PEMBELAJARAN BILANGAN untuk PGSD

Dyah Tri Wahyuningtyas, S.Si, M.Pd.

PEMBELAJARAN BILANGAN UNTUK PGSD

Penulis: Dyah Tri Wahyuningtyas, S.Si, M.Pd.
Layout isi & Cover: Maftuch Junaidy Mhirda, S.S

Cetakan pertama, 2016
ISBN: 978-602-74739-4-2

Diterbitkan pertama kali oleh

Penerbit Ediide Infografika
Jl. Bandara Eltari Blok VE 03,
Cemorokandang, Kota Malang
Email: penerbit@ediide.com
website: www.ediide.com
Telp/Fax: 0341-714886

KATA PENGANTAR

Dengan mengucap puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan inayah sehingga kami telah menyelesaikan penyusunan buku ajar ini. Buku yang berjudul "Pembelajaran Bilangan" ini ditulis untuk menambah literatur buku matematika. Sasaran buku ini adalah guru dan calon guru Sekolah Dasar (SD) khususnya mahasiswa Pendidikan Guru Sekolah Dasar (PGSD). Buku ini disusun untuk memperlancar kegiatan perkuliahan di program studi PGSD berdasarkan kurikulum yang berlaku dan kami himpun dari beberapa buku materi yang menunjang materi pelajaran, khususnya materi Matematika untuk SD.

Dalam buku ini kami mengemukakan beberapa konsep dasar bilangan dan contoh dalam kehidupan sehari-hari. Buku ini terdiri dari lima sub bab dengan setiap bab sengaja diurutkan dan saling terkait satu sama lain. Keterkaitan antar bab ini diawali dengan perkembangan bilangan dan lambangnya, bilangan cacah, Kelipata Persekutuan Tekecil (KPK) dan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB), bilangan bulat serta bilangan pecahan. Setiap bab terdiri dari pembuka, materi dan dilanjutkan dengan penyelesaian materi dengan menguasai sejumlah soal dibagian akhir.

Kami menyadari bahwa buku ini masih banyak kekurangan, untuk itu disarankan mahasiswa atau pembaca untuk mempelajari beberapa buku sumber sebagai pengayaan pemahaman materi secara menyeluruh. Diharapkan buku ini dapat membantu guru dan calon guru SD atau mahasiswa PGSD dalam mengajarkan Bilangan ke siswa SD. Akhirnya kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini dan kami mohon maaf apabila ada ketidaksempurnaan dalam penulisan buku ini. Saran dan kritik yang bersifat membangun dari pembaca akan kami harapkan demi penyempurnaan buku ini.

Malang, 10 Juni 2016
Dyah Tri Wahyuningtyas, S.Si, M. Pd.

DAFTAR ISI

BAB 1
TINJAUAN MATA KULIAH

- 1.1 Deskripsi Mata Kuliah
- 1.2 Manfaat Mata Kuliah Bagi Mahasiswa
- 1.3 Kompetensi Mata Kuliah

BAB I

TINJAUAN MATA KULIAH

1.1 Deskripsi Mata Kuliah

Pembelajaran Bilangan merupakan mata kuliah yang bertujuan memfasilitasi dan membantu mahasiswa untuk meningkatkan pemahaman konsep bilangan cacah, bilangan bulat, kelipatan dan faktor bilangan, bilangan prima dan komposit, KPK dan FPB di Sekolah Dasar. Mata kuliah pembelajaran bilangan juga membantu mahasiswa mengembangkan pembelajaran dalam merancang pembelajaran bilangan dan memilih media pembelajaran untuk meningkatkan pemahaman konsep dan motivasi peserta didik.

1.2 Manfaat Mata Kuliah Bagi Mahasiswa

Setelah mengikuti mata kuliah pembelajaran bilangan, mahasiswa mampu memahami konsep, sifat-sifat, dan operasi pada bilangan cacah, bilangan bulat, bilangan prima, pecahan, bilangan romawi dan pemanfaatannya. Mata kuliah pembelajaran bilangan dapat mengembangkan kemampuan mahasiswa dalam melaksanakan pembelajaran bilangan di Sekolah Dasar. Setelah mahasiswa mampu memahami mata kuliah pembelajaran bilangan, mahasiswa dapat menempuh mata kuliah lanjutan pembelajaran geometri dan pengembangan pembelajaran matematika SD.

1.3 Kompetensi Mata Kuliah

Kompetensi pada mata kuliah ini terdiri dari:

a. Menjelaskan perkembangan bilagan dan lambangnya
b. Menjelaskan konsep bilangan dan jenis-jenis bilangan
c. Menjelaskan konsep bilangan cacah
d. Menganalisis operasi bilangan cacah

e. Menjelaskan konsep kelipatan, faktor dan bilangan prima
f. Menganalisis menentukan KPK dan FPB
g. Menjelaskan konsep bilangan bulat
h. Menganalisis oeprasi hitung bilangan bulat

BAB II
PERKEMBANGAN BILANGAN DAN LAMBANGNYA

- A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi
- B. Gambaran Umum Materi
- C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja
- D. Materi

BAB
II

PERKEMBANGAN BILANGAN DAN LAMBANGNYA

A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Pada bab ini kompetensi yang harus dimiliki mahasiswa adalah menjelaskan perkembangan bilangan dan lambang bilangannya. Kompetensi tersebut terbagi menjadi beberapa indikator sebagai berikut:

- Menjelaskan definisi bilangan dan angka
- Menjelaskan perkembangan bilangan dan lambang bilangannya
- Menjelaskan jenis-jenis bilangan

B. Gambaran Umum Materi

Bab ini mengkaji tentang definisi bilangan dan angka, perkembangan bilangan secara luas dari masa ke masa berserta lambang bilangannya dan jenis-jenis bilangan berserta contohnya.

C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja

Pengetahuan tentang perkembangan bilangan dan lambangnya menjabarakan tentang konsep bilangan dan angka serta perkembangan bilangan dan lambangya, sehingga mahasiswa dapat mengetahui sejarah perkembangan bilangan dari masa ke masa. Diharapkan dari penjelasan perkembangan bilangan dan lambangnya dapat mengetahui sejarah perkembangan bilangan dan dapat mengetahui konsep bilangan dan angka, sehingga dapat menerapkan dalam pembelajaran di Sekolah Dasar

D. Materi

1. Definisi Bilangan dan Angka

Dalam penggunaan sehari-hari, bilangan dan angka seringkali dianggap sebagai dua hal yang sama. Sebenarnya, angka dan bilangan mempunyai pengertian yang berbeda. Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Contohnya bilangan lima dapat dilambangkan dengan angka 5 maupun menggunakan angka romawi V. Lambang "5" dan "V" yang digunakan untuk melambangkan bilangan lima disebut sebagai angka. Jadi, sebanarnya benda apakah yang biasa kita sebut dengan bilangan itu ? Setiap bilangan, misalnya bilangan yang kita lambangkan dengan angka 1 sesungguhnya adalah konsep abstrak yang tidak bisa tertangkap oleh indra manusia, tetapi bersifat universal. Misalnya, tulisan atau ketikan 1, yang anda lihat di kertas dan sedang anda baca saat ini bukanlah bilangan 1, melainkan hanya lambang dari bilangan satu yang tertangkap oleh indera penglihatan anda berkat adanya pantulan cahaya dari kertas ke mata anda. Demikian pula bila anda melihat lambang yang sama di papan tulis, yang anda lihat bukanlah bilangan 1, melainkan tinta dari spidol yang membentuk lambang dari bilangan 1.

