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right] = [g(x)]^r \cdot g'(x)$$

Akibatnya diperoleh suatu aturan penting untuk integral tak-tentu.

Teorema D (Aturan Pangkat yang Digeneralisir)

Misalkan g suatu fungsi yang dapat didiferensiasi dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1 maka:

$$\int [g(x)]^r \cdot g'(x)\, dx = \left[\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right] + C \; dengan \; r \neq -1$$

Atau jika dimisalkan:

$$u = g(x) \quad maka \quad du = g'(x)dx$$

Sehingga diperoleh:

$$\int u^r\, du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C \; dengan \; r \neq -1$$

Jadi aturan pangkat yang digeneralisir hanyalah aturan pangkat biasa yang diterapkan pada fungsi, tetapi dalam menerapkannya harus selalu yakin mempunyai du bersama-sama dengan u^r.

Contoh:

Hitunglah:

(1) $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3)\ dx$

(2) $\int \sin^{10} x \cos x\ dx$

(3) $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12)\ dx$

(4) $\int (x^2 + 4)^{10} x\ dx$

Penyelesaian:

(1) $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3)\ dx$

Misalkan:

$$g(x) = x^4 + 3x$$

Maka:

$$g'(x) = 4x^3 + 3$$

Menurut teorema D:

$$\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3)\ dx = \int [g(x)]^{30}\ g'(x)\ dx$$

$$= \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C = \frac{[x^4 + 3x]^{31}}{31} + C$$

(2) $\int \sin^{10} x \cos x\ dx$

Misalkan:

$$g(x) = \sin x$$

Maka:

$$g'(x) = \cos x$$

Menurut teorema D:

$$\int \sin^{10} x \cos x\ dx = \int [g(x)]^{30}\ g'(x)\ dx$$

$$= \frac{[g(x)]^{11}}{11} + C = \frac{\sin^{11} x}{11} + C$$

(3) $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12)\ dx$

Misalkan:

$$u = x^3 + 6x$$

Maka:

$$du = (3x^2 + 6)\,dx$$

Dan:

$$(6x^2 + 12)\,dx = 2(3x^2 + 6)\,dx = 2\,du$$

Sehingga diperoleh:

$$\int (x^3 + 6x)^5\,(6x^2 + 12)\,dx = \int u^5\ 2\,du = 2\int u^5\ du = 2\left[\frac{u^6}{6} + C\right] = \frac{u^6}{3} + 2C$$

$$= \frac{(x^3 + 6x)^6}{3} + K$$

(4) $\int (x^2 + 4)^{10} x\ dx$

Misalkan:

$$u = x^2 + 4$$

Maka:

$$du = 2x\,dx$$

Sehingga diperoleh:

$$\int (x^2 + 4)^{10}\,x\,dx = \int (x^2 + 4)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x\ dx = \frac{1}{2}\int u^{10}\ du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} + C\right)$$

$$= \frac{(x^2 + 4)^{11}}{11} + K$$

Soal-soal latihan:

1. Tentukan anti-turunan umum $F(x) + C$
   a. $f(x) = 5$
   b. $f(x) = x^2 + \pi$
   c. $f(x) = x^{\frac{5}{4}}$
   d. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
   e. $f(x) = x^2 - x$
   f. $f(x) = 4x^5 - x^3$
   g. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 24x^3 + \sqrt{2x}$
   h. $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}$
   i. $f(x) = \frac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$

2. Tentukan integral tak-tentu yang ditunjuk:

   a. $\int (x^2 + x)\ dx$

   b. $\int (x + 1)^2\ dx$

   c. $\int \frac{(z^2+1)^2}{\sqrt{z}}\ dz$

   d. $\int (\sin\theta - \cos\theta)\ d\theta$

3. Gunakan aturan pangkat yang digeneralisir dengan u sebagai variabel pada integral tak-tentu berikut:

   a. $\int \left(\sqrt{2}x + 1\right)^3 \sqrt{2}\ dx$

   b. $\int (5x^2 + 1)\,(5x^3 + 3x - 8)^6\, dx$

   c. $\int (\pi x^3 + 1)^4\ 3\pi x^2\, dx$

   d. $\int (5x^2 + 1)\sqrt{(5x^3 + 3x - 2)}\ dx$

   e. $\int 3t\ \sqrt[3]{2t^2 - 11}\ dt$

   f. $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2+5}}\ dy$

   g. $\int x^2\ \sqrt{x^3 + 4}\ dx$

   h. $(x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}\, dx$

   i. $\int \sin x\ (1 + \cos x)^4\ dx$

4. Tentukn $\int f''(x)\ dx\ jika\ f(x) = x\ \sqrt{x^3 + 1}$

5. Misalkan $u = \sin(x^2 + 4)^4$ maka tentukan $\int \sin^2 x\ \ dx$

BAB V

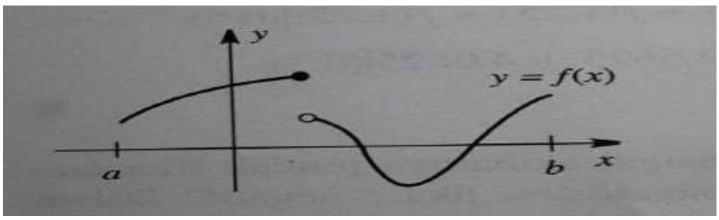
INTEGRAL TENTU

5.1. Jumlah Rienmann

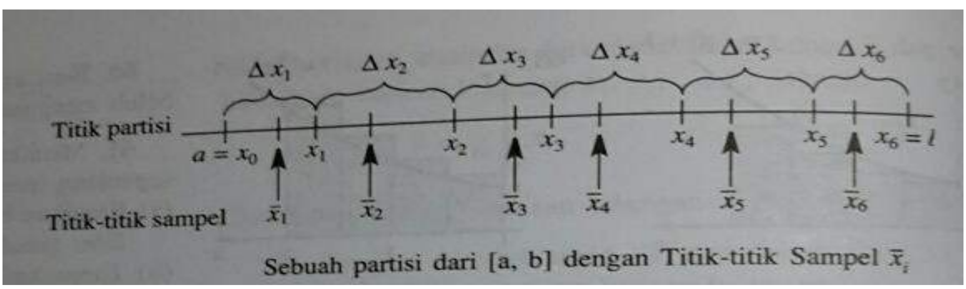
Newton dan Leibniz keduanya memperkenalkan versi awal tentang konsep ini, tetapi Georg Friedrich Bernhard Reinmann (1826-1866) yang memberikn definisi modern dengan gagasan pertama yaitu jumlah Riemann.

Definisi:

Misalkan sebuah fungsi f didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Fungsi ini bisa bernilai positif ataupun negative pada interval tersebut dan bahkan tidak perlu kontinu. Grafik tampak berikut:



Misalkan suatu patisi P membagi interval $[a, b]$ menjadi n interval-bagian (tidak perlu sama panjang) dengan menggunakan titik-titik $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dan misalkan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebuah titik sebarang $\bar{x}_i$ (yang mungkin saja sebuah titik ujung) yang disebut sebagai titik sampel untuk interval bagian ke-i. Sebuah contoh dari konstruksi ini diperlihatkan dalam gambar berikut untuk $n = 6$.

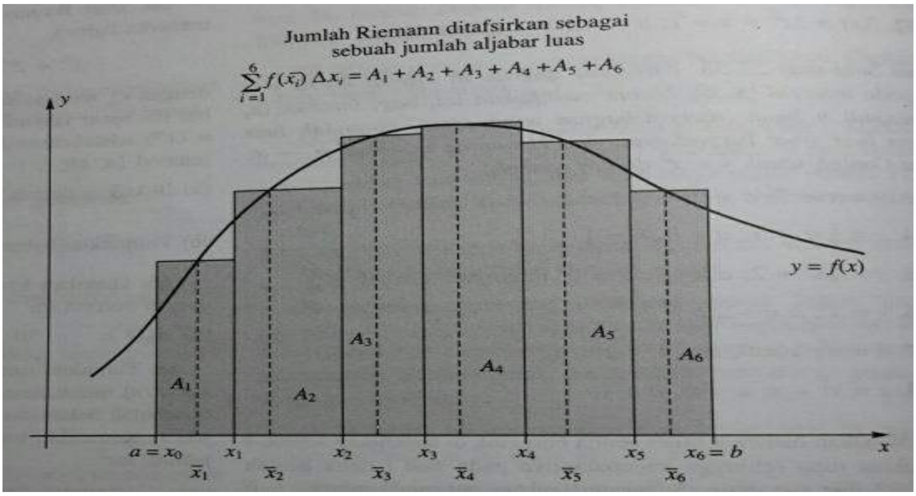


Sebuah partisi dari [a, b] dengan Titik-titik Sampel $\bar{x}_i$

Disebut jumlah:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$$

Jumlah Rienmann untuk f yang berpadanan terhadap partisi P. Tafsiran (interpretasi) geometrinya diperlihatkan dalam gambar berikut:

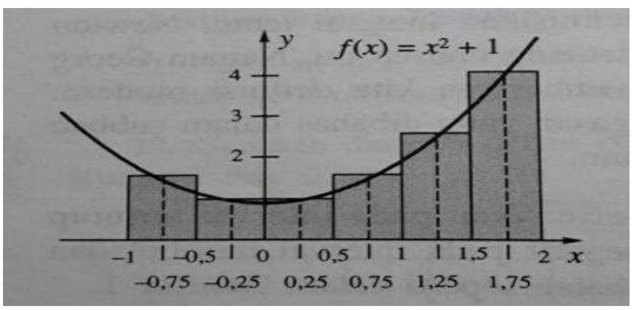


Contoh:

Hitung jumlah Rienmann untuk $f(x) = x^2 + 1\; pada\; interval\; [-1, 2]$ dengan menggunakan titik-titik partisi berjarak sama $-1 < -0{,}5 < 0 < 0{,}5 < 1 < 1{,}5 < 2$ dengan titik sampel $\bar{x}_i$ berupa titik tengah dari interval bagian ke-i.

Penyelesaian:

$f(x) = x^2 + 1\; pada\; interval\; [-1, 2]$ yang tampak pada gambar berikut:



$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

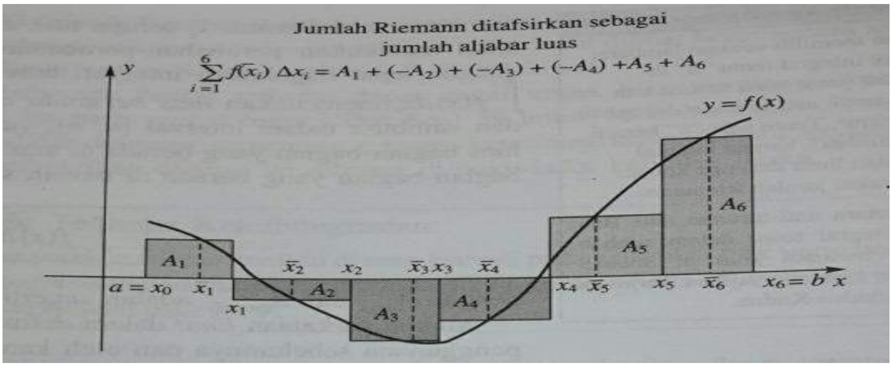
$$R_p = [f(-0{,}75) + f(-0{,}25) + f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}25) + f(1{,}75)](0{,}5)$$

$$= [1{,}5625 + 1{,}0625 + 1{,}0625 + 1{,}5625 + 2{,}5625 + 4{,}0625](0{,}5)$$

$$= 5{,}9375$$

Fungsi pada gambar diatas merupakan positif, akibatnya jumlah Rienmann hanyalah sejumlah luas segiempat-segiempat, tetapi bagaimana jika negatif?

