Matematika Dasar

TRIGONOMETRI

Nyamik Rahayu Sesanti, S.Pd., M.Pd
Dyah Triwahyuningtyas, S.Si., M.Pd

MATEMATIKA DASAR TRIGONOMETRI

Oleh:
Nyamik Rahayu Sesanti dan Dyah Triwahyuningtyas

Zahra Publisher Group

Matematika Dasar : Trigonometri
Penulis :
Nyamik Rahayu Sesanti dan Dyah Triwahyuningtyas

ISBN : 978-623-6338-98-8

Editor: Tim Zahra Publisher
Penata Letak: Tim Zahra Publisher Group
Desain Sampul: Tim Zahra Publisher Group

69 hlm; 14,8 x 21 cm
Cetakan Pertama, Agustus 2021

Diterbitkan oleh
CV. Zahra Publisher Group (ANGGOTA IKAPI)
Jl. Lesanpuro II No. 554a
Kota Malang, Jawa Timur
Email: zahra.publisher@gmail.com
Whatsapp: 08986373557

Dicetak dan Didistribusikan oleh
CV. Zahra Publisher Group

KATA PENGANTAR

Syukur *Alhamdulillah* senantiasa penulis ucapkan kepada Allah SWT. yang telah memberikan limpahan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga buku ajar ini dapat diselesaikan. Pengadaan buku ajar ini merupakan penunjang dan untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa dalam mempelajari matakuliah matematika dasar khusnya materi Trigonometri. Topik yang disajikan meliputi perbandingan, jumlah dan selisih sudut, sudut rangkap, Meubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/ Pengurangandan aturan trigonometri dalam segitiga.

Buku ajar ini merupakan luaran dari hibah penelitian dosen pemula yang dibiayai oleh Dikti. Sebagaimana pada standar Universitas Kanjuruhan Malang dan Fakultas Ilmu Pendidikan (FIP) bahwa pembelajaran harus dikembangkan secara lintas keilmuan dan hasil-hasil penelitian serta penerapannya. Oleh sebab itu, buku ajar ini dapat dipergunakan oleh mahasiswa pada matakuliah Matematika Dasar.

Buku ajar ini mengedepankan aktivitas penemuan. Hal ini dikarenakan dalam penyusunannya menyesuaikan dengan penerapan teori belajar yaitu teori Bruner dalam melaksanakan penelitian.

Pada akhirnya, penulis menyadari bahwa penyusunan buku ajar ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh sebab itu, saran dan kritik yang sifatnya membangun sangat diharapkan dapat dikirimkan ke email tim yaitu nyamik@unikama.ac.id

Malang, Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar ....
Daftar Isi ....
BAB I Trigonometri ....

A. Perbandingan Trigonometri......................................
B. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut-sudut istimewa yaitu 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, dan 90^0 ....
C. Sin, cos dan tan untuk sudut $90^0 - \alpha$.........................
D. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut negative................
E. Nilai sin, cos, dan tan pada masing-masing kuadran ....
F. Identitias Trigonometri...

BAB II Jumlah, Selisih Dua Sudut Dan Sudut Rangkap Pada Trigonometri ....

A. Jumlah dan selisih dua sudut pada sinus ....
B. Jumlah dan selisih dua sudut pada cosinus ....
C. Jumlah dan selisih dua sudut pada tangent................
D. Sudut Rangkap ....
E. Meubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/ Pengurangan ....

BAB III Aturan Trigonometri Dalam Segitiga ....
A. Definisi Segitiga ....
B. Aturan Sinus ....
C. Aturan Kosinus ....
D. Luas Segitiga ....
Daftar Pustaka ....

BAB 1

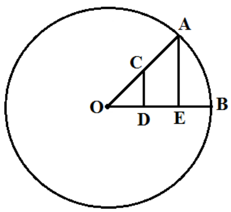
TRIGONOMETRI

A. Perbandingan Trigonometri

Taukah kamu apa itu trigonometri? Bagaimana menyelesaikan permasalahan matematika tentang trigonometr? Trigonometri sebagai suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya bangun datar yang berbentuk segitiga. Pada prinsipnya trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut, dan bermanfaat untuk menghitung ketinggian suatu tempat tanpa mengukur secara langsung sehingga bersifat lebih praktis dan efisien. Pembelajaran triginometri sangat bermanfaat bagi kehidpan manusia dalam hal pembuatan bangunan atau jembatan yang berhimpitan dengan gedung-gedung besar.

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yang terdiri dari dua kata yaitu *trigonom* berarti bangun yang mempunyai tiga sudut dan sisi (segitiga) dan *metrom* berarti suatu ukuran. Dari arti dua kata di atas, trigonometri dapat diartikan

sebagai cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut. Dalam mempelajari perbandingan sisi-sisi segitiga pada trigonometri, maka segitiga itu harus mempunyai tepat satu sudutnya (90°) artinya segitiga itu tidak lain adalah segitiga siku-siku.



Perhatikan gambar disamping!

Terdapat suatu lingkaran yang berpusat di titik O, ΔOCD dengan siku-siku di titik D dan ΔOAE dengan siku-siku di titik E. Menurut teorema sudut-sudut, ΔOCD sebangun dengan ΔOAE dan diperoleh

1. $\frac{OD}{OC} = \frac{OE}{OA}$
2. $\frac{CD}{OC} = \frac{AE}{OA}$
3. $\frac{CD}{OD} = \frac{AE}{OE}$

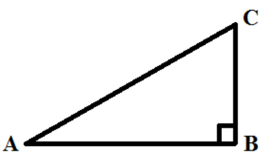
Bentuk $\frac{OD}{OC} = \frac{OE}{OA} = cos\angle O$, $\frac{CD}{OC} = \frac{AE}{OA} = \sin \angle O$, dan $\frac{CD}{OD} = \frac{AE}{OE} = \tan \angle O$.

Sin $\angle O$ biasa kita sebut sinus yaitu suatu perbandingan panjang pada suatu segitiga yaitu antara sisi depan sudut dengan sisi miring segitiga.

Cos $\angle O$ biasa disebut dengan cosinus merupakan suatu perbandinganpenjang pada suatu segitiga yaitu diantaranya sisi samping sudut dengan sisi miringnya.

Tan (tangen) merupakan suatu perbandingan panjang pada suatu segitiga diantara sisi dengan sudut serta sisi samping.

Perhatikan kembali gambar berikut :



Berdasarkan gambar di samping yang merujuk pada penjelasan lingkaran di atas, dapat dikatakan bahwa:

1. $\sin \angle A = \frac{BC}{AC}$

2. $\cos \angle A = \dfrac{AB}{AC}$

3. $\tan \angle A = \dfrac{BC}{AB}$

Selain bentuk yang sudah terwujud terdapat bentuk lain sebagai salah satu patokan dalam penentuan sudut diantaranya:

1. $\text{cosec } \angle A = \dfrac{1}{\sin \angle A} = \dfrac{1}{\frac{BC}{AC}} = \dfrac{AC}{BC}$

2. $\text{secant } \angle A = \dfrac{1}{\cos \angle A} = \dfrac{1}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{AC}{AB}$

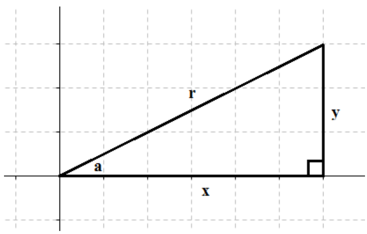
3. $\text{cotan } \angle A = \dfrac{1}{\tan \angle A} = \dfrac{1}{\frac{BC}{AB}} = \dfrac{AB}{BC}$

Penentuan sudut selain sin, cos dan tan terdapat beberapa bentuk lain seperti yang sudah dijelaskan di atas dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Cosec adalah kebalikan dari sin dengan artian jika sinus merupakan hasil bagi antara sisi tegak dengan sisi miring, maka cosec merupakan kebalikan yaitu hasil bagi antara sisi miring dengan sisi tegak.