2. Perkembangan Bilangan

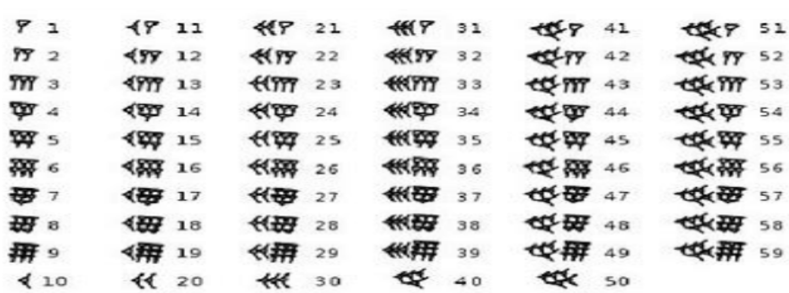
Bilangan pada awalnya hanya dipergunakan untuk mengingat jumlah, namun dalam perkembangannya setelah para pakar matematika menambahkan perbendaharaan simbol dan kata-kata yang tepat untuk mendefenisikan bilangan maka matematika menjadi hal yang sangat penting bagi kehidupan dan tak bisa kita pungkiri bahwa dalam kehidupan keseharian kita akan selalu bertemu dengan yang namanya bilangan, karena bilangan selalu dibutuhkan baik dalam teknologi, sains, ekonomi ataupun dalam dunia musik, filosofi dan hiburan serta banyak aspek kehidupan lainnya. Perkembangan bilangan dari masa ke masa (Sonnabend, 2010)

a. Masa Babilonia

Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Mesopotamia (kini Iraq) sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban helenistik. Dinamai "Matematika Babilonia" karena peran utama kawasan Babilonia sebagai tempat untuk belajar. Pada zaman peradaban helenistik, Matematika Babilonia berpadu dengan Matematika Yunani dan Mesir untuk membangkitkan Matematika Yunani. Kemudian di bawah Kekhalifahan Islam, Mesopotamia, terkhusus Baghdad, sekali lagi menjadi pusat penting pengkajian Matematika Islam. Bertentangan dengan langkanya sumber pada Matematika Mesir, pengetahuan Matematika Babilonia diturunkan dari lebih dari pada 400 lempengan tanah liat yang digali sejak 1850-an. Lempengan ditulis dalam tulisan paku ketika tanah liat masih basah, dan dibakar di dalam tungku atau dijemur di bawah terik matahari. Beberapa di antaranya adalah karya rumahan.

Bukti terdini matematika tertulis adalah karya bangsa Sumeria, yang membangun peradaban kuno di Mesopotamia. Mereka mengembangkan sistem rumit metrologi sejak tahun 3000 SM. Dari kira-kira 2500 SM ke muka, bangsa Sumeria menuliskan tabel perkalian pada lempengan tanah liat dan berurusan dengan latihan-latihan geometri dan soal-soal pembagian. Jejak terdini sistem bilangan Babilonia juga merujuk pada periode ini.

Sebagian besar lempengan tanah liat yang sudah diketahui berasal dari tahun 1800 sampai 1600 SM, dan meliputi topik-topik pecahan, aljabar, persamaan kuadrat dan kubik, dan perhitungan bilangan regular, invers perkalian, dan bilangan prima kembar. Lempengan itu juga meliputi tabel perkalian dan metode penyelesaian persamaan linear dan persamaan kuadrat. Lempengan Babilonia 7289 SM memberikan hampiran bagi √2 yang akurat sampai lima tempat desimal. Matematika Babilonia ditulis menggunakan sistem bilangan seksagesimal (basis-60). Melalui keunggulan orang Babylonia pada bidang astronomi, sistem perhitungan berbasis 60 mereka masih ada sampai sekarang, yakni dengan diturunkannya penggunaan bilangan 60 detik untuk semenit, 60 menit untuk satu jam, dan 360 (60 x 6) derajat untuk satu putaran lingkaran, juga penggunaan detik dan menit pada busur lingkaran yang melambangkan pecahan derajat.



Gambar 1.1 Lambang bilangan Babylonia

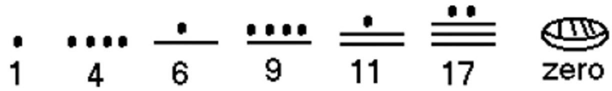
b. Bangsa Maya di Amerika (500 SM)

Sistem Maya menggunakan kombinasi dua simbol. (.) Titik digunakan untuk mewakili unit (satu sampai empat) dan sejumput (-) digunakan untuk mewakili lima. Diperkirakan bahwa Mayan mungkin telah menggunakan sempoa karena penggunaan simbol-simbol mereka dan, karena itu, mungkin ada hubungan antara suku-suku Amerika Jepang dan tertentu (Ortenzi, 1964). Bangsa Maya menulis jumlah mereka secara vertikal sebagai lawan horizontal dengan denominasi terendah di bagian bawah. Sistem mereka didirikan sehingga lima pertama nilai tempat didasarkan pada kelipatan 20. Mereka adalah 1 (20^0), 20 (20^1), 400 (20^2), 8.000 (20^3), dan 160.000 (20^4). Dalam bentuk bahasa Arab kita menggunakan nilai tempat dari 1, 10, 100, 1.000, dan 10.000. Sebagai contoh, jumlah 241.083 akan tahu dan ditulis sebagai berikut:

Maya Bilangan	Value Place	Desimal Nilai
•	1 kali 160.000	= 160.000
══	10 kali 8.000	= 80.000
••	2 kali 400	= 800
•••• ══	14 kali 20	= 280
•••	3 kali 1	= 3

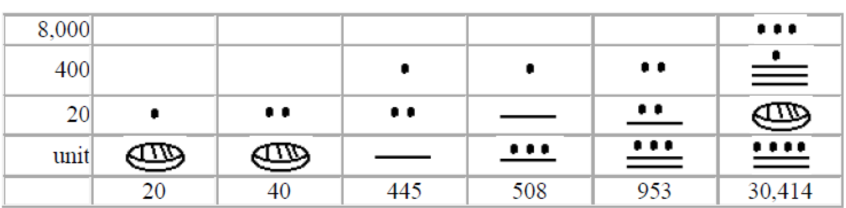
Gambar 1.2 Lambang bilangan Maya

Bangsa Maya juga yang pertama untuk melambangkan konsep apa-apa (atau nol). Simbol yang paling umum adalah bahwa dari shell () tapi ada beberapa simbol lainnya (misalnya kepala). Sangat menarik untuk mengetahui bahwa dengan semua matematikawan besar dan ilmuwan yang berada di sekitar di Yunani kuno dan Roma, itu adalah orang-orang Indian Maya yang independen datang dengan simbol yang biasanya berarti selesai sebagai lawan nol atau tidak ada. Di bawah ini adalah visual dari nomor yang berbeda dan bagaimana mereka akan ditulis



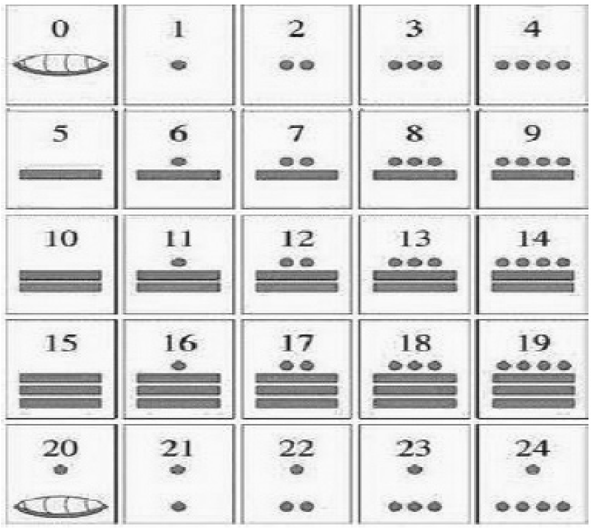
Gambar 1.3 Melambangkan angka 0-10 untuk suku Maya

Dalam tabel di bawah ini diwakili beberapa nomor Maya. Kolom kiri memberikan setara desimal untuk setiap posisi nomor Maya teh. Ingat nomor tersebut dibaca dari bawah ke atas. Di bawah setiap nomor Maya adalah setara desimal nya.