Pada kasus ini titik sampel $\bar{x}_i$ dengan sifat bahwa $f(\bar{x}_i) < 0$ akan mengarah ke segiempat yang sepenuhnya berada di bawah sumbu x dan hasil kali $f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ akan negative. Hal ini berarti segiempat-segiempat yang demikian terhadap jumlah Rienmann adalah negatif yang tampak pada gambar berikut:



Contoh:

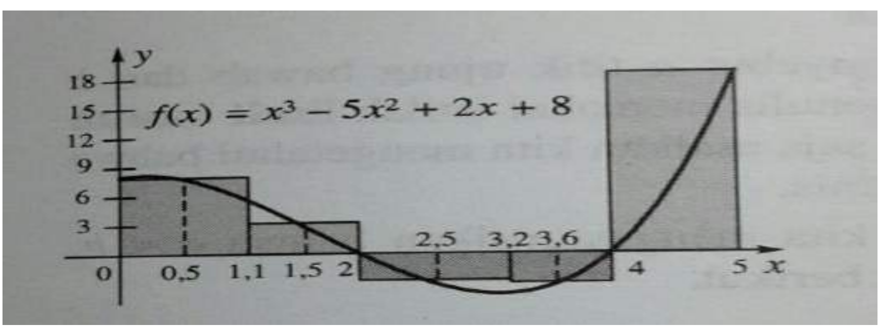
Hitung jumlah Rienmann R_p untuk:

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

Pada interval $[0, 5]$ dengan menggunakan partisi P dengan titik-titik $0 < 1{,}1 < 2 < 3{,}2 < 4 < 5$ dan titik-titi sampel yang berpadanan $\bar{x}_1 = 0{,}5$; $\bar{x}_2 = 1{,}5$; $\bar{x}_3 = 2{,}5$; $\bar{x}_4 = 3{,}6\ dan\ \bar{x}_5 = 5$.

Penyelesaian:

$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ pada interval $[0, 5]$ tampak pada gambar berikut:



$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

$$R_p = \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

$$= f(\bar{x}_1)\ \Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\ \Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\ \Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\ \Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\ \Delta x_5$$

$$= f(0{,}5)(1{,}1 - 0) + f(1{,}5)(2 - 1{,}1) + f(2{,}5)(3{,}2 - 2) + f(3{,}6)(4 - 3{,}2) + f(5)(5 - 4)$$

$$= (7{,}875)(1{,}1) + (3{,}125)(0{,}9) + (-2{,}625)(1{,}2) + (-2{,}944)(0{,}8) + 18(1) = 23{,}9698$$

5.2. Integral Tentu

Definisi integral tentu:

Misalkan bahwa $P, \Delta x_i\ dan\ \bar{x}_i$ memiliki arti seperti yang telah dibahas dan tetapkan $\|P\|$ disebut $norma\ (norm) P$ yang menyatakan panjang interval bagian yang terpanjang dari partisi P. Misalnya dalam contoh pertama berarti $\|P\| = 0{,}5$ dan contoh yang kedua berarti $\|P\| = 3{,}2 - 2 = 1{,}2$

Teorema A (Integral Tentu):

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i \quad ada$$

Maka dikatakan f adalah ***terintegrasikan*** pada $[a, b]$.

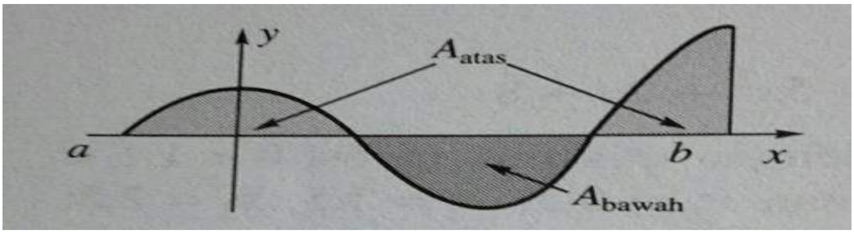
Lebih lanjut $\int_a^b f(x)\ dx$ disebut ***integran tentu*** (atau integral Rienmann) f dari a ke b kemudian diberikan oleh:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

Secara umum, $\int_a^b f(x)\ dx$ menyatakan luas bertanda daerah yang terkurung diantara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x dalam interval $[a, b]$ yang berarti bahwa tanda positif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di atas sumbu x dan tanda negatif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di bawah sumbu x dengan lambang:

$$\int_a^b f(x)\ dx = A_{atas} - A_{bawah}$$

Tampak pada gambar berikut:



Atau:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Dengan a sebagai titik ujung bawah (limit bawah) dan b sebagai titik ujung atas (limit atas) untuk integral.

Perkataan *limit* dalam definisi tenatang integral tentu lebih umum ketimbang penggunaan sebelumnya dan oleh karenanya perlu dijelaskan. Identitas:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i = L$$

Berarti bahwa berpadanan terhadap setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

Untuk semua jumlah Rienmann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ untuk f pada $[a, b]$ yang memenuhi norma $\|P\|$ partisi yang berhubungan adalah lebih kecil dari δ, sehingga dikatakan bahwa limit yang ditunjuk itu bernilai L.

Dalam definisi $\int_a^b f(x)\ dx$, secara implisit diasumsikan bahwa $a < b$ sehingga diperoleh:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx,\ \ a > b}$$

Misalnya:

(1) $\int_2^2 x^3\ dx$, maka: $\int_2^2 x^3\ dx = 0$

(2) $\int_6^2 x^3\ dx$, maka: $\int_6^2 x^3\ dx = -\int_2^6 x^3\ dx$

Variabel x merupakan variabel boneka (*dummy variabel*) sehingga x bisa diganti sebarang huruf lain (tentu saja, asalkan diganti di setiap kemunculannya):

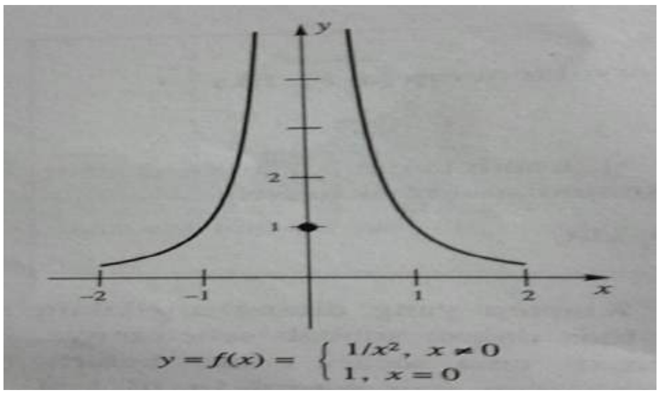
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(u)\ du$$

Tidak setiap fungsi terintegrasikan pada interval tertutup $[a, b]$.

Misalnya: Fungsi tak terbatas:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} & jika\, x \neq 0 \\ 1 & jika\, x = 1 \end{cases}$$

Tampak pada gambar berikut yang tidak terintegrasikan pada $[-2, 2]$:



Terlihat bahwa untuk fungsi tek terbatas ini jumlah Rienmann dapat dibuat besar secara sebarang limit jumlah Rienmann pada $[-2, 2]$ $tidak\ ada$.

Bahkan beberapa fungsi terbatas dapat gagal untuk bisa terintegasikan tetapi fungsi-fungsi itu pasti sangat rumit.

Teorema di bawah ini merupakan teorema terpenting tentang keintegrasian, tetapi sangat sulit untuk dibuktikan sehingga dibahas pada kalkulus lanjut.

Teorema B (Teorema Keintegrasian)

Jika f terbatas pada $[a, b]$ dan kontinu di sana kecuali pada sejumlah titik yang berhingga maka f terintegrasikan pada $[a, b]$, khususnya jika f kontinu pada seluruh interval $[a, b]$ maka f terintegrasikan pada $[a, b]$.

Akibatnya fungsi-fungsi berikut dapat terintegrasikan pada setiap interval tertutup $[a.b]$, yaitu:

a. Fungsi Polinomial
b. Fungsi Sinus dan Cosinus
c. Fungsi Rasional, asalkan $[a, b]$ tidak mengandung titik-titik yang mengakibatkan penyebut nol.

Perhitungan integral tentu dengan menggunakan ***partisi beraturan*** (interval-interval bagian sama panjang) dan mengambil titik sampel $\bar{x}_i$ dalam cara yang mudah dipahami.

Teorema C (Sifat Penambahan Interval)

Jika f terintegrasikan pada interval yang memuat titik $a, b, dan\ c$ maka:

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

Tidak peduli apapun urutan $a, b, dan\ c$.

Misalnya:

$$\int_0^2 f(x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^2 f(x)\ dx$$

5.3. Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Teorema dasar kalkulus pertama menghubungkan turunan dan integral tentu, jenis limit terpenting yang sudah diperlajari.

Teorema A (Teorema Dasar Kalkulus Pertama)

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan misalkan x sebarang titik (variabel) dalam (a, b) maka:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$

Teorema B (Sifat Perbandingan)

Jika $f\ dan\ g$ terintegrasikan pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam $[a, b]$ maka:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x) dx}$$

Dalam bahasa tak resmi tetapi deskriptif dikatakan bahwa integral tentu mempertahankan pertidaksamaan.

Teorema C (Sifat Keterbatasan)

Jika f terintegrasikan pada $[a,b]$ dan jika $m \le f(x) \le M$ untuk semua x dalam $[a,b]$ maka:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Integral Tentu pada Operasi Linear

Sebelumnya telah diperlajari bahwa $D_x, \int \dots\ dx, dan \sum$ merupakan operator linear dan dapat menambahkan $\int_a^b \dots\ dx$ ke daftar tersebut.

Teorema D (Kelinearan Integral Tentu)

Misalkan bahwa $f\ dan\ g$ terintegrasikan pada $[a,b]$ dan k adalah konstants maka $kf\ dan\ f+g$ adalah terintegrasi dan:

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Contoh:

Menurut teorema dasar kalkulus pertama, hitunglah:

1. $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\ dt\right]$
2. $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^2+17}}\ dt\right]$
3. $\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 tan^2 u \cos u\ \ du\right]$
4. $D_x\left[\int_1^{x^2} (3t-1)\ dt\right]$

Penyelesaian:

3. $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\, dt\right] = x^3$

2. $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^2+17}}\, dt\right] = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2+17}}$

3. $\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 tan^2 u \cos u\ du\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_4^x tan^2 u \cos u\ du\right] = tan^2 x \cos x$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_4^x tan^2 u \cos u\ du\right] = -tan^2 x \cos x$$

Pertukaran limit atas dan limit bawah diperbolehkan jika kita beri tanda kurang di depan (ingat kembali definisi) bahwa: $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x) dx$

4. $D_x\left[\int_1^{x^2} (3t-1)\, dt\right]\ dengan\, u = x^2$

Menurut aturan rantai, turunan terhadap x dari fungsi komposit yaitu:

$$D_u\left[\int_1^u (3t-1)\, dt\right] \cdot D_x u = (3u-1)(2x)$$

$$= (3(x^2)-1)(2x) = 6x^3 - 2x$$

Cara lain untuk mencari turunan yaitu dengan menghitung integral tentu kemudian menggunakan aturan untuk turunan. Integral tentu $\int_1^{x^2}(3t-1)\, dt$ merupakan luas di bawah garis $y = 3t - 1$ di antara $t = 1\, dan\, t = x^2$ sehingga diperoleh luas trapesium yaitu:

$$\frac{x^2-1}{2}[2 + (3x^2-1)] = \frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}$$

Maka:

$$\int_1^{x^2} (3t-1)\, dt = \frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}$$

Jadi:

$$D_x\left[\int_1^{x^2} (3t-1)\, dt\right] = D_x\left(\frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}\right) = 6x^3 - 2x$$

Soal Latihan:

1. Telaah Konsep:
   a. Apabila $4 \leq x^2 \leq 16$ untuk semua x dalam $[2, 4]$ maka dari sifat keterbatasan integral dapat dikatakan bahwa ….. $\leq \int_2^4 x^2 \; dx$.
   b. $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x sin^3 t \; dt\right] = \ldots\ldots\ldots$
   c. Menurut kelinearan, $\int_1^4 c\, f(x) \; dx = c \cdot \ldots$ dan $\int_2^5 (x + \sqrt{x}\,)dx = \int_2^5 x \; dx + \ldots$
   d. Jika $\int_1^4 f(x)dx = 5$ dan $g(x) \leq f(x)$ untuk semua x dalam $[1, 4]$ maka sifat perbandingan menyatakan bahwa $\int_1^4 g(x)dx \; \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Misalkan $\int_0^1 f(x) \; dx = 2, \int_1^2 f(x) \; dx = 3, \int_0^1 g(x) \; dx = -1 \; dan \; \int_1^2 g(x) \; dx = 4$, gunakan sifat-sifat integral tentu untuk menghitung integral:
   a. $\int_0^2 2\, f(x) \; dx$
   b. $\int_0^2 [2\, f(x) + g(x)] \; dx$
   c. $\int_0^2 [2\, f(s) + 5\, g(s)] \; ds$
   d. $\int_0^2 [3\, f(t) + 2\, g(t)] \; dt$
3. Tentukan $G'(x)$ dari fungsi berikut:
   a. $G(x) = \int_1^x 2t \; dt$
   b. $G(x) = \int_0^x (2t^2 + t)dt$
   c. $G(x) = \int_1^{x^2} \sin t \; dt$

5.4. Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Pada perhitungan integral akan lebih sering mnggunakan teorema dasar kalkulus kedua daripada teorema dasar kalkulus pertama.

Teorema A (Teorema Dasar Kalkulus Kedua)

Misalkan f kontinu (karenanya terintegrasikan) pada $[a, b]$ dan misalkan F sebarang anti-turunan dari f pada $[a, b]$ maka:

$$\int_a^b f(x) \; dx = F(b) - F(a) \;\; atau \;\; \int_a^b f(x) \; dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

Contoh:

(1) Perlihatkan bahwa $\int_a^b k\ dx = k(b-a)$ dengan k konstanta.

(2) Hitunglah $\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)\ dx$ dengan menggunakan teorema dasar kalkulus dua dan menggunakan kelinearan

(3) Hitunglah $\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}})\ dx$

(4) Carilah $D_x \int_0^3 3\sin t\ dt$ dengan dua cara

Penyelesaian:

(1) $F(x) = kx$ adalah suatu anti-turunan $f(x) = k$ sehingga menurut teorema dasar kalkulus kedua:

$$\int_a^b k\ dx = F(b) - F(a) = kb - ka = k(b-a)$$

(2) Menggunakan teorema dasar kalkulus dua:

$$\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)\ dx = [2x^2 - 2x^3]\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} = (8-16) - (2+2) = -12$$

Menggunakan kelinearan:

$$\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)\ dx = 4\int_{-1}^{2} x\ dx - 6\int_{-1}^{2} x^2\ dx$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} = -12$$

(3) $\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}})\ dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]\begin{matrix}8\\-1\end{matrix} = \frac{45}{4} + \frac{381}{7} \approx 65{,}68$

(4) Cara mudah dengan teorema dasar kalkulus pertama:

$$D_x \int_0^x 3\sin t\ dt = 3\sin x$$

(5) Cara kedua dengan teorema dasar kalkulus kedua untuk menghitung integral 0 $ke\ x$ kemudian menggunakan aturan turunan:

$$\int_0^x 3\sin t\ dt = [-3\cos t]\begin{matrix}x\\0\end{matrix} = -3\cos x - (-\cos 0) = -3\cos x + 3$$

Selanjutnya:

$$D_x \int_0^x 3\sin t\ dt = D_x(= -3\cos x + 3) = 3\sin x$$

Kesimpulan:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

Metode Substitusi.

Aturan substitusi tidak lebih dari kebalikan aturan rantai yang diperlihatkan dalam teorema substitusi untuk integral tak-tentu.

Teorema B (Aturan Substitusi untuk Integral Tak-Tentu)

Misalkan g fungsi terintegrasi dan misalkan bahwa F adalah anti-turunan f maka:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\ dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Contoh:

(1) Hitunglah $\int \sin 3x\ \ dx$

(2) Hitunglah $\int x\ \sin x^2\ \ dx$

(3) Hitunglah $\int x^3\sqrt{x^4+11}\ \ dx$

(4) Hitunglah $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}(2x+1)dx$

(5) Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^3 2x \cos 2x\ \ dx$

Penyelesaian:

(1) Substitusikan $u = 3x$ sehingga $du = 3\ dx$

Diperoleh:

$$\int \sin 3x\ \ dx = \int \frac{1}{3}\sin 3x\ \ 3\ dx = \int \frac{1}{3}\sin u\ \ du = \frac{1}{3}\cos u + C = \frac{1}{3}\cos 3x\ \ + C$$

(2) Substitusikan $u = x^2$ sehingga $du = 2x\ dx$

Diperoleh:

$$\int x\ \sin x^2\ \ dx = \int \frac{1}{2}x\ \sin x^2\ \ 2x\ dx = \frac{1}{2}\int \sin u\ \ du = \frac{1}{2}\cos u + C = \frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

(3) Substitusikan $u = x^4 + 11$ sehingga $du = 4x^3\ dx$

Diperoleh:

$$\int x^3\sqrt{x^4+11}\ \ dx = \frac{1}{4}\int (x^4+11)^{\frac{1}{2}}(4x^3\ dx) = \frac{1}{6}(x^4+11)^{\frac{3}{2}} + C$$

(4) Substitusikan $u = x^2 + x$ sehingga $du = (2x+1)\ dx$

Diperoleh:

$$\int \sqrt{x^2+x}(2x+1)dx = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+x\,)^{\frac{3}{2}} + C$$

Teorema dasar kalkulus kedua:

$$\int_0^4 sin^3 2x \cos 2x\ \ dx = \left[\frac{2}{3}(x^2+x\,)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}(20)^{\frac{3}{2}} \approx 59{,}63$$

(5) Substitusikan $u = \sin 2x$ sehingga $du = 2\cos 2x \ dx$

Diperoleh:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^3 2x \cos 2x \ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3 \ 2\cos 2x \ dx = \frac{1}{2} u^3 \ du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4}$$

$$= \left[\frac{sin^4 2x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

Teorema C (Aturan Substitusi untuk Integral Tentu)

Misalkan g mempunyai turunan kontinu pada $[a, b]$ dan misalkan f kontinu pada daerah nilai g maka:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Dengan $u = g(x)$

Contoh:

(1) Hitunglah $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} \ dx$

(2) Hitunglah $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \ dx$

Penyelesaian:

(1) Substitusikan $u = x^2 + 2x + 6$ sehingga $du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx$ sehingga ketika $x = 0 \ maka \ u = 6$ dan ketika $x = 1 \ maka \ u = 9$

Diperoleh:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} \ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} \ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2} \ du = \left[\frac{-1}{2}\frac{1}{u}\right]_6^9 = -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{36}$$

(2) Substitusikan $u = \sqrt{x}$ sehingga $du = (2\sqrt{x}) \ dx$

Diperoleh:

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \ dx = 2\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ dx = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = [2\sin u]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Soal Latihan:

1. Telaah konsep:
    a. Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan jika f sebarang ... dari f maka $\int_a^b f(x)dx =$...
    b. Lambang $[F(x)]_a^b$ menggantikan ekspresi …………..
    c. Menurut teorema dasar kalkulus $\int_c^d F(x)dx =$ ………………
    d. Dengan substitusi $u = x^3 + 1$ maka integral tentu $\int_0^1 x^2(x^3 + 1)^4 \ dx =$………
2. Gunakan teorema dasar kalkulus kedua untuk menghitung masing-masing integran tentu:
    a. $\int_0^2 x^3 \ dx$
    b. $\int_{-1}^2 (3x^3 - 2x + 3) \ dx$
    c. $\int_1^4 \frac{1}{w^2} \ dw$
    d. $\int_0^4 \sqrt{t} \ dt$
    e. $\int_0^4 \left(y^2 + \frac{1}{y}\right) \ dy$
    f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx$
    g. $\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5) \ dx$
3. Gunakan metode substitusi untuk mencari nilai integral tak-tentu:
    a. $\int \sqrt{3x + 2} \ dx$
    b. $\int \cos(x^2 + 2) \ dx$
    c. $\int \sin(6x - 7) \ dx$
    d. $\int x\sqrt{x^2 + 4} \ dx$
    e. $\int x \ (x^2 + 3)^{-\frac{12}{7}} \ dx$
    f. $\int x \sin(x^2 + 4) \ dx$
    g. $\int \frac{x \sin \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} \ dx$
    h. $\int x^2 \ (x^3 + 5)^8 \cos[(x^3 + 5)^9] \, dx$
    i. $\int x \cos(x^2 + 4) \sqrt{x^2 + 4} \ dx$
    j. $\int x^2 \sin(x^3 + 5) cos^9 \ (x^3 + 5) \, dx$

4. Gunakan metode substitusi untuk mencari nilai integral tentu:

a. $\int_0^1 (x^2+1)^{10}\ dx$

b. $\int_{-1}^{3} \frac{1}{(t+2)^2}\ dt$

c. $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\ dx$

d. $\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2}\,(8t)\ dt$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{\,2}\, x \sin x\ dx$

f. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^2\ dx$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^3\,\theta \cos\theta\ d\theta$

h. $\int_0^1 \cos(3x-3)\ dx$

i. $\int_0^1 x\sin(\pi x^2)\ dx$

j. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin 2x)\ dx$

k. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(\cos x)\ dx$

l. $\int_0^1 cos^3(x)\sin(x^2)\ dx$

5.5. Teorema Nilai Rataan Untuk Integral

Secara umum, nilai rata-rata himpunan n bilangan $y_1, y_2, \dots, y_n$ maka cukup dengan menambahkannya dan membaginya dengan n.

$$y = \frac{y_1, +y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Konsep rata-rata suatu fungsi f pada suatu interval $[a, b]$, maka diambil partsisi berurutan dari $[a, b]$, misalnya:

$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dengan $\Delta x = \frac{(a-b)}{n}$

Maka rata-rata n nilai$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ adalah:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}\frac{1}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$$

Definisi (Nilai Rata-rata Sebuah Fungsi):

Jika f terintegrasikan pada interval $[a, b]$, maka nilai rata-rata f pada $[a, b]$ adalah:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Contoh:

(1) Carilah nilai rata-rata fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = x\ \sin x^2$pada interval $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$

(2) Misalkan dalam Fahrenheit suatu balok naja dengan panjang 2 $feet$ tergantung pada posisi x menurut fungsi $T(x) = 40 + 20x(2-x)$. Carilah suhu rata-rata dalam balok itu. Adakah titik tempat suhu yang sebenarnya sama dengan suhu rata-rata?