"Dapat dituliskan rumus cosec merupakan sisi miring/sisi tegak"

2. Secan merupakan hasil bagi antara sisi miring dengan sisi datar. Secan dapat diartikan sebagai kebalikan dari cosinus. Rumus secan dapat ditulis sebagai berikut ini:
   "secan = sisi miring/ sisi datar"
3. Cotangen merupakan hasil bagi antara sisi datar dengan sisi tegak dengan kebalikan dari tangen. Rumus cotangen dapat ditulis sebagai berikut ini:
   "cotan = sisi datar/sisi tegak"



Disamping itu, bentuk sin, cos dan tan dapat dinyatakan dalam bentuk lainnya. Perhatikan gambar berikut

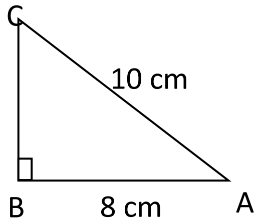
Sin a = $\frac{y}{r}$ **Csc a =** $\frac{r}{y}$

Cos a = $\frac{x}{r}$ **Sec a =** $\frac{r}{x}$

Tan a = $\frac{y}{x}$ **Cot a =** $\frac{x}{y}$

Contoh :

1. Diketahui ΔABC siku-siku di B, AB = 8cm dan AC = 10 cm, sebagaimana di ilustrasikan pada gambar di samping.



   Tentukan nilai sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A dan cotan A dari segitiga tersebut!

   Alternatif Jawaban :

   Karena ΔABC siku-siku di B, maka berlaku aturan pythagoras.

   $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36.$

   $BC = \sqrt{36} = 6.$

   Jadi dapat ditentukan sebagai berikut:

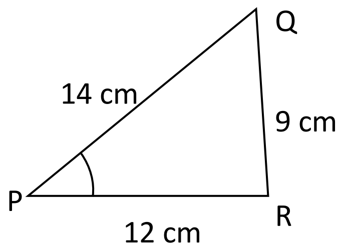
   $\text{Sin } A = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$ $\qquad$ $\text{Cosec } A = \frac{1}{\text{Sin } A} = \frac{5}{3}$

   $\text{Cos } A = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$ $\qquad$ $\text{Sec } A = \frac{1}{\text{Cos } A} = \frac{5}{4}$

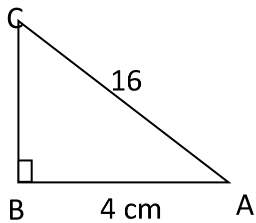
   $\text{Tan } A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$ $\qquad$ $\text{Cotan } A = \frac{1}{\text{Tan } A} = \frac{4}{3}$

Latihan :

1. Jika diketahui cos β = $\frac{5}{13}$,Tentukan nilai sin β, tan β, cosec β, sec β dan cotan β ?
2. Dengan memperhatikan gambar di bawah ini



   Jelaskan nilai sin P, cos P dan tan P!
3. Jika A+B = $\frac{\pi}{3}$ dan cos A cos B = $\frac{5}{8}$ maka cos (A-B) adalah...
4. Diketahui ΔABC siku-siku di B, AB = 8cm dan AC = 10 cm, sebagaimana di ilustrasikan pada gambar di samping.

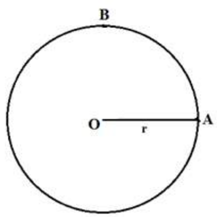


   Tentukan nilai sin A dan cos A pada gambar yang ada!
5. Buatlah gambar dengan merujuk penjelasaan di bawah ini

   Pada segitifa ABC diketahui 3 sin A + 4 cos B = 6 dan 3 cos A + 4 sin B = 1, maka tentukan nilai sin C !

B. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut-sudut istimewa yaitu 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, dan 90^0

1. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut 0^0



Pada sudut 0^0 sisi samping (OA) berimpit dengan sisi miring (OA) dan sisi depan memiliki panjang 0. Dengan demikian, diperoleh bahwa

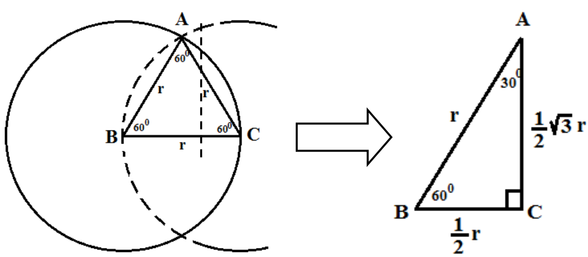
$\sin 0^0 \;=\; 0$

$\cos 0^0 \;=\; 1$

$\tan 0^0 \;=\; 0$

2. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut 30^0

Perhatikan gambar berikut



,

Berdasarkan gambar tersebut diperoleh bahwa:

$$\sin 30^0 = \sin \angle A = \frac{BC}{AB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

Pertama untuk penulisan nilai sin dalam sudut istimewa 30^0 ditemukan bahwa hasilnya menjadi $\frac{1}{2}$

$$\cos 30^0 = \cos \angle A = \frac{AC}{BC}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

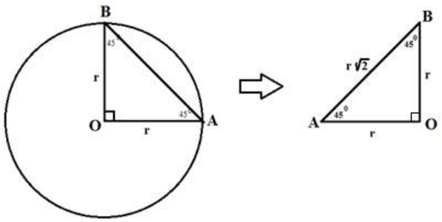
Kedua untuk penulisan nilai cos dalam sudut istimewa 30^0 ditemukan bahwa hasilnya menjadi $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\tan 30^0 = \tan \angle A = \frac{BC}{AC}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Terakhir untuk penulisan nilai cos dalam sudut istimewa 30^0 ditemukan bahwa hasilnya menjadi $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai sin, cos dan tan pada sudut 45^0



Dari gambar di atas, diperoleh bahwa

$$\sin 45^0 = \sin \angle A = \frac{OB}{AB}$$

$$= \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

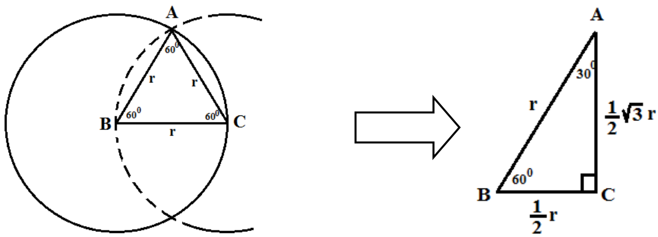
$$\cos 45^0 = \cos \angle A = \frac{OA}{AB}$$

$$= \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^0 = \tan \angle A = \frac{OB}{OA}$$

$$= \frac{r}{r} = 1$$

4. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut 60^0



Perhatikan gambar di atas, diperoleh bahwa

$$\sin 60^0 = \sin \angle B = \frac{AC}{AB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

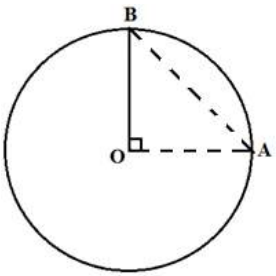
$$\cos 60^0 = \cos \angle B = \frac{BC}{AB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

$\tan 60^0 = \tan \angle B = \dfrac{AC}{BC}$

$$= \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{\frac{1}{2}r} = \sqrt{3}$$

5. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut 90^0



Pada sudut 90^0 sisi depan (OB) berimpit dengan sisi miring (OB) dan sisi samping memiliki panjang 0 (OA = 0). Dengan demikian, diperoleh bahwa

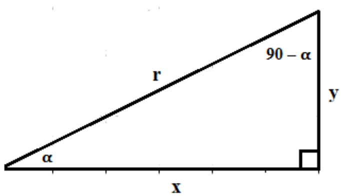
$\sin 90^0 = 1$

$\cos 90^0 = 0$

$\tan 90^0 = \infty$

C. Sin, cos dan tan untuk sudut $90^0 - \alpha$

Perhatikan gambar berikut!