Gambar 1.4 Penomoran Maya

Perhitungan 360 hari kalender juga datang dari bangsa Maya yang benar-benar menggunakan basis 18 ketika berhadapan dengan kalender. Setiap bulan berisi 20 hari dengan 18 bulan sampai satu tahun. Kiri lima hari ini pada akhir tahun yang merupakan bulan dalam dirinya sendiri yang penuh dengan bahaya dan nasib buruk. Dengan cara ini, bangsa Maya telah menemukan kalender 365 hari yang berkisar tata surya



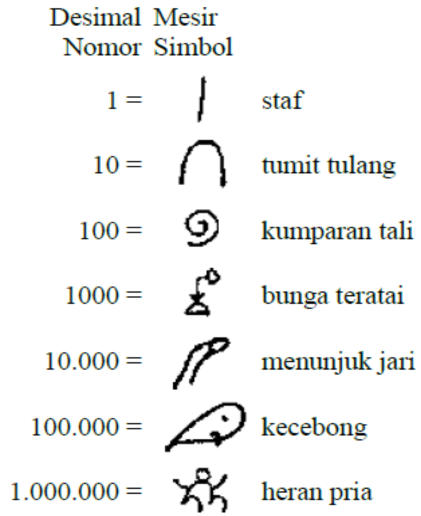
Gambar 1.5 Angka Suku Maya

c. **Bangsa Mesir Kuno (3000 – 1500) SM**

Di Mesir, sejak sekitar 3000 tahun sebelum masehi, bukti sejarah bilangan yang ditemukan pada tulisan-tulisan pada batu, dinding, tembikar, plak kapur dan monument menyebutkan bahwa satu disimbolkan sebagai garis vertikal, sedangkan 10 diwakilkan oleh lambang **^**. Orang mesir menulis dari kanan ke kiri, jadi bilangan dua puluh tiga disimbolkan menjadi **|||^^**. Simbol Mesir untuk angka besar seperti 100.000, adalah suatu simbol yang seperti burung, tetapi angka-angka yang lebih kecil dilambangkan dengan garis lurus dan melengkung.

Gambar 1.6 Lambang bilangan mesir kuno

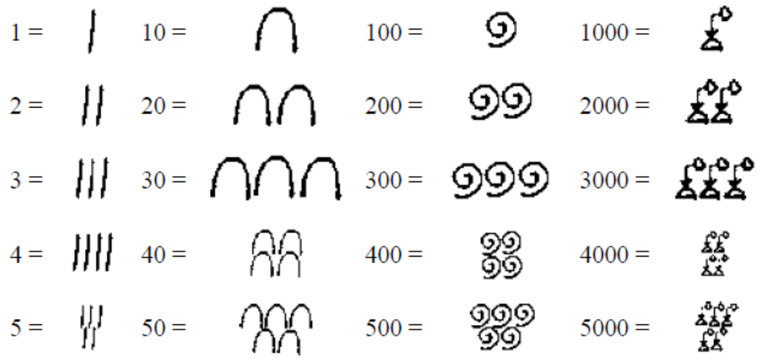
Orang-orang Mesir menggunakan penomoran tertulis yang diubah menjadi tulisan hieroglif, yang memungkinkan mereka untuk dicatat bertambah sampai 1.000.000. Ini memiliki basis desimal dan diperbolehkan untuk prinsip aditif. Dalam notasi ini ada tanda khusus untuk setiap kekuatan sepuluh. Bagi saya, garis vertikal, karena 10, tanda dengan bentuk U terbalik, karena 100, tali spiral, untuk 1000, bunga teratai, untuk 10.000, jari mengangkat, sedikit menekuk, karena 100.000, berudu , dan untuk 1.000.000, jin berlutut dengan tangan terangkat.



Gambar 1.7 Desimal Mesir dan Nomor Simbol

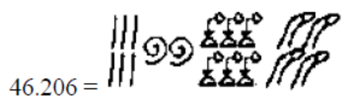
Ini penomoran hieroglif adalah versi tertulis dari sistem penghitungan beton menggunakan benda-benda materi. Untuk mewakili angka, tanda untuk setiap order desimal diulang sebanyak yang diperlukan. Untuk membuatnya lebih mudah untuk membaca tanda-tanda mengulangi mereka ditempatkan di kelompok dua,, tiga atau empat dan disusun secara vertikal.

Contoh 1

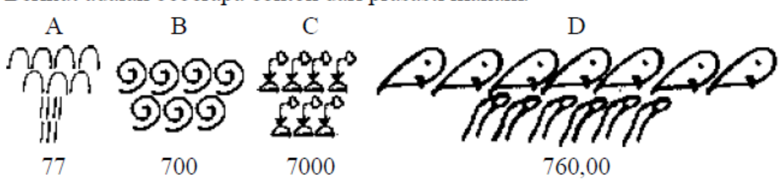


Dalam penulisan angka, urutan desimal terbesar akan ditulis pertama. Angka-angka yang ditulis dari kanan ke kiri.

Contoh 2



Berikut adalah beberapa contoh dari prasasti makam.



d. Bangsa Yunani

Matematika Yunani merujuk pada matematika yang ditulis di dalam bahasa Yunani antara tahun 600 SM sampai 300 M.[28] Matematikawan Yunani tinggal di kota-kota sepanjang Mediterania bagian timur, dari Italia hingga ke Afrika Utara, tetapi mereka dibersatukan oleh budaya dan bahasa yang sama.

Matematika Yunani lebih berbobot daripada matematika yang dikembangkan oleh kebudayaan-kebudayaan pendahulunya. Semua naskah matematika pra-Yunani yang masih terpelihara menunjukkan penggunaan penalaran induktif, yakni pengamatan yang berulang-ulang yang digunakan untuk mendirikan aturan praktis. Sebaliknya, matematikawan Yunani menggunakan penalaran deduktif. Bangsa Yunani menggunakan logika untuk menurunkan simpulan dari definisi dan aksioma, dan menggunakan kekakuan matematika untuk membuktikannya.

Matematika Yunani diyakini dimulakan oleh Thales dari Miletus (kira-kira 624 sampai 546 SM) dan Pythagoras dari Samos (kira-kira 582 sampai 507 SM). Meskipun perluasan pengaruh mereka dipersengketakan, mereka mungkin diilhami oleh Matematika Mesir dan Babilonia. Menurut legenda, Pythagoras bersafari ke Mesir untuk mempelajari matematika, geometri, dan astronomi dari pendeta Mesir.

Thales menggunakan geometri untuk menyelesaikan soal-soal perhitungan ketinggian piramida dan jarak perahu dari garis pantai. Dia dihargai sebagai orang pertama yang menggunakan penalaran deduktif untuk diterapkan pada geometri, dengan menurunkan empat akibat wajar dari teorema Thales. Hasilnya, dia dianggap sebagai matematikawan sejati pertama dan pribadi pertama yang menghasilkan temuan matematika. Pythagoras mendirikan Mazhab Pythagoras, yang mendakwakan bahwa matematikalah yang menguasai semesta dan semboyannya adalah "semua adalah bilangan". Mazhab Pythagoraslah yang menggulirkan istilah "matematika", dan merekalah yang memulakan pengkajian matematika. Mazhab Pythagoras dihargai sebagai penemu bukti pertama teorema Pythagoras,[32] meskipun diketahui bahwa teorema itu memiliki sejarah yang panjang, bahkan dengan bukti keujudan bilangan irasional.

Eudoxus (kira-kira 408 SM sampai 355 SM) mengembangkan metoda kelelahan, sebuah rintisan dari Integral modern. Aristoteles (kira-kira 384 SM sampai 322 SM) mulai menulis hukum logika. Euklides (kira-kira 300 SM) adalah contoh terdini dari format yang masih digunakan oleh matematika saat ini, yaitu definisi, aksioma, teorema, dan bukti. Dia juga mengkaji kerucut. Bukunya, *Elemen*, dikenal di segenap masyarakat terdidik di Barat hingga pertengahan abad ke-20. Selain teorema geometri yang terkenal, seperti teorem Pythagoras, *Elemen* menyertakan bukti bahwa akar kuadrat dari dua adalah irasional dan terdapat tak-hingga banyaknya bilangan prima. Saringan Eratosthenes (kira-kira 230 SM) digunakan untuk menemukan bilangan prima.