Penyelesaian:

(1) $f(x) = x\ \sin x^2$ pada interval $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$

Nilai rata-rata adalah:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}-0}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\ \sin x^2\ dx$$

Untuk menghitung integral tersebut, substitusi:

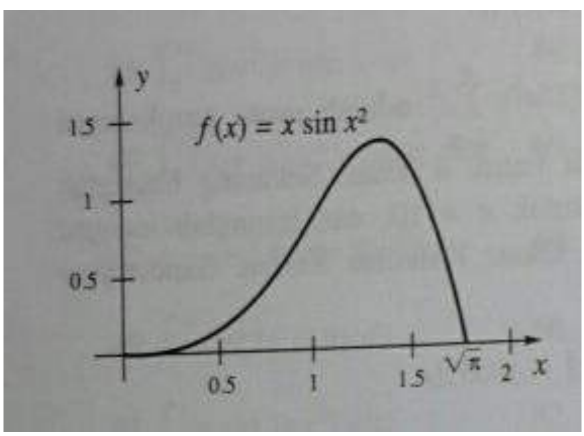
$$u = x^2$$

$$du = 2x\, dx$$

Ketika $x = 0\ maka\ u = 0$ dan ketika $x = \sqrt{\pi}\ maka\ u = \pi$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\ \sin x^2\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}\sin u\ du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}[-\cos u]_0^{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



(2) Panjang 2 $feet$ tergantung pada posisi x menurut fungsi $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$

Suhu rata-rata adalah:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{2-0}\int_0^2 [40 + 20x(2-x)]\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 [40 + 20x(2-x)]\ dx$$

$$= \int_0^2 (20 + 20x - 10x^2)\ dx$$

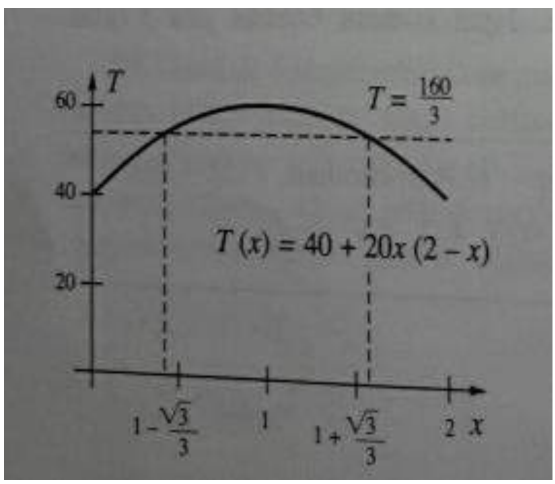
$$= \left[20x + \frac{20}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left[20x + 10x^2 - \frac{10}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left(40 + 40 - \frac{80}{3}\right)$$

$$= \frac{160}{3}\,°F$$

Tampak pada gambar berikut:



Suhu T sebagai fungsi x yang menunjukkan bahwa ada dua titik tempat suhu yang sebenarnya sama dengan suhu rata-rata. Untuk mencari titik-titik tersebut ditetapkan bahwa $T(x) = \frac{160}{3}$ dan menyelesaikan sehingga:

$$40 + 20x(2 - x) = \frac{160}{3}$$

Menggunakan rumus abc, maka:

$$x = \frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}42265 \quad dan \quad x = \frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right) \approx 1{,}5774$$

Kedua penyelesaian tersebut antara $0\ ada\ 2$ sehingga terdapat dua titik tempat suhu yang sebenarnya sama dengan suhu rata-rata.

Teorema A (Nilai Rataan untuk Integral):

Jika f kontinu pada $[a, b]$ maka terdapat suatu bilangan c antara $a\ dan\ b$ sedemikian rupa sehingga:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$$

Contoh:

(1) Carilah semua nilai c yang memenuhi teorema nilai rataan untuk integral $f(x) = x^2$ pada interval $[-3, 3]$

(2) Carilah semua nilai c yang memenuhi teorema nilai rataan untuk integral $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ pada interval $[0, 2]$

Penyelesaian:

(1) Integral $f(x) = x^2$ pada interval $[-3, 3]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt = \frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} x^2\ dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x^2\ dx$$

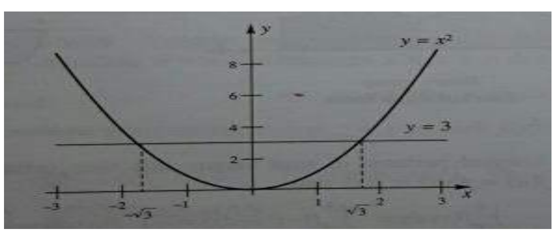
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{18}[27 - (-27)] = 3$$

Untuk mencari nilai c maka:

$$3 = f(c) = c^2$$

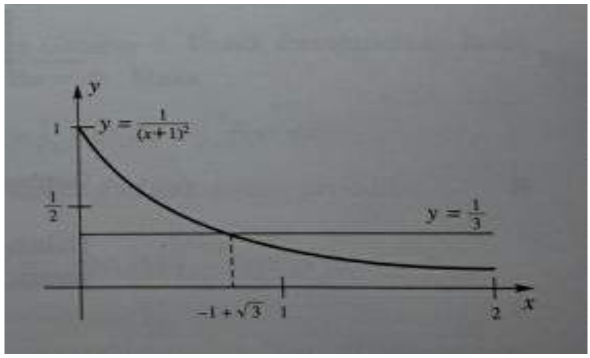
$$c = \pm\sqrt{3}$$

Baik $-\sqrt{3}\ dan\ \sqrt{3}$ berada dalam nterval $[-3, 3]$ sehingga dua-duanya memenuhi teorema nilai rataan untuk integral



(2) Integral $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ pada interval $[0, 2]$

Grafik $f(x)$ tampak berikut:



Nilai rata-rata fungsi diperoleh dengan membuat substitusi:

$$u = x + 1 \; maka \; du = dx$$

Ketika $x = 0 \; maka \; u = 1 \; dan \; x = 2 \; maka \; u = 3$

Sehingga diperoleh:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^2}\ du = \frac{1}{2}\int_1^3 u^{-2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}[-u^{-1}]_1^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}$$

Untuk mencari nilai c maka:

$$\frac{1}{3} = f(c) = \frac{1}{(c+1)^2}$$

$$c^2 + 2c + 1 = 3$$

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Perhatikan bahwa $-1 - \sqrt{3} \approx -2{,}7321 \; dan - 1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73205$.

Dari penyelesaian ini, satu-satunya yang berbeda dalam interval $[0, 2]$ adalah:

$$c = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73205$$

Jadi nilai c hanya satu yang memenuhi teorema nilai rataan untuk integral.

5.6. Penggunaan Simetri dalam Perhitungan Integral Tentu

Ingat kembali bahwa fungsi genap adalah fungsi yang memenuhi $f(-x) = f(x)$, sedangkan fungsi ganjil yang memenuhi $f(-x) = -f(x)$. Grafik $f(-x)$ simetri terhadap sumbu y dan grafik $-f(x)$ simetri terhadap titik asal.

Teorema B (Teorema Simetri):

Jika f fungsi genap, maka:

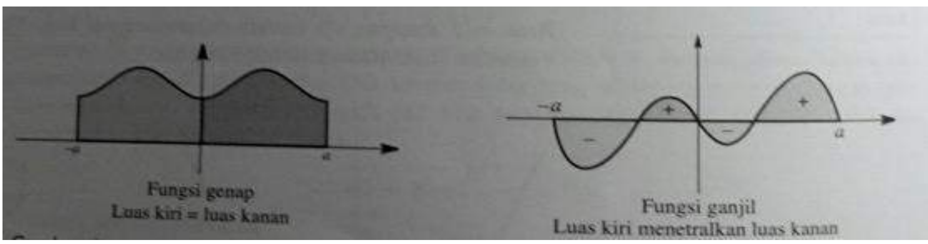
$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Jika f fungsi ganjil, maka:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$$

Bukti:

Untuk Fungsi Genap, tafsiran geometri teorema tampak dalam gambar berikut:



Untuk membenarkan hasil secara analitis, pertama dituliskan:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 0$$

Dalam integral pertama di ruas kanan dibuat substitusi:

$$u = -x\ maka\ du = -dx$$

Jika f fungsi genap maka:

$$f(u) = f(-x) = f(x)$$

Sehingga:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\ (-dx) = -\int_{a}^{0} f(u)\ du = \int_{a}^{0} f(u)\ du = \int_{a}^{0} f(x)\ dx$$

Akibatnya:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Bukti untuk fungsi sebagai latihan.

Contoh:

(1) Hitunglah $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\ dx$

(2) Hitunglah $\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\ dx$

(3) Hitunglah $\int_{-2}^{2} (x\ sin^4 x + x^3 - x^4)\ dx$

(4) Hitunglah $\int_{-\pi}^{\pi} sin^3 x\ cos^5 x\ \ dx$

Penyelesaian:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\ dx$

Karena:

$$\cos\left(-\frac{x}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

Maka $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ adalah fungsi genap

Sehingga diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\ dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\ dx = 8\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\ dx$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos u\ \ du$$

$$= [8\sin u]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

(2) $\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\ dx$

Untuk $f(x) = \frac{x^5}{x^2+4}$ adalah fungsi ganjil, sehingga integral bernilai nol.

(3) $\int_{-2}^{2} (x\ sin^4 x + x^3 - x^4)\ dx$

Integran tersebut ada tiga suku, dua suku pertama dalam integran adalah ganjil dan yang terakhir adalah genap, sehingga diperoleh:

$$\int_{-2}^{2} (x\ sin^4 x + x^3 - x^4)\ dx = \int_{-2}^{2} x\ sin^4 x + x^3 dx - \int_{-2}^{2} x^4\ \ dx$$

$$= 0 - 2\int_{-2}^{2} x^4\ \ dx = \left[-2\frac{x^5}{5}\right]_{0}^{2} = \frac{-64}{5}$$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} sin^3x\, cos^5x\ dx$

Fungsi $\sin x$ adalah fungsi ganjil dan $\cos x$ adalah fungsi genap.

Sebuah fungsi ganjil dipangkatkan dengan pangkat ganjil adalah fungsi ganjil, sehingga sin^3x adalah fungsi ganjil.

Sebuah fungsi genap dipangkatkan dengan bilangan bulat adalah sebuah fungsi genap, sehingga cos^5x adalah fungsi genap.

Jadi integran dalam integral ini adalah sebuah fungsi ganjil dan intervalnya simetri terhadap titik 0 sehingga nilai integral ini adalah nol.

5.7. Penggunaan Keperiodikan

Ingat kembali bahwa fungsi f adalah fungsi periodik jika terdapat bilangan p sedemikian rupa sehingga $f(x+p) = f(x)$ untuk semua x di dalam daerah asal f. Bilangan positif terkecil p yang demikian disebut periode f. Fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik.

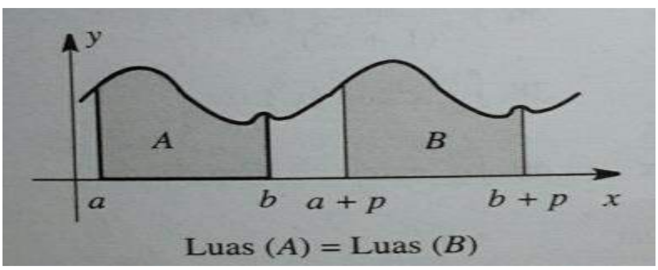
Teorema C (Teorema Periodik):

Jika f periodik dengan periode p maka:

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\ dx = \int_{a}^{b} f(x)\ dx$$

Bukti:

Tafsiran geometri tampak dalam gambar berikut:



Untuk membuktikan hasil, dimisalkan:

$$u = x - p\ sehingga\ x = u + p\ dan\ du = dx$$

Maka:

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\ dx = \int_{a}^{b} f(u+p)\ dx = \int_{a}^{b} f(u)\ dx = \int_{a}^{b} f(x)\ dx$$

Sehingga dapat menggantikan $f(u+p) oleh\ f(u)$ karena f adalah fungsi periodik.