Sin $(90^0 - \alpha)$ $= \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

Cos $(90^0 - \alpha)$ $= \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

Tan $(90^0 - \alpha)$ $= \dfrac{x}{y} = \cot\alpha$

Contoh

Tanpa menggunakan kalkulator, Tentukan nilai dari!

1. Sin $(90^0 - 30^0)$
2. Cos $(90^0 - 45^0)$
3. Tan $(90^0 - 60^0)$

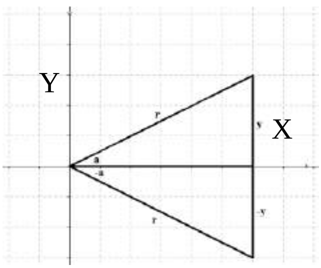
Penyelesaian

1. Sin $(90^0 - 30^0)$= cos 30^0 = $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
2. Cos $(90^0 - 45^0)$ = sin 45^0 = $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$
3. Tan $(90^0 - 60^0)$ = cot 60^0 = $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Dari uraian di atas lengkapi tabel nilai sinus, cosinus dan tangen berikut.

Trigonometri	***Sudut Istimewa***				
	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
Sinus	……	……	……	……	……
Cosinus	……	……	……	……	……
Tangen	……	……	……	……	……

D. Nilai sin, cos, dan tan pada sudut negative



Perhatikan gambar berikut!

Sin (-a) = $\dfrac{-y}{r} = -\dfrac{y}{r} = -\sin\ a$

Cos (-a) = $\dfrac{x}{r} = \cos\ a$

Tan (-a) = $\dfrac{-y}{x} = -\dfrac{y}{x} = -\tan\ a$

Contoh

Tanpa menggunakan kalkulator, Tentukan nilai dari!

1. Sin (-30^0)
2. Cos (-45^0)
3. Tan (-60^0)

Penyelesaian :

1. $\text{Sin}\ (-30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$

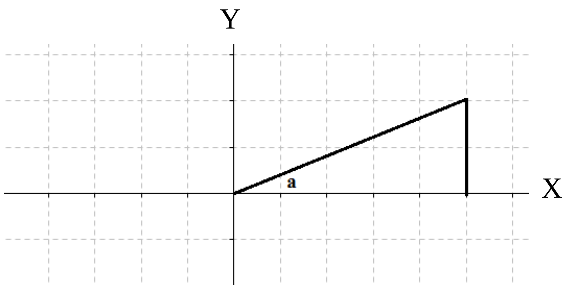
2. $\text{Cos}\ (-45^0) = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. $\text{Tan}\ (-60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

E. Nilai sin, cos, dan tan pada masing-masing kuadran

1. Kuadran I

Perhatikan gambar berikut



Sin a = $\frac{y}{r}$ (positif)

Cos a = $\frac{x}{r}$ (positif)

Tan a = $\frac{y}{x}$ (positif)

Csc a = $\frac{r}{y}$ (positif)

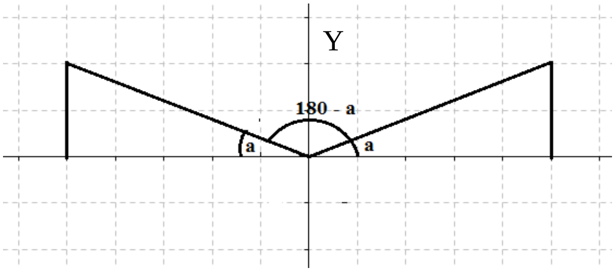
Sec a = $\frac{r}{x}$ (positif)

Cot a = $\frac{x}{y}$ (positif)

{Berdasarkan datar di atas dapat disimpulkan bahwa kuadran I mempunyai hasil yang positif dengan koordinat positif semuanya}

2. Kuadran II

Perhatikan gambar berikut!



Sin (180 – a) = sin a = $\frac{y}{r}$ (positif) , mengapa?

Cos (180 – a) = - cos a = $-\frac{x}{r}$ (negatif), mengapa?

Tan (180 – a) = - tan a = $-\frac{y}{x}$ (negatif), mengapa?

Contoh

Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah

1. Sin 120^0
2. Cos 135^0
3. Tan 150^0

Penyelesaian

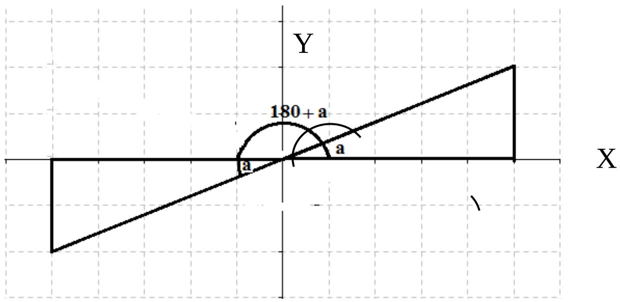
1. Sin 120^0 = sin (180^0 – 60^0) = sin 60^0 = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Cos 135^0 = cos (180^0 – 45^0) = - cos 45^0 = $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. Tan 150^0 = tan (180^0 – 30^0) = - tan 30^0 = $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. Kuadran III

Perhatikan gambar berikut!



Sin (180 + a) = - sin a = $-\frac{y}{r}$ (negatif)

Cos (180 + a) = - cos a = $-\frac{x}{r}$ (negatif)

Tan (180 + a) = tan a = $\frac{y}{x}$ (positif)

Contoh

Tanpa menggunakan kalkulator, Tentukan nilai dari!

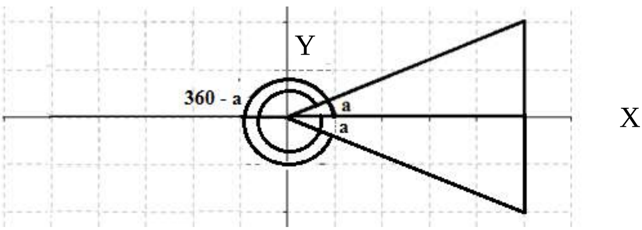
1. Sin 210^0
2. Cos 225^0
3. Tan 240^0

Penyelesaian

1. Sin 210^0 = sin $(180^0 + 30^0)$ = - sin 30^0 = $\frac{1}{2}$
2. Cos 225^0 = cos $(180^0 + 45^0)$ = - cos 45^0 = $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. Tan 240^0 = tan $(180^0 + 60^0)$ = tan 60^0 = $\sqrt{3}$

4. Kuadran IV

Perhatikan gambar berikut!



Sin $(360^0$ - a) = - sin a = $-\frac{y}{r}$ (negatif)

Cos $(360^0$ - a) = - cos a = $\frac{x}{r}$ (positif)

Tan $(360^0$ - a) = tan a $= -\frac{y}{x}$ (negatif)

Contoh:

Tanpa menggunakan kalkulator, Tentukan nilai dari!

1. Sin 330^0
2. Cos 300^0
3. Tan 315^0

Penyelesaian

1. Sin $330^0 = \sin(360^0 - 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$
2. Cos $300^0 = \cos(360^0 - 60^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
3. Tan $315^0 = \tan(360^0 - 45^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

Latihan

1. Sebuah tangga disandarkan pada suatu tembok vertikal. Sudut yang dibentuk oleh tangga itu dengan lantai horizontal adalah 60^o. Jika jarak kaki tangga ke tembok tadi adalah 6 m, hitunglah:
   a. Panjang tangga itu !
   b. Tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai !

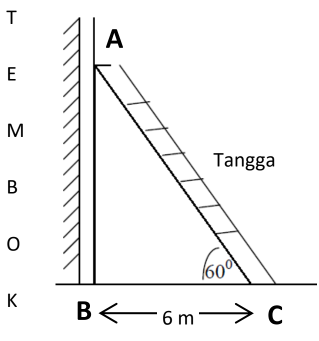
Jawab :

Diketahui

Sudut yang dibentuk oleh tangga dan lantai 60^o.

Jarak kaki tangga ke tembok tadi adalah 6 m.