Archimedes (kira-kira 287 SM sampai 212 SM) dari Syracuse menggunakan metoda kelelahan untuk menghitung luas di bawah busur parabola dengan penjumlahan barisan tak hingga, dan memberikan hampiran yang cukup akurat terhadap Pi. Dia juga mengkaji spiral yang mengharumkan namanya, rumus-rumus volume benda putar, dan sistem rintisan untuk menyatakan bilangan yang sangat besar.

e. Cina

Matematika Cina permulaan adalah berlainan bila dibandingkan dengan yang berasal dari belahan dunia lain, sehingga cukup masuk akal bila dianggap sebagai hasil pengembangan yang mandiri. Tulisan matematika yang dianggap tertua dari Cina adalah *Chou Pei Suan Ching*, berangka tahun antara 1200 SM sampai 100 SM, meskipun angka tahun 300 SM juga cukup masuk akal.

Hal yang menjadi catatan khusus dari penggunaan matematika Cina adalah sistem notasi posisional bilangan desimal, yang disebut pula "bilangan batang" di mana sandi-sandi yang berbeda digunakan untuk bilangan-bilangan antara 1 dan 10, dan sandi-sandi lainnya sebagai perpangkatan dari sepuluh. Dengan demikian, bilangan 123 ditulis menggunakan lambang untuk "1", diikuti oleh lambang untuk "100", kemudian lambang untuk "2" diikuti lambang utnuk "10", diikuti oleh lambang untuk "3". Cara seperti inilah yang menjadi sistem bilangan yang paling canggih di dunia pada saat itu, mungkin digunakan beberapa abad sebelum periode masehi dan tentunya sebelum dikembangkannya sistem bilangan India. Bilangan batang memungkinkan penyajian bilangan sebesar yang diinginkan dan memungkinkan perhitungan yang dilakukan pada *suan pan*, atau (sempoa Cina). Tanggal penemuan *suan pan* tidaklah pasti, tetapi tulisan terdini berasal dari tahun 190 M, di dalam *Catatan Tambahan tentang Seni Gambar* karya Xu Yue.

Karya tertua yang masih terawat mengenai geometri di Cina berasal dari peraturan kanonik filsafat Mohisme kira-kira tahun 330 SM, yang disusun oleh para pengikut Mozi (470–390 SM). *Mo Jing* menjelaskan berbagai aspek dari banyak disiplin yang berkaitan dengan ilmu fisika, dan juga memberikan sedikit kekayaan informasi matematika.Yang terpenting dari semua ini adalah *Sembilan Bab tentang Seni Matematika*, judul lengkap yang muncul dari tahun 179 M, tetapi wujud sebagai bagian di bawah judul yang berbeda. Ia terdiri dari 246 soal kata yang melibatkan pertanian, perdagangan, pengerjaan geometri yang menggambarkan rentang ketinggian dan perbandingan dimensi untuk menara pagoda Cina, teknik, survey, dan bahan-bahan segitiga siku-siku dan π. Ia juga menggunakan prinsip Cavalieri tentang volume lebih dari seribu tahun sebelum Cavalieri mengajukannya di Barat. Ia menciptakan bukti matematika untuk teorema Pythagoras, dan rumus matematika untuk eliminasi Gauss. Liu Hui memberikan komentarnya pada karya ini pada abad ke-3 M.

f. **Hindu - Arab (300 SM – sekarang)**

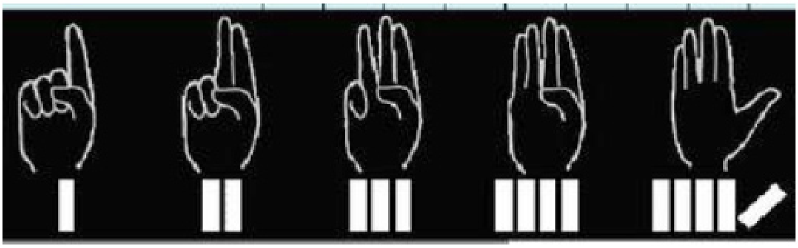
Gambar 1.6 Simbol Hindu- Arab

Orang-orang India menggunakan lingkaran kecil saat tempat pada angka tidak mempunyai nilai, mereka menamai lingkaran kecil tersebut dengan nama *sunya*, diambil dari bahasa sansekerta yang berarti ”kosong”. Sistem ini telah berkembang penuh sekitar tahun 800 Masehi, saat sistem ini juga diadaptasi di Baghdad. orang Arab menggunakan titik sebagai simbol ”kosong”, dan memberi nama dengan arti yang sama dalam bahasa arab, *sifr.*

Sekitar dua abad kemudian angka India masuk ke Eropa dalam manuskrip Arab, dan dikenal dengan nama angka Hindu-Arab. Dan angka Arab *sifr* berubah menjadi ”zero” dalam bahasa Eropa modern, atau dalam bahasa Indonesia, ”nol”. Tetapi masih perlu berabad-abad lagi sebelum ke-sepuluh angka Hindu-Arab secara bertahap menggantikan angka Romawi di Eropa, yang diwarisi dari masa kekaisaran Roma.

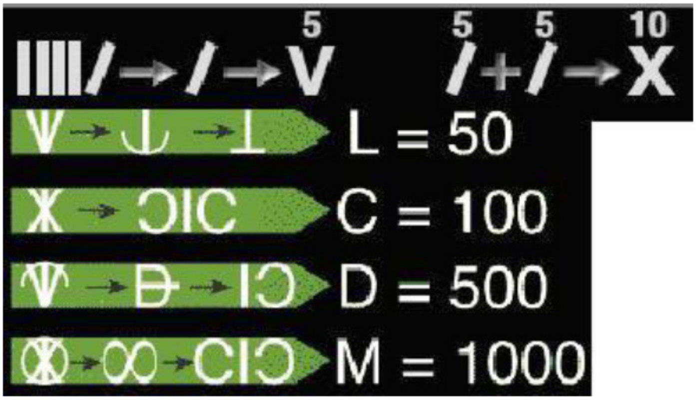
g. **Bangsa Romawi**

Angka romawi menggunakan sistem bilangan berbasis 5. Angka I dan V dalam angkaromawi terinspirasi dari bentuk tangan, yang merupakan alat hitung alami. Sedangkan angka X/ lambang dari 10, adalah gabungan dua garis miring yang melambangkan 5. Dan L, C, D,dan M, yang secara urut mewakili 50, 100, 500, dan 1.000, merupakan modifikasi dari simbol Vdan X.



Gambar 1.7 Simbol Romawi

Garis yang miring mewakili jempol, yang kemudian menjadi simbol lima, X(10) adalah gabungan dua garis miring Symbol L, C, D, & M merupakan modifikasi dari simbol V & X. Untuk menulis angka, orang Romawi menggunakan sistem penjumlahan : V+ I = VI (6) atau C + X + X + I = CXXI (121), dan sistem pengurangan : IX (I sebelum X = 9) atau XCIV (X sebelum C = 90, I sebelum V = 4)



Gambar 1.8 Simbol Romawi

h. **Masa Sejarah (Masehi)**

Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giussepe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963). Sebagai seorang pangeran matematika, Gauss begitu terpesona terhadap keindahan dan kecantikan teori bilangan, dan untuk melukiskannya, ia menyebut teori bilangan sebagai the queen of mathematics. Pada masa ini, teori bilangan tidak hanya berkembang sebatas konsep, tapi juga banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini dapat dilihat pada pemanfaatan konsep bilangan dalam metode kode baris, kriptografi, komputer, dan lain sebagainya .