Soal-soal latihan:

1. Telaah Konsep:
   a. Rata-rata nilai suatu fungsi f pada interval $[a, b]$ adalah …………
   b. Teorema nilai rataan untuk integral mengatakan bahwa terdapat c pada interval $[a, b]$ sedemikian rupa sehingga rata-rata nilai fungsi pada $[a, b]$ sama dengan …..
   c. Jika f adalah fungsi ganjil maka $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \cdots$ dan jika f adalah fungsi genap maka $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \cdots$
   d. Fungsi f adalah fungsi periodik jika terdapat bilangan p sedemikian rupa sehingga ……………. untuk semua x di dalam daerah asal f. Bilangan positif p demikian yang terkecil disebut …………… dari fungsi tersebut.
2. Carilah rata-rata nilai fungsi pada interval yang diberikan:
   a. $f(x) = 4x^3;\ [1, 3]$
   b. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}};\ [0, 3]$
   c. $f(x) = \cos x;\ [0, \pi]$
   d. $f(y) = y\,(1 + y^2)^3;\ [1, 2]$
3. Carila semua nilai c yang memenuhi teorema nilai rataan untuk integral pada integran yang diberikan:
   a. $f(x) = \sqrt{x+1};\ [0, 3]$
   b. $f(x) = 1 - x^2;\ [-4, 3]$
   c. $H(z) = \sin z;\ [-\pi, \pi]$
   d. $R(v) = v^2 - v;\ [0, 2]$
   e. $f(x) = ax + b;\ [1, 4]$
4. Gunakan simetri untuk membantu menghitung integral yang diberikan:
   a. $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\ dx$
   b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\ dx$
   c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\ dx$
   d. $\int_{-1}^{1} (1 + x + x^2 + x^3)\ dx$

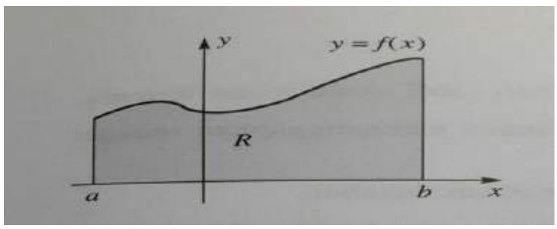
BAB VI
APLIKASI INTEGRAL

6.1. Luas Daerah Bidang Rata

Konsep-konsep integral tentu digunakan untuk menghitung luas daerah-daerah yang bentuknya lebih rumit, yang diawali dengan permasalahan pada kasus yang sederhana.

1. **Daerah di atas $\boldsymbol{sumbu - x}$**

Misalkan $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva di $bidang - xy$ dan misalkan f kontinu dan tak negative pada interval $a \leq x \leq b$ (seperti dalam gambar di bawah ini).



Tinjau daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x), x = a, x = b\ dan\ y = 0$. Tampak R sebagai daerah yang $dibawah\ y = f(x), diantara\ x = a, x = b$, sehingga luas daerah $A(R)$ dinyatakan:

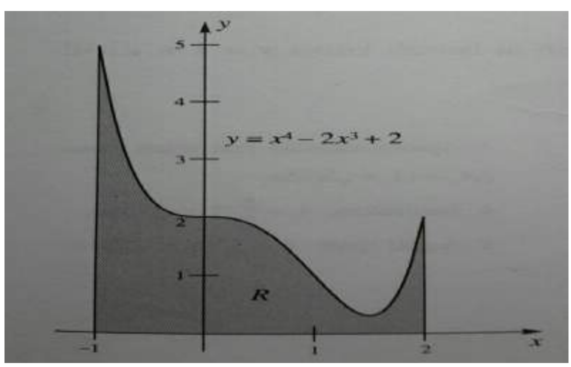
$$A(R) = \int_a^b f(x)\ dx$$

Contoh:

Tentukan luas daerah R di bawah $y = x^4 - 2x^3 + 2$ diantara $x = -1$ dan $x = 2$

Penyelesaian:

Grafik R tampak pada gambar berikut:



Esitimasi wajar untuk luas R adalah luas kali rata-rata tinggi, misalnya $(3)(2) = 6$

Nilai eksak adalah:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\ dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} = 5{,}1$$

Nilai terhitung 5,1 cukup deket dngan nilai estimasi ke 6 sehingga yakin kebenarannya.

2. Daerah di bawah $sumbu - x$

Luas adalah bilangan tak negatif. Jika grafik $y = f(x)$ terletak di bawah $sumbu - x$ maka $\int_a^b f(x)\ dx$ adalah bilangan negatif, sehingga tak dapat menyatakan suatu luas. Namun demikian, bilangan itu merupakan negatif dari luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x), x = a, x = b\ dan\ y = 0.$

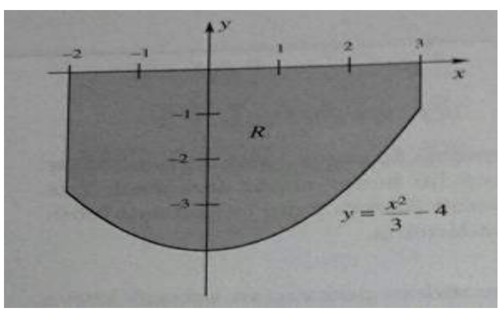
Contoh:

(1) Carilah luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^{\frac{2}{3}} - 4, sumbu\ x, x = -2, x = 3.$

(2) Carilah luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dan ruas $sumbu\ x$ antara $x = -1\ dan\ x = 2$ oleh garis $x = 2$

Penyelesaian:

(1) Daerah R tampak pada gambar berikut:



Estimasi awal untuk luasnya yaitu $(5)(3) = 15$ dan nilai eksaknya adalah:

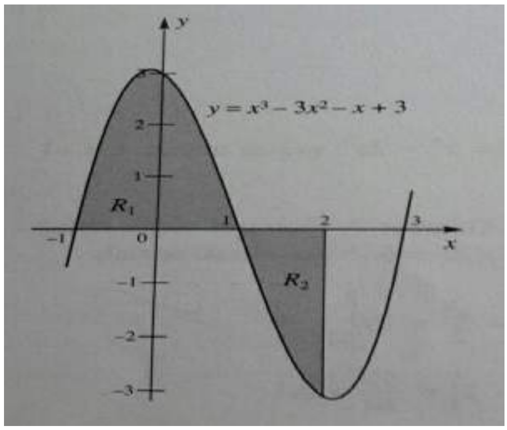
$$A(R) = -\int_a^b f(x)\ dx$$

$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(x^{\frac{2}{3}} - 4\right)\,dx = \int_{-2}^{3}\left(-x^{\frac{2}{3}} + 4\right)\,dx = \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9} = 16{,}11$$

Nilai terhitung $16,11$ cukup deket dngan nilai estimasi yakin kebenarannya

(2) Daerah R tampak pada gambar berikut:



Perhatikan bahwa ada sebagian yang terletak di atas sumbu x da nada yang di bawah sumbu x. Luas dua bagian ini yaitu $R_1\ dan\ R_2$ harus dihitung secara terpisah dan memeriksa bahwa kurva menotong sumbu x di $-1, 1\ dan\ 3$, sehingga:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_a^b f(x)\ dx + \int_c^d f(x)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\ dx - \int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\ dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}$$

$$= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}$$

Perhatikan bahwa menyatakan luas daerha sebagai satu integral dengan menggunakan lambang nilai mutlak yaitu:

$$A(R) = \int_{-1}^{2}|x^3 - 3x^2 - x + 3|\ dx$$

Penulisan ini bukan penyederhanaan dalam perhitungan karena untuk menghitung integral harus memisahkannya ke dalam bagian.

Cara berpikir yang dapat membantu perhitungan dengan lima langkah:

a. Langkah 1: sketsalah daerah tersebut

b. Langkah 2: irislah menjadi irisan-irisan kecil (strip) dan beri label irisan tertentu

c. Langkah 3: aproksimasikan luas irisan tertentu ini, dengan label suatu irisan tertentu sebuah segiempat

d. Langkah 4: jumlahkanlah aproksimasi dari luas irisan-irisan tersebut

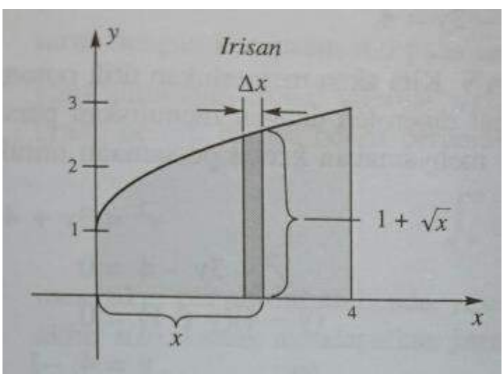
e. Langkah 5: ambillah limit dengan menunjukan lebar irisan mendekati nol, sehingga diperoleh integral tentu.

Contoh:

Susunlah integral untuk luas daerah di bawah kurva $y = 1 + \sqrt{x}$ dan ada diantara $x = 0 \; dan \; x = 4$

Penyelesaian:

Memahami lima langkah dapat disederhanakan menjadi tiga langkah yaitu iris, aproksimasi dan integrasikan. Integrasi merupakan gabunag dua langkah yaitu jumlahkan luas irisan dan ambil limit ketika lebar irisan menuju nol. Saat proses ini, $\sum \dots \Delta x$ berubah menjadi $\int \dots dx$ saat mengambil limit yang tampak pada gambar berikut ini:



Aproksimasikan:

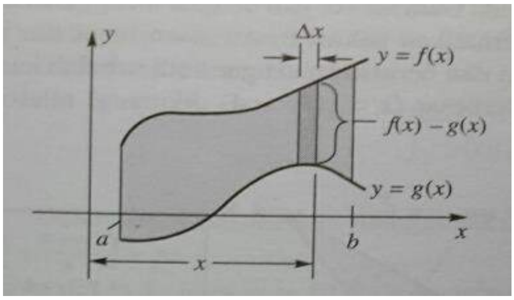
$\Delta A \approx \left(1 + \sqrt{x}\right) \Delta x$

Integrasikan:

$A = \int_0^4 \left(1 + \sqrt{x}\right) \; dx$

3. Daerah di antara dua kurva

Perhatikan kurva-kurva $y = f(x)\ dan\ g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)\ pada\ a \leq x \leq b$. Kurva-kurva dan interval itu menentukan daerah yang diperlihatkan pada gambar berikut:



$$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]\Delta x$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

Menggunakan metode iris, aproksimasikan, integrasikan untuk mencari luasnya.

$$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]\Delta x$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

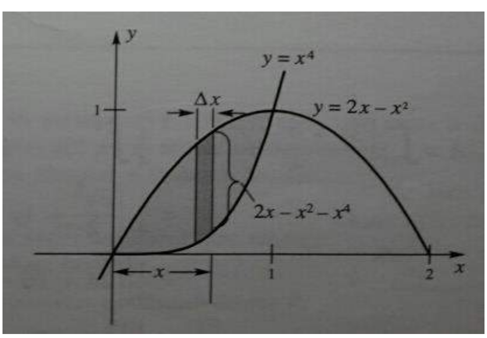
Contoh:

(1) Carilah luas di antara kurva $y = x^4\ dan\ y = 2x - x^2$

(2) Pengirisan mendatar, carilah luas daerah di antara parabola $y^2 = 4x$ $dan\ garis\ 4x - 3y = 4$

Penyelesaian:

(1) Dimulai dengan mencari titik-titik potong dari dua kurva tersebut, sehingga perlu menyelesaikan $2x - x^2 = x^4$, suatu persamaan berderajat empat yang biasanya sulit dipecahkan. Kasus ini dengan $x = 0\ dan\ x = 1$ adlah penyelesaian yang cukup jelas. Sketsa daerah beserta aproksimasi dan integral yang terkait tampak pada gambar berikut:



$$\Delta A \approx (2x - x^2 = x^4)\ \Delta x$$

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 = x^4)\ dx$$

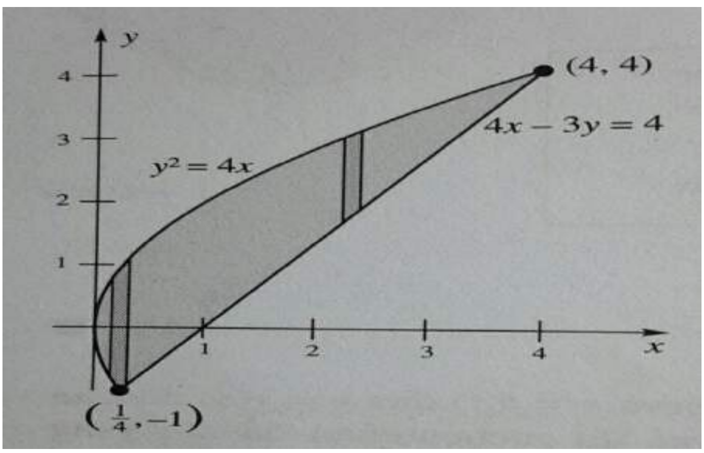
Perhitungan integral:

$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\ dx = \left[x^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

(2) Diperlukan titik potong dua kurva ini. Koordinat y dari titik-titik ini dapat diperoleh dengan menuliskan persamaan kedua sebagai $4x = 3y + 4$ dan menyamakan kedua persamaan untuk $4x$

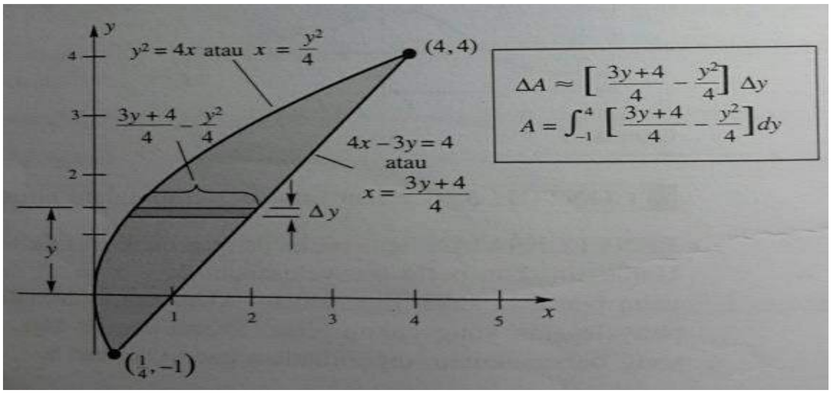
$$y^2 = 3y + 4$$
$$y^2 - 3y - 4 = 0$$
$$(y - 4)(y + 1) = 0$$
$$y = 4, -1$$

Ketika $y = 4\ maka\ x = 4$ dan ketika $y = -1\ maka\ x = \frac{1}{4}$, sehingga disimpulkan bahwa titik-titik potong adalah $(4, 4)\ dan\ \left(\frac{1}{4}, -1\right)$ dan daerah di antara kurva-kurva di berikan pada gambar berikut:



Sekarang bayangkan mengiris daerah ini **secara tegak** maka menghadapi masalah karena perbatasan bawah terdiri atas dua kurva yang berbeda. Irisan paling kiri merentang dari cabang bawah parabola hingga cabang atasnya. Untuk daerah sisanya, irisan merentang dari garis ke parabola. Pemecahan masalah ini dengan irisan tegak, pertama dipisahkan daerah menjadi dua bagian, menyusun integral untuk masing-masing bagian dan selanjutnya menghitung kedua integral.

Pendekatan yang jauh lebih baik yaitu mengiris daerah **secara mendatar** yang tampak pada gambar berikut:



Dengan menggunakan y sebagai variabel integrasi dan bukannya x. Perhatikan irisan-irisan mendatar itu selalu berawalpada parabola (di sebelah kiri) dan berakhir (di sebelah kanan). Lebar irisan yang demikian adalah:

$$nilai\ x\ terbesar\ (x = \frac{1}{4}(3y+4)\ dikurangi\ nilai\ x\ terkecil\ (x = \frac{1}{4}y^2)$$

Sehingga:

$$A = \int_{-1}^{4} \left[\frac{1}{4}(3y+4) - \frac{1}{4}y^2\right] dy = \int_{-1}^{4} \frac{3y+4-y^2}{4}\ dy$$

$$= \int_{-1}^{4} \frac{1}{4}(3y+4-y^2)\ dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(3y+4-y^2)\ dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{4}\left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{125}{24} \approx 5{,}21$$

Ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu:

(a) Integran yang dihasilkan dari pengirisan mendatar **mengandung variabel y bukan x**.

(b) Untuk memperoleh integran, **pecahkan dua persamaan tersebut untuk x dan kurangkan nilai x yang lebih kecil dari nilai x yang lebih besa**r.

4. Jarak dan Perpindahan

Pandang suatu benda bergerak di sepanjang garis lurus dengan kecepatan $v(t)$ pada saat t. Jika $v(t) \geq 0\, maka \int_a^b v(t)dt$ memberikan jarak yang ditempuh dalam interval waktu $a \leq t \leq b$, tetapi jika $v(t)$ kadangkala negatif yang berarti bahwa benda bergerak dalam arah sebaliknya maka:

$$\int_a^b v(t)\, dt = s(b) - s(a)$$

Mengukur **perpindahan benda** yaitu jarak berarah dari tempat berangkat $s(a)$ ke tempat akhir $s(b)$. Untuk mendapatkan **jarak total** yang ditempuh benda selama $a \leq t \leq b$ maka harus menghitung $\int_a^b |v(t)|\, dt$ dan luas daerah diantara kurva kecepatan dan sumbu t.

Contoh:

Sebuah benda berada pada posisi $s = 3$ pada waktu $t = 0$ dan kecepatan waktu t adalah $v(t) = 5 \sin 6\pi$. Dimana posisi benda pada waktu $t = 2$ dan berapa jauh benda tersebut menjelajah selama waktu itu?

Penyelesaian:

Perpindahan benda yaitu perubahan posisi adalah:

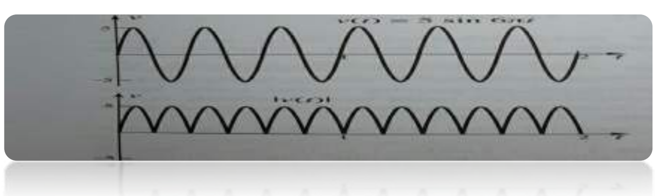
$$s(2) - s(0) = \int_0^2 v(t)\;dt = \int_0^2 5\sin 6\pi t\;dt = \left[-\frac{5}{6\pi}\cos 6\pi t\right]_0^2 = 0$$

Jika $s(2) = s(0) + 0 = 3 + 0 = 3$. Benda berada di posisi 3 pada waktu $t = 2$ maka jarak yang ditempuh adalah:

$$\int_0^2 v(t)\;dt = \int_0^2 5\sin 6\pi t\;dt$$

Dalam sifat integrasi digunakan sifat simetri, sehingga:

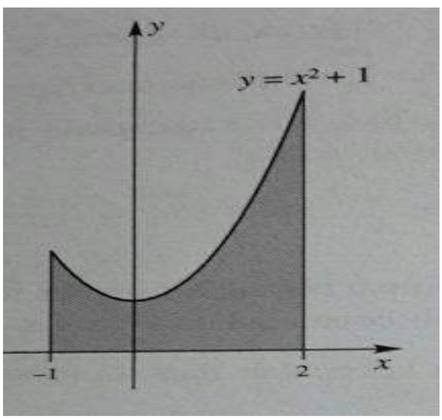
$$\int_0^2 |v(t)|\;dt = \int_0^{\frac{2}{12}} 5\sin 6\pi t\;dt = 60\left[-\frac{1}{6\pi}\cos 6\pi\right]_0^{\frac{1}{6}} = 20\pi \approx 6{,}3662$$



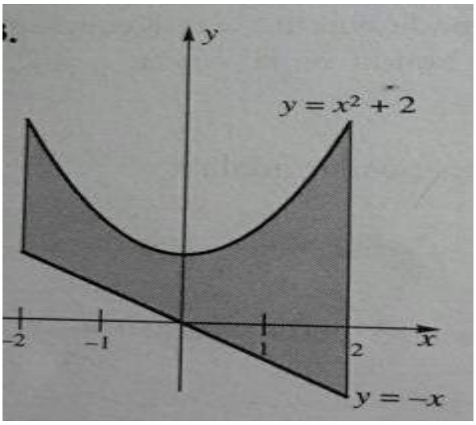
Soal Latihan:

1. Telaah Konsep:
   a. Misalkan R adalah daerah di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x pada interval $[a, b]$. $f(x) \geq 0$ untuk semua x dalam $[a, b]$ maka $A(R) = \cdots$ tetapi jika $f(x) \leq 0$ dalam $[a, b]$ maka $A(R) = \cdots$
   b. Untuk mencari luas daerah diantara dua kurva maka akan sangat membantu jika kita mengingat tiga kata yaitu: ……………….
   c. Misalkan kurva $y = f(x) dan\, y = g(x)$ membatasi daerah R maka pada R berlaku yaitu $= f(x) \leq\ y = g(x)$, sehingga lus R diberikan oleh $\int_a^b \ldots dx$ dimana $a\ dan\ b$ ditentukan dengan menyelesaikan persamaan …………..
   d. Jika $p(y) \leq q(y)$ untuk sumbu y pada interval c, d maka luas $A(R)$ dari daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva $x = p(y) dan\ x = q(y)$ di antara $c\ dan\ D$ diberikan oleh: $A\ (R)$ = ……………….

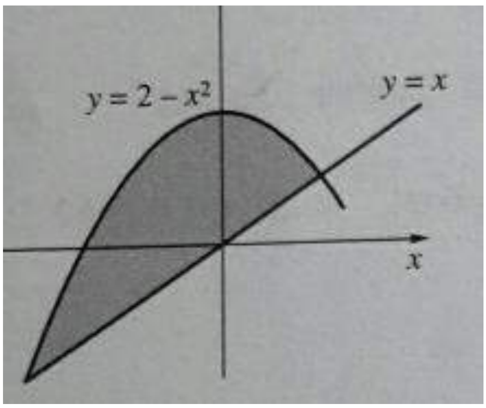
2. Susunlah integral untuk daerah yang ditunjuk dan hitunglah integral tersebut:
   a.



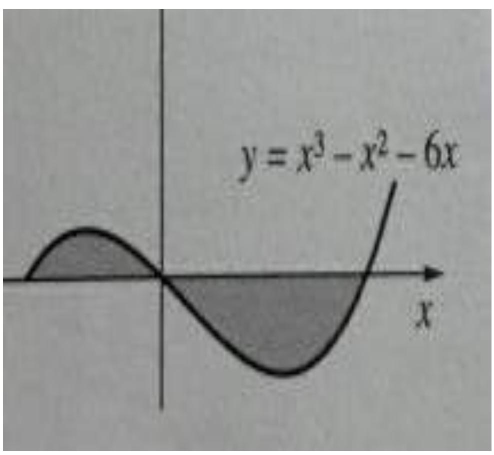
b.



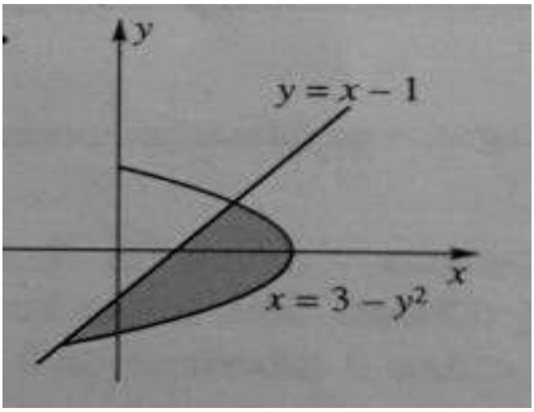
c.



d.



e.