Situasi ini dapat diilustrasikan sebagaimana tampak pada gambar



Dengan memperhatikan Δ ABC yang terbentuk, maka kita peroleh :

a. $\text{Cos } 60^o \quad = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$\dots\dots \quad = \dfrac{\dots\dots}{AC}$

$AC \quad = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$

Jadi panjang tangga adalah …….. m

b. $\text{Tan } 60^o \quad = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

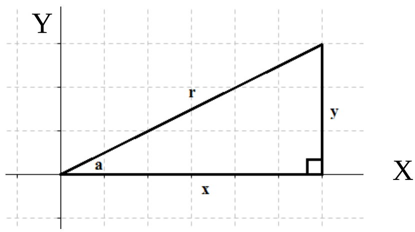
$\dots\dots \quad = \dfrac{AB}{6}$

$AB \quad = \dots\dots = \dots\dots$

Jadi tinggi tembok dari ujung tangga ke lantai adalah … m

F. Identitias Trigonometri

Perhatikan kembali gambar berikut



Berdasarkan gambar tersebut, dapat dinyatakan kembali bahwa

$$\text{Sin a} = \frac{y}{r} \qquad \text{Csc a} = \frac{r}{y}$$

$$\text{Cos a} = \frac{x}{r} \qquad \text{Sec a} = \frac{r}{x}$$

$$\text{Tan a} = \frac{y}{x} \qquad \text{Cot a} = \frac{x}{y}$$

Dilain pihak, terdapat teorema Pythagoras yang menyatakan bahwa

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Selanjutnya, akan di explorasi bagaimana bentuk identitas dari trigonometri dengan mengkombinasikan antara teorema pythagoras dengan trigonometri. Berikut deskripsi explorasi penemuan dari identitas tersebut.

Perhatikan kembali teorema Pythagoras

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Untuk masing-masing ruas selanjutnya dibagi dengan r^2, diperoleh

$$1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

$$1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Dengan demikian, identitias pertama menunjukkan bahwa

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Perhatikan kembali bahwa

$r^2 = x^2 + y^2$

Untuk masing-masing ruas selanjutnya dibagi dengan x^2, diperoleh

$$\frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

Dengan demikian, identitias yang diperoleh bahwa

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

Perhatikan kembali bahwa

$r^2 = x^2 + y^2$

untuk masing-masing ruas selanjutnya dibagi dengan y^2,

diperoleh

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{r}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

Dengan demikian, identitias yang diperoleh bahwa

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$
$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

Contoh :

Gunakan Identitas Trigonometri tersebut untuk menyelesaiakan soal berikut :

1. Tentukan bentuk sederhana dari trigonometri berikut :

   a. tan x cos x b. $4\cos^2 x - 4$

   Jawab :

   a. tan x cos x $= \dfrac{\sin x}{\cancel{\cos x}} . \cancel{\text{Cos } x}$

   $= \sin x$

b. $4\cos^2 x - 4 \quad = \quad 4(1 - \sin^2 x) - 4$

$= \quad 4 - 4\sin^2 x - 4$

$= \quad -4\sin^2 x$

2. Tentukan hasil bentuk trigonometri : $\tan^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

Jawab :

$\tan^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \cancel{\cos^2 x} + \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

Tugas :

1. Bagaimana hasil dari bentuk trigonometri dari :

   $8\cos^2 x - 8$

2. Tentukan bentuk sederhana dari

   a. $\dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cot\text{an}\,\alpha + \text{cosec}\,\alpha}$

   b. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

3. Buktikan bahwa $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$...

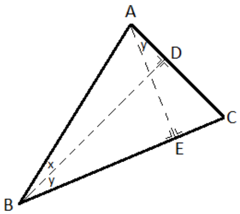
4. Buktikan pernyataan di bawah ini:
   a. $\sin 45° \cos 45° + \cos 45° \sin 45° = \sin 90°$
   b. $2 \cos^2 30° - 1 = 1 - 2 \sin^2 30° = \cos 60°$

5. Sederhanakanlah persamaan trigonometeri berikut ini!
   a. $\sin 160 + \sin 40$
   b. $\cos 2x + \cos 8x$

BAB II

Jumlah, Selisih Dua Sudut Dan Sudut Rangkap Pada Trigonometri

A. Jumlah dan selisih dua sudut pada sinus



Diberikan segitiga ABC berikut, pada segitiga ABD diperoleh

1. AD = AB sin x ,
2. BD = AB cos x

pada segitiga BDC diperoleh,

1. DC = BC sin y,
2. BD = BC cos y

pada segitiga AEC diperoleh

1. EC = AC sin y
2. AE = AC cos y

Perhatikan sudut B,

$$\sin (x + y) = \sin \angle B = \frac{AE}{AB}$$

karena AE = AC cos y dan AD = AB sin x, maka diperoleh

$$= \frac{AC \cos y}{\frac{AD}{\sin x}} = \frac{AC \sin x \cos y}{AD}$$

karena AC = AD + DC, maka diperoleh

$$= \frac{(\mathrm{AD}+\mathrm{DC})\sin \mathrm{x} \cos \mathrm{y}}{\mathrm{AD}}$$

$$= \sin x \cos y + \frac{\mathrm{DC} \sin \mathrm{x} \cos \mathrm{y}}{\mathrm{AD}}$$

$$= \sin x \cos y + \frac{\mathrm{DC} \cos \mathrm{y}}{\mathrm{AB}}$$

karena BD = BC cos y, maka diperoleh

$$= \sin x \cos y + \frac{\mathrm{DC}\ \mathrm{BD}}{\mathrm{AB}\ \mathrm{BC}}$$

karena DC = BC sin y dan BD = AB cos x, maka diperoleh

$$= \sin x \cos y + \sin \mathrm{y} \cos \mathrm{x}$$

Dengan demikian

sin (x + y) = sin x cos y + sin y cos x

Selanjutnya, akan dijabarkan bentuk sin (x – y), bentuk sin (x – y) dapat diubah menjadi penjumlahan sudut dimana sin (x – y) = sin (x + (-y)).

Perhatikan kembali bahwa {sin (x – y) = sin (x + (-y))} karena bentuk sin (x + y) = sin x cos y + sin y cos x, maka diperoleh

sin(x + (-y))= sin x cos (-y) + sin (-y) cos x

ingat kembali bahwa cos (-y) = cos y dan sin (-y) = - sin y, maka diperoleh

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

Dengan demikian

$$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

Contoh

Dengan menggunakan aturan jumlah dan selisih sudut, selesaikan bentuk berikut tanpa menggunakan kalkulator

1. Sin 15^0
2. Sin 75^0
3. Sin 105^0
4. Sin (-195^0)

Penyelesaian

1. $\sin 15^0 = \sin (45^0 - 30^0)$

   $= \sin 45^0 \cos 30^0 - \sin 30^0 \cos 45^0$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   $= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

   $= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

2. $\sin 75^0 = \sin (45^0 + 30^0)$

   $= \sin 45^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 45^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

3. $\sin 150^0 = \sin (120^0 + 30^0)$

$= \sin 120^0 \cos 30^0 + \cos 120^0 \sin 30^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + (-\frac{1}{2}).\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$

4. $\sin (-195^0) = -\sin (195^0)$

$= -\sin (180^0 + 15^0)$

$= -(\sin 180^0 \cos 15^0 + \sin 15^0 \cos 180^0)$

$= -(0 . \cos 15^0 + \sin 15^0 (-1))$

$= -(-\sin 15^0)$

$= \sin 15^0$

$= \sin (45^0 – 30^0)$

$= \sin 45^0 \cos 30^0 – \sin 30^0 \cos 45^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