3. Jenis-jenis Bilangan

A. Bilangan Bulat

adalah bilangan yang terdiri atas bilangan positif, bilangan nol, dan bilangan negatif. Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika dilambangkan dengan Z (atau), berasal dari *Zahlen* (bahasa Jerman untuk "bilangan")

Misal : ....-2,-1,0,1,2...

B. Bilangan Asli

adalah bilangan bulat positif yang diawali dari angka 1(satu) sampai tak terhingga. Para ahli matematika menggunakan N atau untuk menuliskan seluruh himpunan bilangan asli.

Misal : 1,2,3,....

C. Bilangan Cacah

adalah bilangan bulat positif yang diawali dari angka 0 (nol) sampai tak terhingga. Misal 0,1,2,3,....

D. Bilangan Prima

adalah bilangan yang tepat mempunyai dua faktor yaitu bilangan 1 (satu) dan bilangan itu sendiri.

Misal : 2,3,5,7,11,13,..... (1 bukan bilangan prima, karena mempunyai satu faktor saja).

E. Bilangan Komposit

adalah bilangan yang bukan 0, bukan 1 dan bukan bilangan prima.

Misal; 4,6,8,9,10,12,....

F. Bilangan Rasional

adalah bilangan yang dinyatakan sebagai suatu pembagian antara dua bilangan bulat (berbentuk bilangan a/b, dimana a dan b merupakan bilangan bulat).

Misal: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$

G. Bilangan Irrasional

adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pembagian dua bilangan bulat.

Misal: π, $\sqrt{2}$, log 7 dan sebagainya.

H. Bilangan Riil

adalah bilangan yang merupakan penggabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional.

Misal: $1/2\ \sqrt{2}, 1/3\ \sqrt{5}, 1/4\ \pi, 2/3$

I. Bilangan Imajiner

adalah bilangan yang ditandai dengan i, bilangan imajiner i dinyatakan sebagai $\sqrt{-1}$. Jadi, jika $i = \sqrt{-1}$ maka $i2 = -1$

Misal : $\sqrt{-4}=\pi\ \sqrt{-4} = \sqrt{4\times(-1)} = \sqrt{4}\times\sqrt{-1} = 2 \times I = 2i$ Jadi, $\sqrt{-4} = 2i$.

J. Bilangan Kompleks

adalah bilangan yang merupakan penggabungan dari bilangan riil dan bilangan imajiner. Misal : $\pi\sqrt{-1} = \pi i$

Log $\sqrt{-1}$= log i.

LATIHAN SOAL

1. Jelaskan perbedaan bilangan dan angka ?
2. Berapakah total jumlah simbol yang dibutuhkan untuk menulis 29 ke numerasi berikut.
   a. Mesir Kuno
   b. Romawi

   Apa yang dapat kalian simpulkan ?
3. Ubahlah ke dalam numerasi Mesir Kuno
   a. 34
   b. 124
   c. 1.234
4. Tulislah bilangan berikut ke dalam numerasi Romawi
   a. 495
   b. 1.828
   c. 12.345
5. Tulis dengan numerasi Hindu-Arab dari numerasi berikut
   a. LIV
   b. XL
   c. MDCXIII

BAB III
OPERASI BILANGAN CACAH

- A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi
- B. Gambaran Umum Materi
- C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja
- D. Materi

BAB
III

OPERASI BILANGAN CACAH

A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Pada bab ini kompetensi yang harus dimiliki mahasiswa adalah menjelaskan perkembangan bilangan dan lambang bilangannya. Kompetensi tersebut terbagi menjadi beberapa indikator sebagai berikut:

- Mengenal dan mengidentifikasi permasalahan dalam operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan cacah.
- Memahami sifat dan hubungan antar operasi bilangan cacah.
- Mendeskripsikan dan mengidentifikasi strategi berpikir fakta dasar operasi.
- Memahami konsep perpangkatan.
- Memahami dan mengaplikasikan urutan operasi.

B. Gambaran Umum Materi

Bab ini mengkaji tipe permasalahan pada bilangan cacah, sifat-sifat bilangan dan hubungan antar operasi bilangan cacah, bagaimana strategi berfikir fakta dasar operasi pada bilangan cacah, serta perpangkatan bilangan.

C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja

Pengetahuan tentang operasi bilangan cacah menyajikan topik penjelasan bilangan cacah khususnya mengenai tipe permasalahan dalam operasinya. Diharapkan setelah mempelajarinya, mahasiswa dapat mengklasifikasikan permasalahan di kehidupan sehari-hari ke dalam permasalahan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Bab ini juga menampilkan bagaimana strategi berfikir fakta dasar operasi yang bertujuan untuk menanamkan anak untuk memahami dan memaknai operasi bilangan dasar. Diharapkan dari penjelasan bab ini dapat dijadikan acuan mahasiswa dalam melaksanakan dan mengembangkan pembelajaran bilangan cacah di Sekolah Dasar.

D. Materi

3.1 Tipe Permasalahan pada Penjumlahan dan Pengurangan

Bilangan cacah merupakan dasar dari pembelajaran matematika di Sekolah Dasar. Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan cacah anggota suatu himpunan. Jika suatu himpunan yang karena alasan tertentu tidak mempunyai anggota sama sekali, maka cacah anggota himpunan itu dinyatakan dengan "nol" dan dinyatakan dengan lambang "0". Jika anggota suatu himpunan hanya terdiri atas satu anggota saja, maka cacah anggota himpunan tersebut adalah "satu" dan dinyatakan dengan lambang "1", dan demikian seterusnya, sedemikian sehingga kita mengenal barisan bilangan hasil pencacahan himpunan yang dinyatakan dengan lambang sebagai berikut.

10 ,9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0, dan seterusnya.

Definisi BIlangan Cacah

Bilangan cacah adalah bilangan yang digunakan untuk menyatakan cacah anggota suatu himpunan. Sehingga, himpunan bilangan cacah dapat dituliskan {0,1,2,3,...}

Contoh 3.1

Manakah dari kuantitas permasalahan berikut yang dapat merepresentasikan sebuah bilangan cacah.

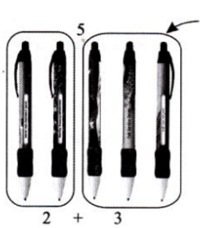
a. Sekumpulan semut.
b. Bagian dari sebuah roti yang telah dimakan.
c. Jumlah manusia yang hidup di Matahari.
d. Panjang garis miring sebuah segitiga siku-siku samakaki.

Penyelesaian

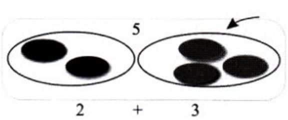
a. Meskipun sekumpulan semut sulit dihitung, namun jumlahnya pasti terhingga dan dapat dihitung, sehingga jumlah dari sekumpulan semut adalah bilangan cacah.
b. Bagian dari sebuah roti yang telah dimakan pasti lebih dari nol dan kurang dari 1 roti. Jadi, tidak termasuk bilangan cacah.
c. Manusia tidak dapat hidup di Matahari, sehingga tidak ada yang hidup di sana. Artinya, jumlahnya adalah nol (bilangan cacah).
d. Panjang garis miring sebuah segitiga siku-siku samakaki adalah akar dari dua kali kuadrat salah satu panjang sisi penyikunya, sehingga dapat dipastikan hasilnya bukan bilangan cacah (diskusikan!).

Tipe Permasalahan dalam Penjumlahan dan Pengurangan.