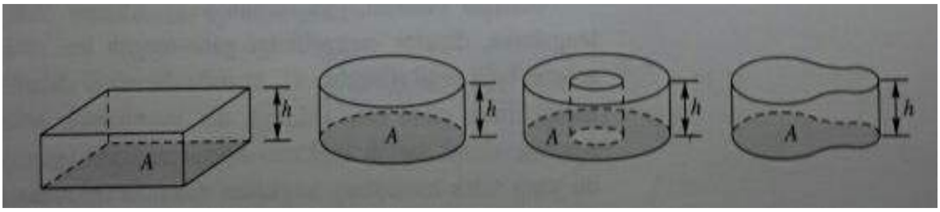


3. Sketsalah daerah yang dibatasi oleh grafik persamaan-persamaan yang diketahui, susunkah integral dan hitunglah luas daerah:
   a. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, y = 0, di\ antara\ x = 0\ dan\ x = 3$
   b. $y = 5x - x^2, y = 0\ di\ antara\ x = 1\ dan\ x = 3$
   c. $y = \frac{1}{4}(x^2 - 7), y = 0\ di\ antara\ x = 0\ dan\ x = 2$
   d. $y = \sqrt[2]{x}, y = 0\ di\ antara\ x = -2\ dan\ x = 2$
   e. $y = (x - 3)(x - 1)$
   f. $y = x^2 - 2x, y = -x^2$
   g. $x = 8y - y^2, x = 0$
   h. $x = -6y^2 + 4y, x + 3y - 2 = 0$
   i. $4y^2 - 2x = 0, 4y^2 - 4x - 12 = 0$

4. Sketsalah daerah $\mathcal{R}$ yang dibatasi oleh $y = x + 6, y = x^3\ dan\ 2x + y = 0$, kemudian tentukan tentukan luasnya.
5. Tentukan luas segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(-1, 4), (2, -2) dan\ (5, 1)$ dengan menggunkan integral.

6.2. Volume Benda Pejal (Lempengan, Cakram, Cincin)

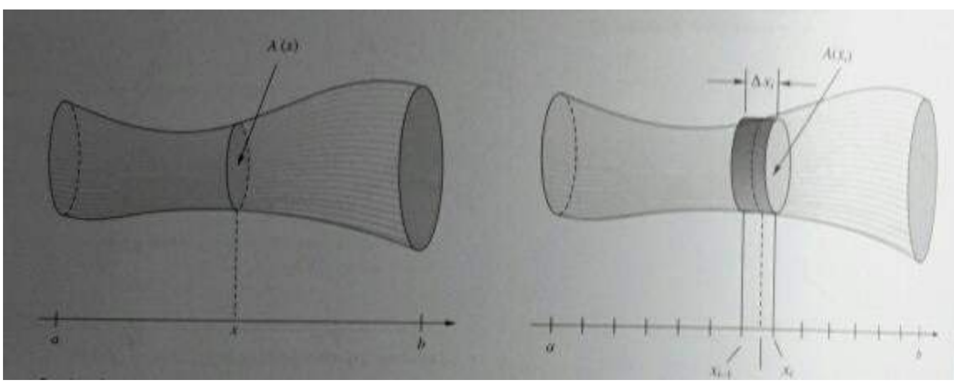
Benda pejal yang sederhana disebut silinder tegak, empat diantaranya tampak dalam gambar berikut:



Dalam setiap kasus, benda itu dibentuk dengan cara mengerakkan suatu daerah rata (alas) sejauh h dengan arah tegak lurus pada daerha tersebut, sehingga volume benda pejal didefinisikan sebagai luas alas dikalikan tinggi, yaitu:

$$V = A \cdot h$$

Berikutnya dengan memperhatikan benda pejal yang penampang-penampangnya tegak lurus dengan suatu garus yang memiliki luas yang diketahui. Khususnya, misalnya garis tersebut adalah sumbu x dan misalkan bahwa luas penampang pada x adalah $A(x)$ dengan menyisipkan titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Kemudian dilewatkan bidang-bidang melalui titik-titik ini tegak lurus pada sumbu x sehingga mengiris benda menjadi lempengan-lempengan tipis pada gambar berikut:



Volume ΔV suatu lempengan kira-kira sama dengan volume silinder yaitu:

$$\Delta V_i \approx A(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$(ingat\ bahwa\ \overline{x_i}\ disebut\ titik\ sampel\ yaitu\ sebarang\ bilangan\ dalam\ interval\ [x_{i-1}, \quad x_i]$

Volume dari benda pejal dapat diaproksimasikan dengan jumlah Riemann, yaitu:

$$V \approx \sum_{i-1}^{n} A(\overline{x_i})\Delta x_i$$

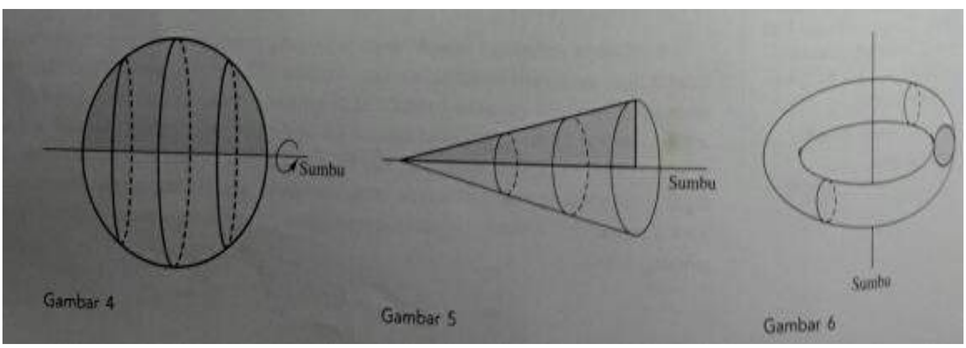
Ketika norma partisi mendekati nol maka diperoleh suati integral tentu, yaitu:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

1. Benda Pejal Putar dengan Metode Cakram

Ketika sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu sisi dari sebuah garis tetap dalam bidangnya, diputar mengelilingi garis tersebut maka daerah itu membentuk sebuah benda pejal putar dan garis tetap tersebut dinamakan sumbu benda pejal putar.

Sebagai ilustrasi, jika daerah yang dibatasi oelh setengah lingkaran dan garis tengahnya, diputar mengelilingi garis tengah tersebut maka daerah tersebut membentuk sebuah bola pejal (gambar 4). Apabila daerah dalam segitiga siku-siku diputar mengelilingi kakinya maka membentuk kerucut pejal (gambar 5). Apabila sebuah daerah lingkaran diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang lingkaran ini yang tidak meotong lingkaran (gambar 6) maka diperoleh sebuah torus (donat). Dalam setiap kasus, dimungkinkan menyajikan volume itu sebagai suatu integral tertentu.



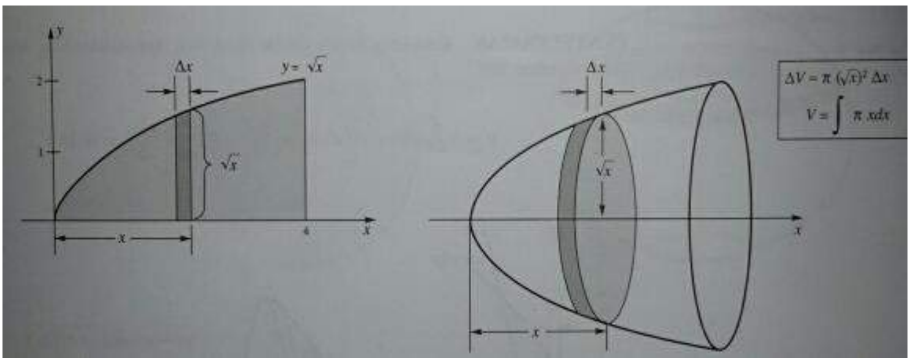
Contoh:

(1) Tentukan volume benda pejal putar yang diperoleh dari pemutaran daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis $x = 4$ mengelilingi sumbu x

(2) Tentukan volume benda pejal yang terbentuk dari pemutaran daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y dan garis $y = 3$ mengelilingi sumbu y

Penyelesaian:

(1) Volume benda pejal putar yang diperoleh dari pemutaran daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis $x = 4$ mengelilingi sumbu x



Volume silinder tegak yaitu $\pi r^2 h$ maka diperoleh:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Dengan:

$$A(x) = \pi r^2 h = \pi \sqrt{x}^2$$

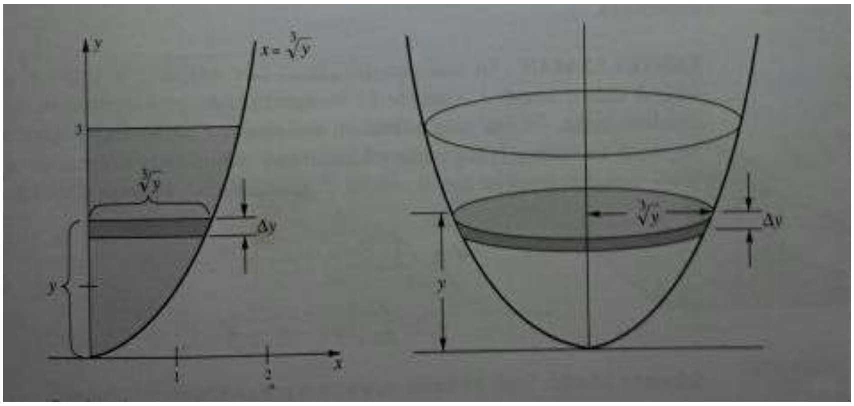
Sehingga:

$$\Delta V \approx \pi \sqrt{x}^2 \, \Delta x = \pi x \, \Delta x$$

Maka diperoleh:

$$V = \int_0^4 \pi x \; dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} = 8\pi \approx 25{,}3$$

(2) Volume benda pejal yang terbentuk dari pemutaran daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y dan garis $y = 3$ mengelilingi sumbu y



Pengirisan secara mendatar yang membuat y pilihan yang cocok sebagai variabel integrasi dengan memperhatikan bahwa:

$$y = x^3 \; setara \; dengan \; x = \sqrt[3]{y}$$

Sehingga:

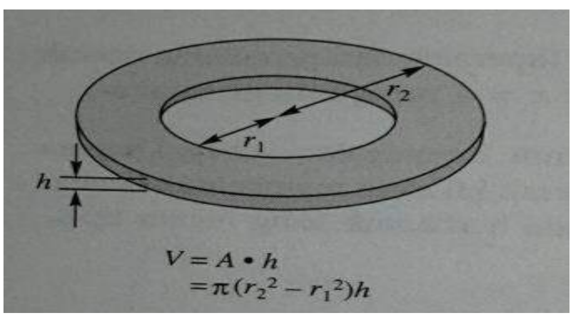
$$\Delta V \approx \pi(\sqrt[3]{y})^2 \, \Delta y$$

Maka diperoleh:

$$V = \int_0^3 \pi(\sqrt[3]{y})^2 \; dy = \pi \int_0^3 \pi(\sqrt[3]{y})^2 \; dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^3 = \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11{,}76$$

2. Benda Pejal Putar dengan Metode Cincin

Adakalanya pengirisan suatu benda pejal putar menghasilkan cakram dengan lubang ditengahnya yang disebut cincin yang tampak dalam gambar berikut:



Contoh:

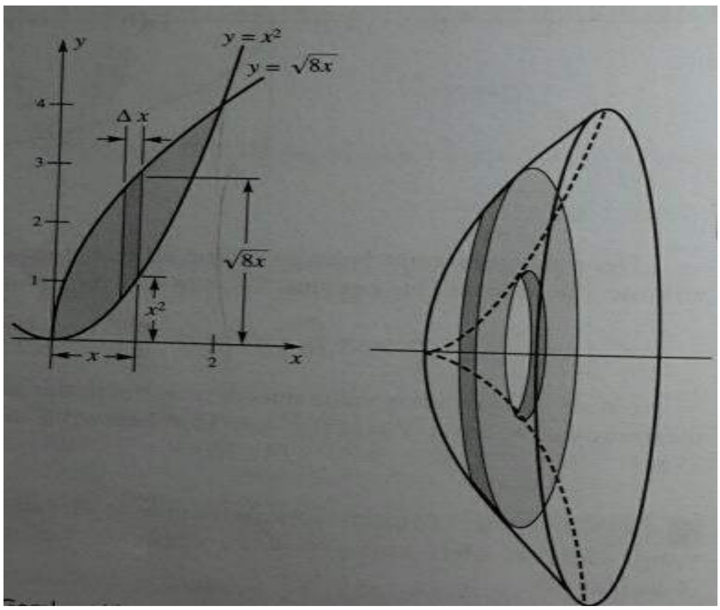
(1) Tentukan volume banda pejal yang dibentuk dengan memutar daerah yang dibatasi parabola-parabola $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ mengelilingi sumbu x

(2) Daerah setengah lingkaran yang dibatasi kurva $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis $x = -1$, susunlah integral yang menyatakan volumenya.