B. Jumlah dan selisih dua sudut pada cosines

Untuk bentuk jumlah dan selisih cosines, perlu diingat bentuk-bentuk berikut yaitu cos (90 – x) = sin x dan sin (90 – x) = cos x. Selanjutnya, untuk bentuk cos (x + y) dapat dinyatakan dalam bentuk sinus jumlah dua sudut. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \cos (x + y) &= \sin (90 - (x + y)) \\ &= \sin ((90 - x) - y) \\ &= \sin (90 - x) \cos y - \sin y \cos (90 - x) \end{aligned}$$

karena cos (90 – x) = sin x dan sin (90 – x) = cos x, maka diperoleh

$$= \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

Dengan demikian,

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Selanjutnya, bentuk cos (x – y) dapat menggunakan cos (x + y) dengan mengubah bentuknya. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \cos (x - y) &= \cos (x + (-y)) \\ &= \cos x \cos (-y) - \sin x \sin (-y) \end{aligned}$$

Karena cos (-y) = cos y dan sin (-y) = - sin y, maka diperoleh

$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Dengan demikian,

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Contoh

Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan hasil dari

1. Cos 15^0
2. Cos 135^0
3. Cos 225^0
4. Cos (-75^0)

Penyelesaian

1. Cos 15 $= \cos(45^0 - 30^0)$

   $= \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $= \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

2. Cos 135^0 $= \cos(90^0 + 45^0)$

   $= \cos 90^0 \cos 45^0 - \sin 90^0 \sin 45^0$

   $= 0 \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. Cos 225^0 $= \cos(180^0 + 45^0)$

   $= \cos 180^0 \cos 45^0 - \sin 180^0 \sin 45^0$

$= (-1)\,\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

4. Cos (-75^0) = cos (75^0) = cos (45^0 + 30^0)

$= \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

C. Jumlah dan selisih dua sudut pada tangen

Untuk bentuk jumlah dan selisih tangen, perlu diingat bentuk-bentuk berikut yaitu $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Selanjutnya, untuk bentuk tan (x + y) dapat dinyatakan dalam bentuk pembagian sinus dengan cosinus. Perhatikan bahwa

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$= \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

masing-masing pembilang dan penyebut dibagi dengan cos x cos y, maka diperoleh

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Dengan demikian,

$$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Selanjutnya, untuk tan (x – y) penjabarannya diberikan kepada mahasiswa sebagai latihan.

Contoh

Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah!

1. Tan 15^0
2. Tan 135^0
3. Tan 330^0
4. Tan (-225^0)

Penyelesaian

1. Tan 15^0 $= \tan (45^0 - 30^0)$

$$= \frac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 45^0 \tan 30^0}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+1\ .\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

2. Tan 135^0 = tan ($180^0 - 45^0$)

$$= \frac{\tan 180^0 - \tan 45^0}{1+\tan 180^0 \tan 45^0}$$

$$= \frac{0-1}{1+0\ .1}$$

$$= \frac{-1}{1}$$

$$= -1$$

3. Tan 330^0 = tan ($360^0 - 30^0$)

$$= \frac{\tan 360^0 - \tan 30^0}{1+\tan 360^0 \tan 30^0}$$

$$= \frac{0-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+0\ .\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1}$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

4. Tan (-225^0) = - tan ($180^0 + 45^0$)

$$= -\left(\frac{\tan 180^0 + \tan 45^0}{1-\tan 180^0 \tan 45^0}\right)$$

$$= -\left(\frac{0+1}{1-0\ .1}\right)$$

$$= -1$$

D. Sudut Rangkap

Dari rumus–rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut, dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

   Jadi

   $$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

   Jadi

   $$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

   Rumus–rumus variasi bentuk lain yang memuat $\cos 2\alpha$ dapat diturunkan dengan mengingat rumus dasar $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

   $$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Sehingga

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2) & \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ 3) & \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \end{array}}$$

3. $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Jadi

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

Contoh :

Diketahui sin a = $\frac{3}{5}$ (a sudut tumpul), tentukan nilai :

a. sin 2a

b. cos 2a

c. tan 2a

Jawab :

sin a = $\frac{3}{5}$ maka cos a = $-\frac{4}{5}$ (karena sudut tumpul / di kuadran 2 maka nilai cos negative)

a. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2\ \frac{3}{5}\ (-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$

b. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

c. $\text{Tan } 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\frac{24}{7}$

Latihan :

1. Ditentukan $\sin A = \frac{24}{25}$. Nilai $\cos 2A = ...$
2. Nilai $1\text{-}2 \sin^2 36^0 = ….$
3. Tentukanlah nilai $\text{Tan } 125^0 = ...$
4. Nilai $\sin 175^0$ adalah ....
5. Nilai $\cos (-75)^0$ adalah ....

E. Merubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/Pengurangan

1. Dari rumus cosinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad +$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta}$

$$
\begin{array}{l}
\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
\hline
\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta
\end{array} \quad -
$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta}$

2. Dari rumus sinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$$
\begin{array}{l}
\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
\hline
\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta
\end{array} \quad +
$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta}$

$$
\begin{array}{l}
\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
\hline
\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta
\end{array} \quad -
$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta}$

Contoh :

Tanpa tabel atau kalkulator hitunglah nilai :

a. $2 \sin 105^o \cos 75^o$ c. $\cos 37{,}5^o \cos 7{,}5^o$

b. $8 \cos 75^o \sin 15^o$ d. $\frac{1}{2} \sin 82{,}5^o \sin 37{,}5^o$

Jawab :

a. $2 \sin 105^o \cos 75^o = \sin (105^o + 75^o) + \sin (105^o - 75^o)$

$$= \sin 180^o + \sin 30^o \quad = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b. $8 \cos 75^o \sin 15^o = 4 (2 \cos 75^o \sin 15^o \quad)$

$$= 4 (\sin (105^o + 75^o) - \sin (105^o - 75^o))$$

$$= 4 (\sin 180^o - \sin 30^o) = 4 \left(0 - \frac{1}{2}\right) = -2$$

c. $\cos 37{,}5^o \cos 7{,}5^o = \frac{1}{2} (2 \cos 37{,}5^o \cos 7{,}5^o)$

$$= \frac{1}{2} (\cos (37{,}5^o + 7{,}5^o) + \cos (37{,}5^o - 7{,}5^o))$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 45^o + \cos 30^o)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

d. $\frac{1}{2}\sin 82{,}5^o \sin 37{,}5^o = \frac{1}{4}(2 \sin 82{,}5^o \sin 37{,}5^o)$

$= \frac{1}{4}(\cos (82{,}5^o - 37{,}5^o) - \cos (82{,}5^o + 37{,}5^o))$

$= \frac{1}{4}(\cos 120^o - \cos 45^o)$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$= -\frac{1}{8}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

Latihan

Tentukan nilai dari :

1. $2 \cos 40^0 \cos 20^0 - 2 \sin 55^0 \sin 35^0 =$ ….
2. $\sin 39^0 \sin 21^0 + \cos 54^0 \cos 36^0 =$ ….
3. $2 \sin 75^0 \cos 15^0 =$ ….
4. $2 \cos 75^0 \sin 15^0 =$ ….
5. $\sin 45^0 \cos 15^0 =$ ….

BAB III

ATURAN TRIGONOMETRI DALAM SEGITIGA

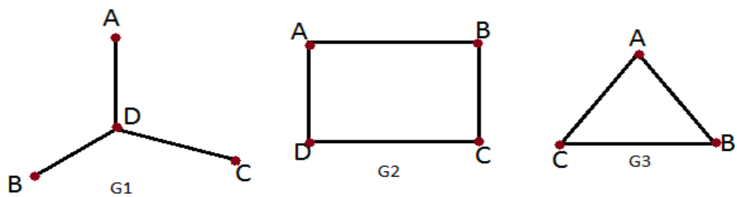
A. Definisi Segitiga

Segitiga yang sering dijelaskan kepada kebanyakan siswa masih dalam kondisi menyebutkan ciri-ciri dan teorema sebagai definisi. Sebagai contoh definisi segitiga yaitu suatu bangun datar yang memiliki tiga sisi, tiga sudut dan jumlah sudut dalam segitiga adalah 180. Jika kita perhatikan contoh definisi yang demikian, maka terdapat suatu keganjalan sebab “jumlah sudut dalam segitiga adalah 180” merupakan suatu teorema. Seharusnya hal yang perlu diperhatikan ketika berbicara masalah definisi maka harus memahami sifat-sifat dari definisi itu sendiri yaitu berlaku secara universal.