Anak-anak belajar perhitungan seyogyanya memanfaatkan objek dan dikaitkan dengan konteks yang terdapat di sekelilingnya. Di Indonesia, anak-anak sering belajar perhitungan yang mengarah kepada skill perhitungannya dan kemudian baru dilanjutkan ke penerapannya sehari-hari (Fuson, 2003). Anak-anak akan lebih memaknai perhitungan juka dikaitkan dengan kontek sesuai pengalaman mereka. Anak memiliki tahapan dalam belajar berhitung, diantaranya, (1) Anak memodelkan permasalahan real mereka, dengan menggunakan objek dalam permasalahan; (2) Anak menggunakan representasi semikonkret dengan gambar-gambar untuk mewakili kuantitas dan objek dalam permasalahan; dan (3) Setelah anak memiliki banyak kesempatan untuk menggunakan operasi dalam masalah cerita, maka dilanjutkan menggunakan simbol dan kalimat matematika. Sebagai contoh, anak dihadapkan pada inasalah berikut. "Bejo mula - mula memiliki 2 pulpen. Ibunya memberikan 3 pulpen kepadanya. Berapa jumlah dari pulpen Bejo sekarang?" Ketika anak berpikir untuk menjelaskan jawaban di atas, kenalkan bahwa kalimat di atas dapat ditulis dengan 2 + 3, dibaca dua tambah tiga. 2 adalah jumlah pulpen Bejo mula-mula, 3 adalah jumlah pulpen yang diberikan kepadanya, + adalah gabungan antara 2 pulpen dan 3 pulpen. Sedangkan, hasil dari penjumlahan dihubungkan dengan tanda = yang mewakili setara.



Gambar 3.1



Gambar 3.2

Beberapa peneliti menyimpulkan bahwa terdapat 4 tipe dalam permasalahan penjumlahan dan pengurangan, yakni menggabungkan, memisahkan, bagian – bagian keseluruhan, dan membandingkan (Van de Walle, dkk, 2010). Menggabungkan dan memisahkan adalah tipe yang *lebih* mudah dilakukan, sedangkan permasalahan bagian-bagian-keseluruhan dan membandingkan lebih sulit dari pada dua permasalahan lainnya.

Tipe Menggabungkan dan Memisahkan Tipe menggabungkan yakni proses menggabungkan dua himpunan objek bersama-sama. Sedangkan, tipe memisahkan yakni menghilangkan atau mengambil objek dari suatu himpunan. Pada saat melakukan penggabungan dan pemisahan terdapat tiga permasalahan yang berbeda yakni *awalan yang tidak diketahui, perubahan yang tidak diketahui*, dan *hasil yang tidak diketahui*. Ketiganya dapat diilustrasikan seperti berikut.

Hasil yang tidak diketahui

- Bejo mula-mula memiliki 2 pulpen. Ibunya memberikan 3 pulpen kepadanya. Berapa jumlah dari pulpen Bejo sekarang? (permasalahan penjumlahan).
- Ibu Bejo mula-mula memiliki 5 pulpen. Ia memberikan 3 pulpen kepada Bejo. Berapa jumlah dari pulpen Ibu Bejo sekarang? (permasalahan pengurangan).

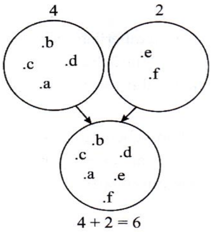
Perubahan yang tidak diketahui

- Bejo mula-mula memiliki 2 pulpen. Ibunya memberikan beberapa pulpen kepada dirinya. Sekarang Bejo memiliki 5 buah pulpen. Berapa jumlah pulpen yang diberikan Ibu kepada Bejo? (permasalahan penjumlahan).
- Ibu Bejo memiliki 5 pulpen. Dia memberikan beberapa pulpen ke Bejo. Sekarang dia memiliki 2 pulpen. Berapa banyak pulpen yang dia berikan kepada Bejo? (permasalahan pengurangan).

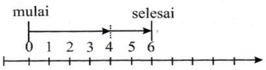
Awalan yang tidak diketahui

- Bejo memiliki beberapa pulpen. Ibunya memberikan 3 pulpen kepadanya. Sekarang, Bejo memiliki 5 pulpen. Berapakah jumlah pulpen yang dimiliki Bejo sebelumnya? (permasalahan penjumlahan).
- Ibu Bejo memiliki beberapa pulpen. Dia memberikan 3 pulpennya kepada Bejo. Sekarang Ibu Bejo memiliki sisa 2 pulpen. Berapa banyak pulpen yang dimiliki Ibu Bejo sebelumnya? (permasalahan pengurangan).

Guru harus memahami bahwa makna gabungan dalam penjumlahan sama halnya konsep gabungan pada operasi himpunan. Penjumlahan dengan menggunakan himpunan dapat dilihat dari menggabungkan anggota dua himpunan dan menghitung jumlah anggota dari gabungan himpunan tersebut. Tentunya, himpunan tersebut haruslah saling lepas (tidak memiliki anggota yang sama). Sebagai contoh dua anak diberikan huruf yang tertulis dalam kertas, anak pertama mendapatkan kartu dengan huruf a, b, c, d, dan anak kedua mendapatkan kart. dengan huruf e, f. Tentukan jumlah huruf yang berbeda dari kedua anak tersebut. Permasalahan ini dapat digambarkan dengan model himpunan pada **Gambar 3.3** dan model pengukuran **Gambar 3.4**



Gambar 3.3



Gambar 3.4

Tipe penjumlahan dapat bervariasi sesuai permasalahan. Kasus di atas bertipe *hasil yang tidak diketahui* dari penggabungan.

Definisi Penjumlahan

Jika himpunan P memiliki anggota p dan himpunan Q memiliki anggota q, dengan P dan Q saling lepas,maka $p + q = n\,(P \cup Q).$

Contoh 3.2

Terdapat suatu kelompok *boyband* terdiri dari delapan orang sebagai vokalis dan enam orang bermain gitar.

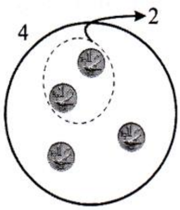
a. Berapa jumlah minimum orang dalam kelompok ini?
b. Berapa jumlah maksimmn orang dalam kelompok ini?
c. Manakah dari pertanyaan (a) dan pertanyaan (b) yang memiliki jawaban dari penjumlahan banyaknya pemain gitar dan vokalis?

Penyelesaian

a. Jumlah minimum dari kelompok *boyband* dapat diartikan dengan 6 pemain gitar merangkap sebagai vokalis, sehingga jumlah minimum adalah 8 orang.
b. Jumlah maksimum dari kelompok *boyband* ketika pemain vokal dan pemain gitar memiliki peran/ tugas masing-masing, sehingga jumlah maksimum adalah gabungan jumlah orang sebagai vokalis atau gitaris, yakni 14 orang.

C. Pertanyaan b. (diskusikan!)

Tipe memisahkan dengan *hasil akhir yang tidak diketahui* pada konsep pengurangan juga dapat dikaitkan dalam konsep mengambil keluar sejumlah objek dari suatu himpunan. Sebagai contoh, Hana memiliki 4 koin dalam wadah dan mengambilnya 2, berapa yang masih tersisa? Hal ini dimodelkan dengan konsep mengambil keluar 2 buah koin dari himpunan koin yang berjumlah 4 (Gambar 3.5). Situasi ini juga dapat dimodelkan dengan model pengukuran (Gambar 3.6).



Gambar 3.5

Gambar 3.6

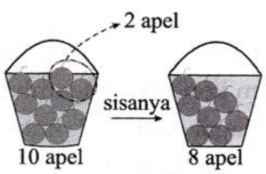
Dari tipe memisahkan dengan *hasil akhir tidak diketahui*, definisi pengurangan bilangan cacah dapat dinyatakan dengan notasi himpunan seperti berikut.

Definisi Pengurangan Bilangan
Diberikan *a* dan *b* sembarang bilangan cacah, A dan B suatu himpunan dengan A = *n* (A), *b* = N (B), dan $B \subseteq A$, maka a – b = n (A – B).

Contoh 3.3

Siti membeli 10 apel, adiknya melihat Siti membawa apel, kemudian meminta 2 apel darinya. Berapa sisa apel yang masih dimiliki Siti?

Penyelesaian



Jadi, sisa apel milik Siti adalah 10 - 2 = 8 buah.

Tipe perubahan dan *awalan yang tidak ketahui* dalam konsep pengurangan dapat diartikan sebagai konsep mencari penjumlah yang belum diketahui.