Penyelesaian:

(1) Volume banda pejal yang dibentuk dengan memutar daerah yang dibatasi parabola-parabola $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ mengelilingi sumbu x.

Tampak pada gambar berikut:



Sehingga diperoleh:

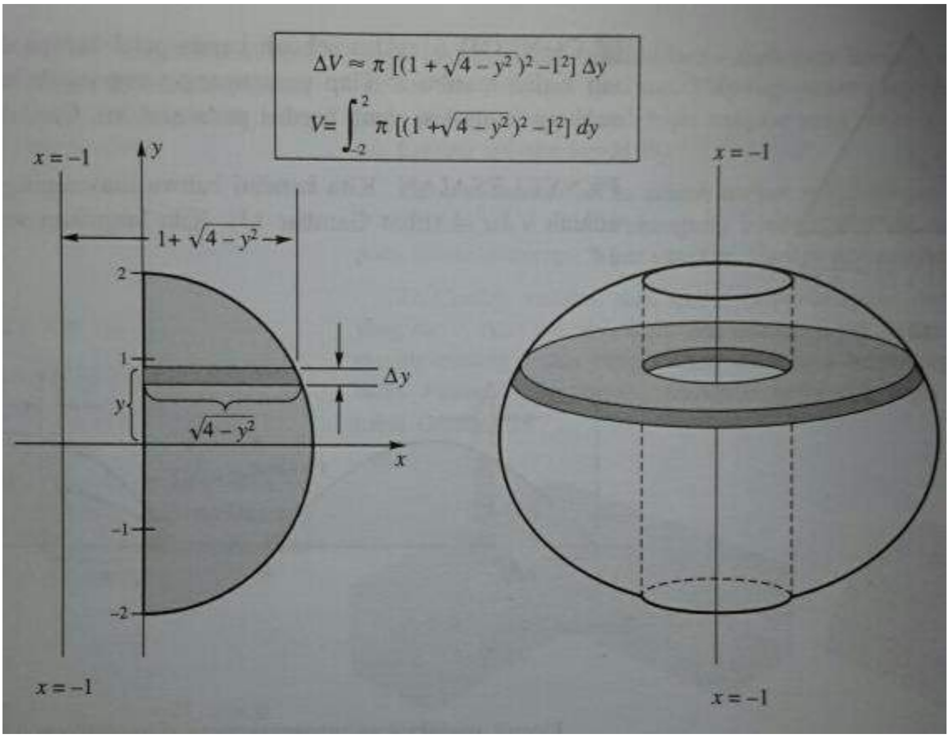
$$\Delta V \approx \pi\left[\left(\sqrt{8x}\right)^2 - (x^2)^2\right] \Delta x = \pi(8x - x^4)\Delta x$$

Maka:

$$V = \int_0^2 \pi(8x - x^4)\ dx = \pi\int_0^2 (8x - x^4)\ dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \approx 30{,}16$$

(2) Volume benda pejal pada daerah setengah lingkaran yang dibatasi kurva $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis $x = -1$

Tampak pada gambar berikut:



Dalam hal ini, jari-jari cincin luar adalah $1 + \sqrt{4 - y^2}$ dan jari-jari dalam adalah 1. Bagian yang terletak diatas sumbu x mempunyai volume yang sama seperti bagian dibawahnya (yang menyatakan dirinya dalam integran genap), sehingga boleh mengintegrasikan dari 0 $sampai$ 2 dan kemudian hasilnya dikalikan dua.

$$\Delta V = \pi \left[\left(1 + \sqrt{4 - y^2} \right)^2 - 1^2 \right] \Delta y$$

Maka:

$$V = \int_{-2}^{2} \pi \left[\left(1 + \sqrt{4 - y^2} \right)^2 - 1^2 \right] dy = \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(1 + \sqrt{4 - y^2} \right)^2 - 1^2 \right] dy$$

Jadi integral yang menyatakan volumenya:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(1 + \sqrt{4 - y^2} \right)^2 - 1^2 \right] dy$$

3. Benda Pejal Lain yang Penampangnya Belum Diketahui

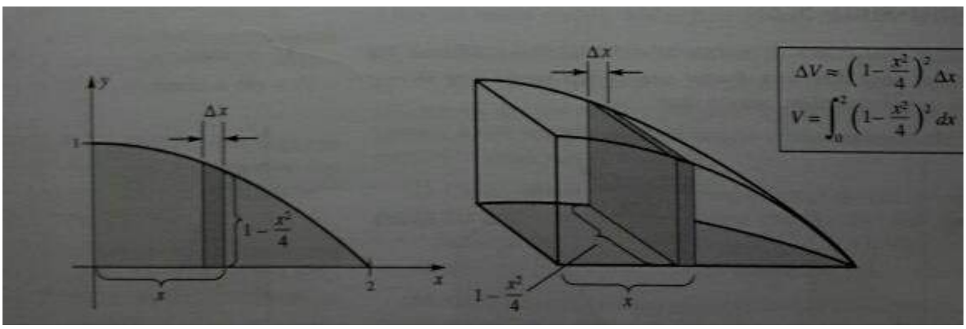
Hingga saat ini, benda pejal yang dibahas yang memiliki penampang lingkaran. Metode volume masih bisa digunakan dalam perhitungan benda pejal yang penampangnya berupa persegi atau segitiga.

Contoh:

Misalkan alas sebuah benda pejal berupa daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, sumbu x dan sumbu y. Misalkan penampang yang tegak lurus pada sumbu x berbentuk persegi maka tentuka volume benda pejal tersebut.

Penyelesaian:

Benda pejal berupa daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, sumbu x dan sumbu y dengan misalkan penampang yang tegak lurus pada sumbu x berbentuk persegi. Benda pejal diiris secara tegak lurus dengan sumbu x maka diperoleh kotak persegi tipis yang tampak pada gambar berikut:



Sehingga diperoleh:

$$\Delta V \approx (1 - \frac{x^2}{4})^2 \, \Delta x$$

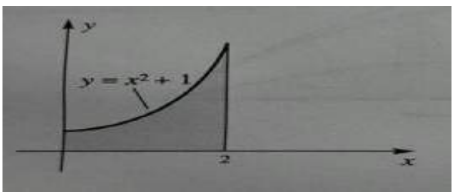
Maka:

$$V = \int_0^2 (1 - \frac{x^2}{4})^2 \, dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx$$

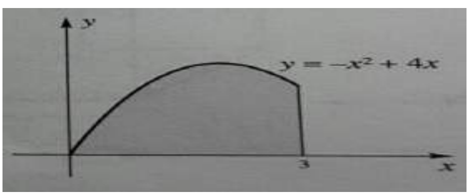
$$= \left[1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1{,}07$$

Soal Latihan:

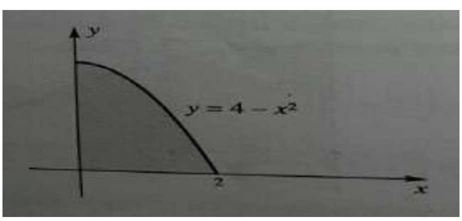
1. Telaah Konsep:
   a. Volume cakram berjari-jari r dan tebal h adalah ………..
   b. Volume cincin dengan jari-jari dalam r dan jari-jari luar R dan tebal h adalah …….
   c. Jika daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2, y = 0\ dan\ x = 3$ yang diputar mengelilingi sumbu x, cakram pada x mempunyai volume $\Delta V \approx$ ……………………….
   d. Jika daerah R dari soal (3) diputar mengelilingi $y = -2$, cincin pada x mempunyai volume $\Delta V \approx$ ……………………………
2. Tentukan volume benda yang dibentuk jika daerah yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang dirinci:
   a. Sumbu x



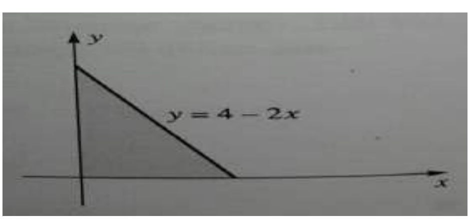
   b. Sumbu x



   c. Sumbu x dan sumbu y



   d. Sumbu x dan sumbu y



3. Sketsalah daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik persamaan yang diberikan dan tunjukkan sutau irisan yang tegak tertentu. Kemudian tentukan volume benda yang terbentuk apabila R diputar mengelilingi sumbu x.
   a. $y = \frac{x^2}{\pi}, x = 4\ dan\ y = 0$
   b. $y = \frac{1}{x}, x = 2\ dan\ y = 0$
   c. $y = x^3\ x = 3\ dan\ y = 0$
   d. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0\ diantara\ x = -2\ dan\ x = 3$
4. Sketsalah daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik persamaan yang diberikan dan tunjukkan sutau irisan yang tegak tertentu. Kemudian tentukan volume benda yang terbentuk apabila R diputar mengelilingi sumbu x.
   a. $x = y^2, x = 0\ dan\ y = 3$
   b. $x = 2\sqrt{y}, y = 4\ dan\ x = 0$
   c. $x = \frac{2}{y}, y = 2, y = 6\ dan\ x = 0$
   d. $x = y^{\frac{3}{2}}, y = 9\ dan\ x = 0$
5. Tentukan volume benda pejal yang terbentuk dengan memutar mengelilingi sumbu x daerah yang dibatasi oleh garis $x - 2y = 0$ dan parabola $y^2 = 4x$
6. Tentukan volume benda pejal yang terbentuk dengan memutar mengelilingi sumbu x daerah yang dibatasi oleh garis $y - 4x = 0$ dan parabola $y - 4x^2 = 0$
7. Tunjukkan bahwa volume silinder dengan tinggi h dan jari-jari r yang memutar daerah antara garis $y = r$ dan sumbu x, antara $x = 0\ dan\ x = h$ mengelilingi sumbu x adalah $\pi r^2 h$
8. Tunjukan bahwa volume benda pejal berbentuk bola yang berjari-jari r dengan memutar pada daerah antara setengah lingkaran $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dan sumbu x, antara $x = -r\ dan\ x = r$ mengelilingi sumbu x, sehingga simetri terhadap sumbu y dan menggunakan begian daerah yang terletak antara $x = 0\ dan\ x = r$ adalah $\frac{4}{3}\pi r^3$

Daftar Pustaka

Ayers, Frank JR & Mendelson, Elliot. 2006. Kalkulus. Edisi IV. Schaums Outline of. Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E.J & Rigdon, S.E. 2010 Kalkulus Jilid 1. Edisi IX. Erlangga.