Menanggapi kondisi yang demikian, penulis menelusuri seperti apakah definisi segitiga yang benar. Lewis (1968: 111) mendefinisikan polygon sebagai berikut: *Polygon is the union of the set of points* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$ *with the line segments* $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ *such that if any two of these line segments intersect, their*

intersection will be one of the points $P_1, P_2, P_3, . . . , P_{n-1}, P_n$ and no other point. Artinya bahwa poligon adalah gabungan dari himpunan titik-titik P_1, P_2, P_3, . . . , P_{n-1}, P_n dengan segmen-segmen garis $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ sehingga jika dua segmen garis berpotongan maka titik potongnya merupakan salah satu dari titik-titik P_1, P_2, P_3, . . . , P_{n-1}, P_n dan bukan titik yang lain. Selanjutnya Lewis (1968:120) memberikan definisi segitiga sebagai berikut: *a triangle is a polygon that has three sides*. Artinya bahwa segitiga merupakan suatu polygon yang memiliki 3 sisi.

Perhatikan gambar berikut

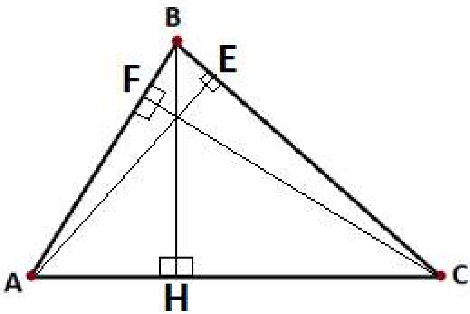


Gambar G1 bukanlah polygon walaupun memiliki 3 sisi. Untuk itu, menyalahi definisi segitiga jika gambar tersebut dikatakan segitiga. Gambar G2 merupakan polygon dan memiliki 4 sisi. Namun tetap menyalahi definisi segitiga yang diberikan sebab harus memiliki 3 sisi. Gambar G3 merupakan polygon dan memiliki 3 sisi. Dengan demikian, gambar tersebut merupakan suatu segitiga

B. Aturan Sinus

Aturan sinus adalah suatu aturan yang digunakan untuk mencari ukuran sudut suatu segitiga apabila kedua sisi di depan sudutnya, dan satu sudut diketahui. Atau dapat dikatakan pula sebagai aturan untuk mencari ukuran salah satu sisi di depan sudut suatu segitiga apabila kedua sudut dan sisi lainnya di depan sudut diketahui. Selanjutnya akan kita cari rumus aturan sinus pada segitiga.

Misal diketahui segitiga ABC dengan tinggi masing-masing HB, EA, dan CF berikut:



Perhatikan segitiga CHB

$$\sin\angle C = \frac{HB}{BC} \leftrightarrow HB = BC\sin\angle C \quad \text{.......................} (1)$$

Perhatikan segitiga ABH,

$$\sin\angle A = \frac{HB}{AB} \quad \leftrightarrow \quad HB = AB \sin\angle A \text{ .... } (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$AB \sin\angle A = BC \sin\angle C$$

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} \text{ ....}(3)$$

Perhatikan kembali segitiga FBC,

$$\sin\angle B = \frac{FC}{BC} \quad \leftrightarrow \quad FC = BC \sin\angle B \text{ .... } (4)$$

Perhatikan kembali segitiga ACF,

$$\sin\angle A = \frac{FC}{AC} \quad \leftrightarrow \quad FC = AC \sin\angle A \text{ .... } (5)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$BC \sin\angle B = AC \sin\angle A$$

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B} \text{ .... } (6)$$

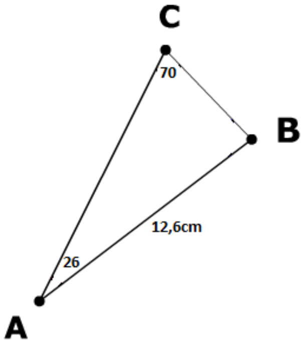
Dari persamaan (3) dan (6) diperoleh,

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$$

Contoh 1

Diketahui segitiga ABC dengan AB = 12,6cm, $\angle A = 26^0$ dan $\angle C = 70^0$. Hitunglah panjang BC!

Jawab



$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A}$$

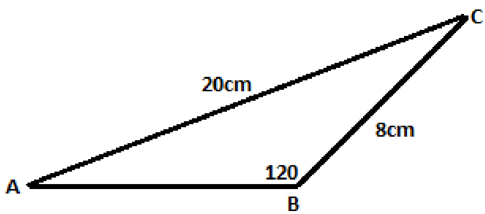
$$\frac{12{,}6}{\sin 70^0} = \frac{BC}{\sin 26^0}$$

$$BC = \frac{12{,}6 \sin 26^0}{\sin 70^0} = 5{,}9$$

Jadi panjang BC adalah 5,9cm

Contoh 2

Diberikan segitiga seperti gambar berikut



Hitunglah besar $\angle A$!

Jawab:

$$\frac{\text{AC}}{\sin\angle\text{B}} = \frac{\text{BC}}{\sin\angle\text{A}}$$

$$\frac{20}{\sin 120^0} = \frac{8}{\sin\angle\text{A}}$$

$$\sin\angle\text{A} = \frac{8\ \sin 120^0}{20} = 0.35$$

(dibulatkan sampai 2 angka di belakang koma)

$$\angle\text{A} = 20{,}48$$

(dibulatkan sampai 2 angka di belakang koma)

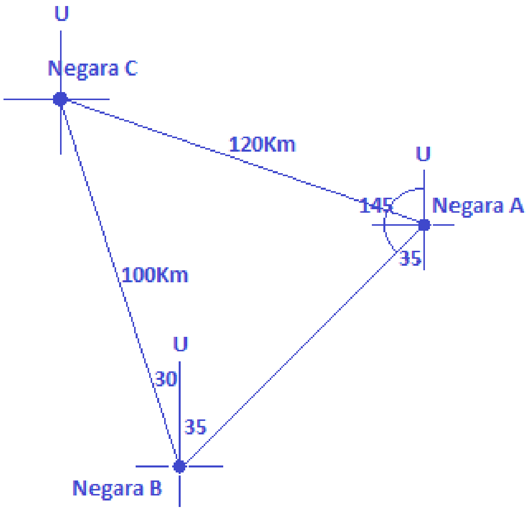
Jadi besar ukuran sudut A adalah $20{,}48^0$

Contoh 3

Suatu kapal berlayar dari negara A dan Negara B dengan jurusan tiga angka 145^0 dan dari Negara B melanjutkan ke Negara C dengan jurusan tiga angka 030^0 . Apabila jarak Negara A ke Negara C 120 km dan Jarak Negara C ke B 100km. Hitunglah jarak Negara A ke Negara B!

Jawab

Ilustrasi kejadian tersebut adalah seperti gambar berikut:



Untuk menentukan jarak A ke B maka besar sudut C perlu diketahui. Untuk membantu menyelesaikan ini maka perlu diketahui sudut A dengan menggunakan

$$\frac{100}{\sin\angle A} = \frac{120}{\sin 75}$$

$$\sin\angle A = \frac{100\ \sin 75^0}{120} = 0.80$$

(dibulatkan sampai 2 angka di belakang koma)

$$\angle A = 53{,}1$$

(dibulatkan sampai 2 angka di belakang koma)

Jadi besar sudut A adalah $53,1^0$ sehingga besar sudut C adalah 51.9^0(mengapa?). Oleh sebab itu, jarak Negara A ke Negara B dapat ditentukan dengan meggunakan

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 51.9} = \frac{120}{\sin 75}$$

$$\mathrm{AB} = \frac{120\ \sin 51.9}{\sin 75} = 97{,}8$$

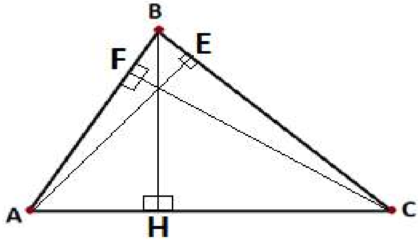
(dibulatkan sampai 1 angka di belakang koma)

Jadi jarak Negara A ke Negara B adalah 97,8 Km.