Konsep ini digunakan dalam situasi ketika mengetahui hasil penjumlahan dan salah satu penjumlahnya, kemudian mencari penjumlah lain yang belum diketahui. Proses mencari penjumlah yang belum diketahui dapat dianggap sebagai kebalikan (*invers*) dari proses pengurangan.

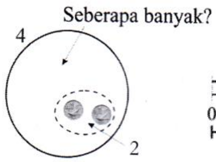
Alternatif Definisi Pengurangan Bilangan Cacah

Untuk setiap bilangan cacah *a* clan *b*, dengan $a \geq b$,selisih antara *a* dan *b* adalah *k* bilangan cacah (ditulis $a - b = k$), jika hanya jika

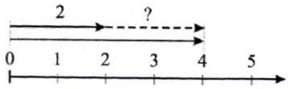
$$a = b + k$$

k adalah penjumlah yang dicari (Missing-Addend)

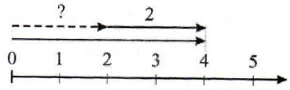
Konsep ini dapat digambarkan menggunakan model himpunan (Gambar 3.7) dan model pengukuran (Gambar 3.8 dan 3.9). Sebagai contoh, untuk menghitung 4 - 2 dapat diilustrasikan seperti berikut.



Gambar 3.7



Gambar 3.8



Gambar 3.9

4 - 2 = ? jika hanya jika 2 + ? = 4 atau ? + 2 = 4.
Karena 2 + 2 = 4, maka 4 - 2 = 2.

Tipe Bagian-Bagian-Keseluruhan Tipe bagian-bagian-keseluruhan yakni proses yang berkaitan dengan bagian dari sebuah himpunan objek untuk membuat sebuah himpunan secara keseluruhan. Tipe ini memiliki dua permasalahan yang berbeda yakni *keseluruhan yang tidak diketahui* dan *bagian yang tidak diketahui*. Berikut contoh dua permasalahan dari tipe bagian-bagian-keseluruhan.

Keseluruhan yang tidak diketahui

Bejo memiliki 3 pulpen hitam dan 2 pulpen putih. Berapakah jumlah pulpen yang dimiliki Bejo?(permasalahan penjumlahan)

Bagian yang tidak diketahui

Bejo memiliki 5 pulpen. 2 pulpen yang dimilikinya berwarna putih dan pulpen yang lainnya hitam. Berapakah jumlah pulpen hitan, yang dimiliki Bejo? (permasalahan pengurangan)

Tipe membandingkan

Tipe membandingkan yakni membandingkan dua himpunan berbeda dari objek. Tipe ini memiliki tiga permasalahan yang berbeda yakni *selisih yang tidak diketahui*, *lebihan yang tidak diketahui*, dan *kurangan yang tidak diketahui*. Berikut contoh dari setiap permasalahan dalam, tipe perbandingan.

Selisih tidak diketahui

Trinil memiliki 5 pulpen dan Trimbil memiliki 3 pulpen. Berapa banyak pulpen yang tidak dimiliki Trimbil daripada Trinil ?

Lebihan tidak diketahui

Trimbil memiliki 3 pulpen. Trinil memiliki pulpen 2 lebihnya dari Trimbil. Berapa banyak pulpen yang Trinil miliki ?

Kurangan tidak diketahui

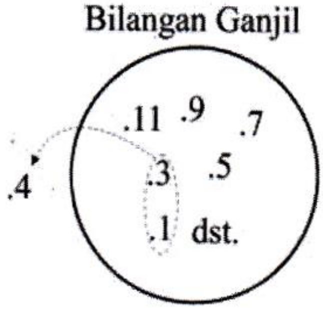
Trinil memiliki 5 pulpen. Dia memiliki 2 lebihnya pulpen dari Berapa banyak pulpen yang Trimbil miliki?

3.2 Sifat-sifat Penjumlahan

Beberapa sifat dasar untuk operasi penjumlahan pada bilangan cacah sangat penting sehingga diberi narna khusus. Empat sifat untuk penjumlahan diperkenalkan di sini dan berkorelasi dengan sifat-sifat untuk perkalian yang diberikan pada bagian selanjutnya.

Sifat Tertutup Terhadap Penjumlahan

Misal diambil dua bilangan cacah, jumlah kedua bilangan cacah tersebut akan menghasilkan bilangan cacah juga. Fakta ini dapat dinyatakan dengan mengatakan bahwa bilangan cacah bersifat tertutup untuk operasi penjumlahan. Secara umum, kata tertutup menunjukkan bahwa ketika operasi dilakukan pada setiap sepasang bilangan dari suatu himpunan, hasilnya juga dalam himpunan tersebut, bukan di luar himpunan. Sebagai contoh himpunan bilangan cacah tidak tertutup untuk pengurangan, karena terkadang selisih antara dua bilangan cacah adalah bilangan negatif. Pertimbangkan contoh lain, misalnya, jika memilih dua bilangan dari himpunan bilangan ganjil {1, 3, 5, 7,. . . }, maka hasil penjumlahannya belum tentu bilangan ganjil (Gambar 3.11; misal 1 + 3 = 4). Jadi, himpunan bilangan ganjil tidak tertutup terhadap penjumlahan.



Gambar 3.11

Untuk memahami sifat tertutup, anak merasa terbantu jika menggambar lingkaran Bilangan ganjil dan menulis bilangan dalam himpunan. Kemudian, jika hasil operasi menghasilkan bilangan yang masih berada di dalam lingkaran, maka himpunan tersebut memiliki sifat tertutup terhadap operasi tersebut.

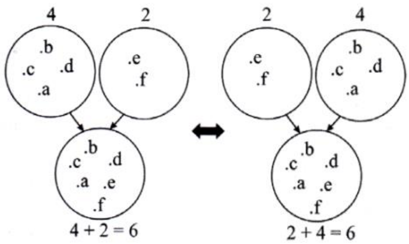
Sedangkan, jika operasi yang dilakukan menghasilkan setidaknya satu basil yang berada di luar lingkaran, maka himpunan tersebut tidak tertutup terhadap operasi tersebut.

Sifat Tertutup

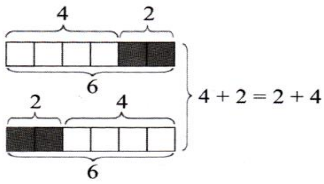
Misal untuk setiap sepasang bilangan dalam satu himpunan dijumlahkan dan hasilnya masih berada di dalam himpunan tersebut maka berlaku sifat tertutup. Jika salah satu contoh dapat ditemukan di mana operasi penjumlahan tidak menghasilkan elemen dari himpunan tersebut, maka himpunan tersebut tidak tertutup.

Sifat Komutatif Terhadap Penjumlahan

Sebuah sifat penjumlahan terlihat jika setiap dua bilangan pada bilangan cacah dijumlahkan, maka jumlah kedua bilangan tersebut tidak berubah meskipun letaknya (urutannya) ditukar. Fakta tentang penjumlahan ini berlaku untuk semua bilangan dalam bilangan cacah. Sifat ini disebut dengan sifat komutatif. Sebagai contoh, $4 + 2 = 2 + 4$ yang dapat diilustrasikan pada Gambar 3.12 dan 3.13 berikut.



Gambar 3.12



Gambar 3.13

Sifat Koniutatif Misal *a* dan *b* merupakan sebarang bilangan dalam bilangan cacah, maka berlaku: a + b = b + a

Contoh 3.4

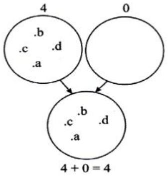
Tunjukkan bahwa penjumlahan berikut berlaku sifat konmtatif.

a. 3 + 4 b. 5 + 6

Penyelesaian

3+ 4= 7= 4+ 3 (terbukti)

5 + 6 = 11 = 6 + 5 (terbukti)



Gambar 3.14

Sifat Identitas terhadap Penjumlahan

Bilangan istimewa di antara bilangan cacah adalah nol. Nol disebut identitas untuk penjumlahan karena ketika nol ditarnbahkan dengan bilangan yang lain, maka tidak ada perubahan. Artinya, menambahkan 0 dengan bilangan berapapun akan meninggalkan identitas.