C. Aturan Cosinus

Aturan kosinus digunakan untuk menghitung panjang salah satu sisi segitiga jika dua sisi dan satu sudut diketahui. Atau dapat pula dikatakan sebagai aturan yang digunakan untuk menghitung besar sudut jika ketiga sisinya diketahui. Selanjutnya akan kita cari rumus untuk aturan cosines.

Misal diketahui segitiga ABC dengan tinggi masing-masing HB, EA, dan CF berikut:



Perhatikan segitiga AHB, diperoleh

- $AH = AB \cos\angle A$
- $AH^2 = AB^2 - HB^2$

Perhatikan segitiga CBH, diperoleh

- $HC^2 = BC^2 - HB^2$

Perhatikan segitiga ABC, diperoleh $AC = AH + HC$

Selanjutnya dibuat

$$AC^2 = (AH + HC)^2 = AH^2 + HC^2 + 2\,AH\,HC$$

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AH^2 + HC^2 + 2\,AH\,HC \\
&= AH^2 + HC^2 + 2\,AH\,(AC - AH) \\
&= AH^2 + HC^2 + 2\,AH\,AC - 2\,HC^2 \\
&= -\,AH^2 + HC^2 + 2AH\,AC \\
&= -\,(AB^2 - HB^2) + (BC^2 - HB^2) + 2\,AB \cos\angle A\,AC \\
&= -\,AB^2 + HB^2 + BC^2 - HB^2 + 2\,AB\,AC \cos\angle A \\
&= -\,AB^2 + BC^2 + 2\,AB\,AC \cos\angle A
\end{aligned}
$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AC\,AB \cos\angle A$$

Dengan demikian panjang BC dirumuskan dengan

$$\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\ AC\ AB\ cos\angle A}$$

Selanjutnya, akan kita cari rumus untuk sisi AC. Segitiga yang perlu diperhatikan adalah segitiga ACF dan segitiga ABF. Pada segitiga ACF diperoleh

- $FB = BC \cos\angle B$
- $FB^2 = BC^2 - CF^2$

Sedangkan pada segitiga ABF diperoleh

- $AF^2 = AC^2 - CF^2$

Perhatikan segitiga ABC, diperoleh AB = AF + FB

Selanjutnya dibuat

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (AF + FB)^2 = AF^2 + FB^2 + 2\ AF\ FB \\
AB^2 &= AF^2 + FB^2 + 2\ AF\ FB \\
&= AF^2 + FB^2 + 2\ (AB - FB)\ FB \\
&= AF^2 + FB^2 + 2\ AB\ FB - 2FB^2 \\
&= AF^2 - FB^2 + 2\ AB\ FB \\
&= (AC^2 - CF^2) - (BC^2 - CF^2) + 2\ AB\ BC \cos\angle B \\
&= AC^2 - BC^2 + 2\ AB\ BC \cos\angle B \\
AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2\ AB\ BC \cos\angle B
\end{aligned}$$

Dengan demikian panjang AC dirumuskan dengan

$$\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ AB\ BC\ cos\angle B}$$

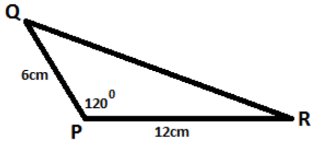
Untuk rumus menentukan panjang AB pada segitiga ABC di atas diserahkan kepada mahasiswa sebagai latihan

Contoh 1

Diketahui segitiga PQR dengan PQ = 6cm, PR = 12cm dan $\angle QPR = 120^0$. Hitunglah panjang QR!

Jawab

Segitiga PQR dapat diilustrasikan seperti gambar berikut



Pada gambar tersebut, sisi di depan sudut P akan dihitung panjangnya. Sehingga aturan yang dapat digunakan adalah aturan kosinus

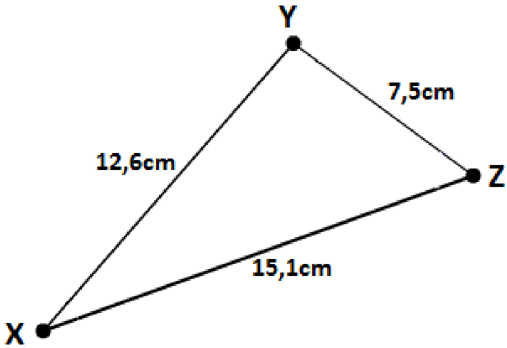
$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2\ PQ\ PR \cos\angle P$$
$$= 6^2 + 12^2 - 2\ .6\ .12\ .\cos 120^0$$
$$= 36 + 144 - 144\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 180 + 72$$
$$= 252$$

QR $= \sqrt{252} = 15{,}87$ (dibulatkan sampai 2 angka di belakang koma)

Jadi panjang QR adalah 15,87 cm.

Contoh 2

Diketahui segitiga seperti gambar berikut



Hitunglah besar sudut $\angle X$!

Jawab

$YZ^2 = XY^2 + XZ^2 - 2\ XY\ XZ \cos \angle X$

$$\text{Cos } \angle X = \frac{XY^2 + XZ^2 - YZ^2}{2\ XY\ XZ}$$

$$= \frac{12{,}6^2 + 15{,}1^2 - 7{,}5^2}{2\ .12{,}6.15{,}1}$$

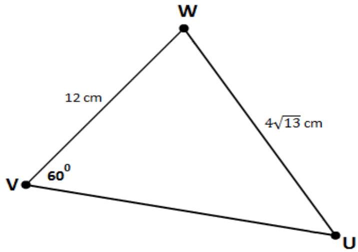
$$= 0{,}86$$

$$\angle X = 29{,}7$$

Jadi besar sudut X adalah $29{,}7^0$

Contoh 3

Diberikan segitiga berikut



Hitunglah panjang VU!

Jawab

Untuk menghitung panjang VU, kita menggunakan aturan kosinus pada sisi UW karena sisi tersebut terletak di depan sudut V yang sudah diketahui sehingga berlaku

$UW^2 = VW^2 + VU^2 – 2\ VW\ VU \cos \cos \angle V$

Selanjutnya memisalkan panjang VU dengan *p* cm sehingga dapat diperoleh

$\left(4\sqrt{13}^{2}\right) = 12^2 + p^2 - 2.12.p \cos 60^0$

$208 = 144 + p^2 – 12p$

$p^2 – 12p – 64 = 0$

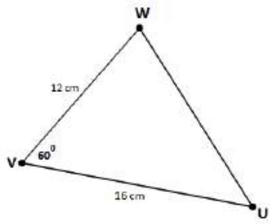
$(p – 16)(p + 4) = 0$

$p = 16$ atau $p = -4$ (tidak dipakai, Mengapa?)

Jadi panjang VU adalah 16 cm.

D. Luas segitiga

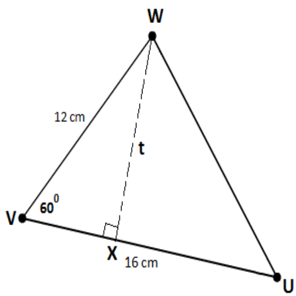
Misalnya diberikan segitiga seperti gambar berikut



Pada gambar di samping, misalnya kita akan menghitung luasnya. Ingat bahwa persoalan menghitung luas segitiga maka dapat kita gunakan rumus L = ½ a t ; a : alas, t : tinggi

Alas pada segitiga tersebut memiliki ukuran 16 cm. Namun tinggi dari segitiga belum diketahui, sehingga harus dicari untuk menghitung luas yang kita inginkan sebelumnya. Ada berbagai macam solusi yang bisa dilakukan diantaranya dengan menggunkan dalil pytagoras, perbandingan, dan trigonometri. Diantara solusi-solusi tersebut, kita akan menggunakan konsep trigonometri.

Pandanglah segitiga XVW berikut yang merupakan segitiga siku-siku di X, diperoleh



$$\sin 60^0 = \frac{t}{\mathrm{VW}}$$

t = VW sin 60^0 = 12 .$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ = $6\sqrt{3}$

Dengan demikian t = $6\sqrt{3}$ cm

sehinga luas segitiga UVW adalah $48\sqrt{3}$ cm^2

Jika kita amati penyelesaian persoalan ini maka dapat disimpulkan bahwa

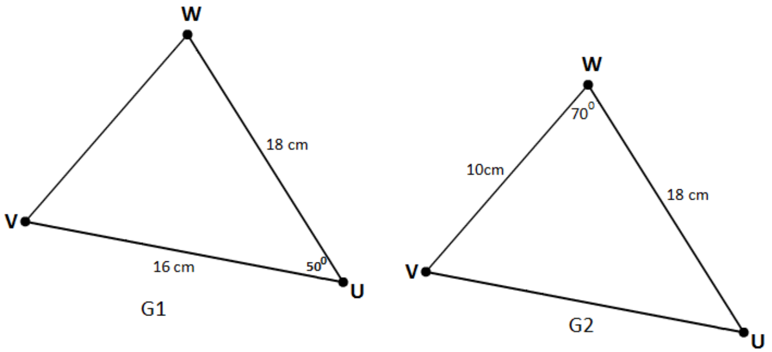
$L = \frac{1}{2}\, a\, t$; a: alas, t:tinggi

$t = VW \sin \angle V$

dengan mensubstitusi harga t, diperoleh

$L = \frac{1}{2}\, a\, VW \sin \angle V$, dimana alas segitiga adalah UV

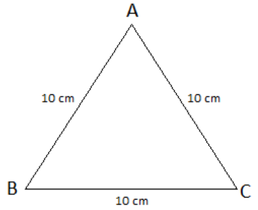
Selanjutnya diberikan kondisi gambar berikut dan anda diminta untuk menghitung luas dari kedua gambar segitiga.



Proses penghitungan luas untuk gambar G1 dan G2 serta kesimpulan untuk menghitung luas dari masing-masing sisi yang diketahui diserahkan kepada mahasiswa sebagai latihan

Contoh 1

Diketahui segitiga ABC samasisi seperti pada gambar berikut. Hitunglah luasnya



Jawab

Karena segitiga ABC samasisi maka besar masing-masing sudutnya adalah 60^0. Dengan demikian luas segitiga ABC dapat dihitung sebagai berikut

$$L = \tfrac{1}{2}\ BC\ AB \sin 60^0$$

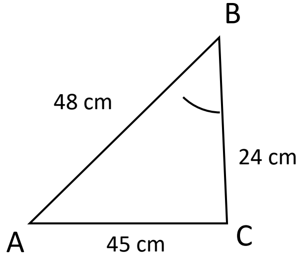
$$= \frac{1}{2} .10\ .10.\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= 25\sqrt{3}$$

Jadi luas segitiga ABC adalah $25\sqrt{3}$ cm^2

Soal Formatif

1. Jika diketahui Tan $\alpha = \frac{12}{35}$,Tentukan nilai sin α, cos α, cosec α, sec α dan cotan α ?
2. Perhatikan gambar segitiga di bawah ini



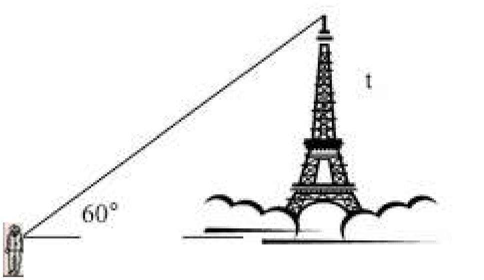
   Jelaskan nilai sin B, cos B dan tan B!
3. Tentukan nilai sin α dan cot α, jika diketahui cos α adalah $\frac{3}{5}$ dengan bantuan gambar segitiga!
4. Tentukan nilai sin ∠XOT, cos ∠XOT dan tan ∠XOT, jika koordinat titik T adalah sebagai berikut:
   a. T (3,4) c) T (-4,6)
   b. T (-5,-10) d) T (8,-6)
5. Diketahui ΔABC siku-siku di B, panjang sisi BC = 3 $\sqrt{5}$ cm dan AB = 3 $\sqrt{15}$ cm.

   Tentukan m∠BAC dan m∠BCA ?

6. Tentukan bentuk sederhana dari trigonometri berikut:
   a. Cotan x. sin x
   b. $\dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\text{cotan}\,\alpha + \text{cosec}\,\alpha}$
7. Buktikan identitas berikut:
   a. Buktikan $(\sin A - \cos A)^2 + (\sin A + \cos A)^2 = 2$.
   b. Sin α . Cos α . Tan α = (1 – Cos α) (1 + Cos α).
   c. Sin β . Tan β + Cos β = Sec β.
8. Dua orang penjaga pantai berdiri di bibir pantai, jarak keduanya 152 meter. Pada saat yang sama, mereka mengamati kapal laut yang menuju ke pantai. Penjaga pertama mengamati dengan sudut pengamatan antara penjaga ke dua dengan kapal laut tersebut 60^o, sedangkan penjaga kedua mengamati dengan sudut 50^o. Berapakah jarak kapal laut dengan pantai?
   (ket. tan 50^o = 1,19 tan 60^o = 1,73).
9. Seorang pengamat berdiri dengan jarak 20 meter dari pusat lantai dasar menara eifel seperti tampak pada gambar di bawah. Jika sudut elevasi 60^o dan tinggi

orang tersebut 1,75 meter, berapakah tinggi menara eifel tersebut?

(ket. Sin 60^o = 0,86, Cos 60^o = 0,5, tan 60^o = 1,73).



10. Jika diketahui bahwa x = sin α + sin β dan y merupakan cos α – cos β, maka nilai terbesar $x^2 + y^2$ tercapai jika....
11. Carilah nilai semua fungsi trigonometri sin, cos dan tan untuk x berikut ini!
    a. x = 135°
    b. x = -225°
    c. x = 240°
    d. x = 315°
12. Hitunglah bentuk trigonometri berikut ini!
    a. cos 105 + cos 15
    b. sin 105 – sin 15

13. Buktikan susunan nilai trigonometri dibawah ini !

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$$

14. Nyatakan dalam bentuk perkalian soal berikut ini!
    a. sin x + 2 sin 2x + sin 3x
    b. cos 2x + 2cos 3 x + cos 4x
    c. sin y + sin 2y + sin 3y – sin 4y
    d. cos 3y + cos 4y + cos 5y + cos 6y
15. Hitunglah nilai trigonometri berikut ini!
    a. sin 30° cos 45° + cos 30° sin 45°
    b. cos 60° sec 60° tan 30°
    c. sin 30° cos 60° - cos 30° sin 60°

DAFTAR PUSTAKA

Bruner, Jerome: 1977, *The Process of Education*, London: Harvard University Press.

Chatherine Berry, Diana Cowey, Dave Faulkner, Niger Green, Paul Sanders, Cristine wood, *Mathematics Higher Second Edition*, Hodder and Soughton, 2001

D.Rayner, *Higher GCSE Mathematics*: Revision and Practise, Oxford University Press, 1996

Geogg Philips, Jenny Watson, caroline Penney, Sonja Stambulic, *Math Quest: Mathematical Method VCE Mathematics*, John Willey and Sons, Australia, 1996

Ho Soo Thong, Tay Yong Chiang, Koh Khee Meng, *College Mathematics, Syllabus C,* Second Edition, Loi Printing Pte Ltd, 2003

Howard Baxter, Mike Handbury, John Jeskins, Jean Matthews, Pat More, *GCSE Mathematics Intermediate Course*, Hodder & Stoughton, 2001

L.Bostock, S. Chandler, *Core Math for Advanced Level*, Stanley Thornes, 2000

Patter Sherran, Mary Rouncefield, Math Intermediate, Letts Educational Ltd, 2001