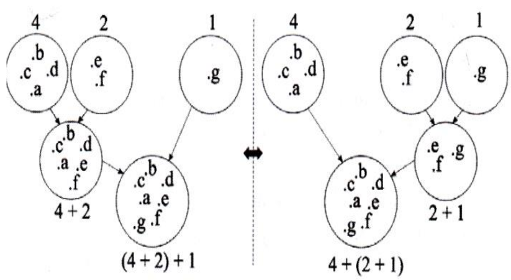
Sifat Identitas Misal *a* merupakan sembarang bilangan dalam bilangan cacah, maka berlaku: a + 0 = a dan 0+ a = a

Sifat Asosiatif terhadap Penjumlahan

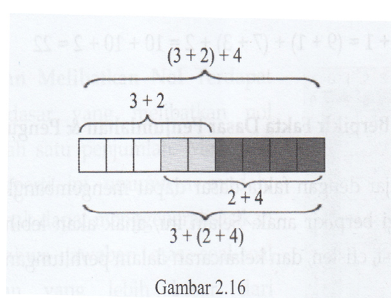
Penjumlahan tiga sembarang bilangan cacah berlaku salah satu bilangan dapat dijumlahkan dengan penjumlahan dua bilangan lainnya. Sifat ini disebut dengan sifat asosiatif terhadap penjumlahan.

Sifat Assosiatif
Misal *a, b*, dan *c* merupakan sebarang bilangan dalam bilangan cacah,maka berlaku : (a + b) + c = a + (b + c)

Sifat dapat diilustrasikan pada Gambar 3.15 dan Gambar 3.16 berikat.



Gambar 3.15



Gambar 3.15

Contoh 3.5

Tunjukkan bahwa penjumlahan berikut berlaku sifat asosiatif.

a. (5+6) + 7 = 5 + (6 + 7)

b. (3+9) + 1 = 3 + (9 + 1)

Penyelesaian

a. (5 + 6) + 7 = 5 + (6+7)
11 + 7 = 5 + 13
18 = 18 (terbukti)

b. (3 + 9) + 1 = 3 + (9+1)
12 + 1 = 3 + 10
13 = 13 (terbukti)

Sifat-sifat komutatif dan asosiatif terhadap penjumlahan menunjukkan bahwa ketika menjumlahkan bilangan cacah, dapat menggunakan urutan dan pengelompokan. Ketika menambahkan beberapa bilangan, kadang-kadang lebih mudah untuk mencari pasangan bilangan yang jumlahnya adalah 10, 20, dan sebagainya.

Contoh 3.6

Tentukan hasil dari 9 + 3 + 2 + 7 + 1

Penyelesaian

9+ 3 + 2 + 7 + 1 = (9 + 1) + (7 + 3) + 2 = 10 + 10 + 2 =22

3.3 Strategi Berpikir Fakta Dasar Penjumlahan & Pengurangan

Mengajar dengan fakta dasar dapat mengembangkan kemampuan strategi berpikir anak. Selain itu, anak akan lebih meningkat dalam akurasi, efisien, dan kelancaran dalam perhitungan (Baroody, 2006).

Fakta Dasar Penjumlahan

Pada tabel fakta dasar penjumlahan (Gambar 3.17) terdapat 100 kotak kosong sehingga hasil penjumlahan dua bilangan cacah *a+b* ditempatkan pada perpotongan antara baris *a* dan kolom *b*. Sebagai contoh, 2 + 5 = 7, posisi 7 ditempatkan pada perpotongan baris 2 dan kolom 5.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2						7				
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Gambar 3.17

Komutatif

Menjumlahkan dua bilangan akan sama hasilnya jika urutan bilangan tersebut ditukar. Hal ini terlihat dari bentuk yang simetri pada Tabel (Gambar 3.18). Sebagai contoh 0 + 0 = 0 + 0, 2 = 2 + 1, 2 + 3 = 3 + 2, dan seterusnya.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Gambar 3.18

Penjumlahan Melibatkan Nol

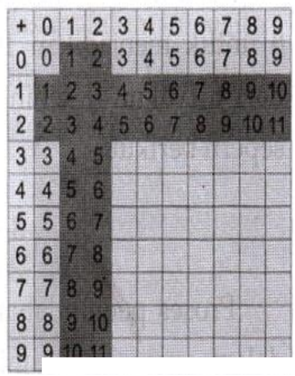
Terdapat 19 fakta dasar yang melibatkan nol sebagai salah sat. penjumlah. Meskipun masalah seperti ini umumnya mudah, beberapa anak dapat menggeneralisasikan gagasan bahwa jawaban atas soal-soal penjumlahan yang lebih besar dari penjumlah nol akar, menghasilkan bilangan itu sendiri (Gambar 3.19).

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	2									
3	3									
4	4									
5	5									
6	6									
7	7									
8	8									
9	9									

Gambar 3.19

Membilang Lanjut dengan 1 dan 2

Anak kelas awal menjumlahkan seperti halnya 6 + 1 dan 6 + 2 melalui strategi membilang dengan melanjutkan (*counting on*). Fakta ini sekaligus menunjukkan hubungan "satu lebihnya" dan "dua lebihnya". Sebagai contoh, 6 + 2, proses berpikirnya dengan urutan dua bilangan setelah 6, yakni 7, 8. Contoh lain, misalkan ketika Trinil melihat pertunjukan "Tong Setan", dia melihat 5 orang pengendara motor keluar mengitari tong seta, kemudian 2 orang pengendara motor lain inenyusul keluar. Berapa banyak pengendara motor yang dilihat oleh Trinil ? Mintalah anak yang berbeda untuk menjelaskan bagaimana mereka mendapat jawaban 7. Kemungkinan beberapa anak akan menjawab dengan mengurutkannya dari 5. Selain itu, kemungkinan beberapa anak akan menjawab dengan menghitung dengan mencacahnya satu-per-satu, dan yang lain mungkin menjawab dengan dua lebihnya dari 5 adalah 7.



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5							
4	4	5	6							
5	5	6	7							
6	6	7	8							
7	7	8	9							
8	8	9	10							
9	9	10	11							

Gambar 3.20

Mengkombinasikan ke 10 (Membuat menjadi 10) Strategi penting untuk berpikir mengenai penjumlahan dua angka dasar yang menghasilkan junilah lebih dari 10 dapat mengkombinasikan ke jumlah 10 terlebih dahulu. Tidak hanya membantu dalam penguasaan fakta - fakta dasar, strategi ini dapat membangun fondasi untuk melakukan operasi hitung dengan bilangan yang lebih besar dan pemahaman konsep tentang nilai tempat.

Sebagai contoh, anak akan inemecahkan masalah 8 + 6 mungkin memulai dengan mengambil 2 dari 6 dan inenjuinlahkannya dengan 8 untuk menjadikan 10, kemudian menjumlahkannya dengan sisa dari 6 (yakni 4) sehingga menghasilkan 14. Secara simbolis ditulis seperti berikut:

$$8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14.$$

Proses penjumlahan di atas, telah menunjukkan sifat assosiatif dalain operasi penjumlahan. Penjuinlahan tiga sembarang bilangan cacah berlaku bah,a salah satu bilangan dapat dijumlahkan dengan penjumlahan dua bilangan lainnya. Penjumlahan 8 + 6 sebelumnya dapat ditulis seperti berikut:

$$8 + (2 + 4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14.$$

Menggunakan 5 Sebagai Jembatan Pembantu

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										0
1										9
2										18
3										27
4										36
5										45
6										54
7										63
8										72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Gambar 3.21

Penggunaan jembatan pembantu merupakan strategi penalaran yang membangun pengetahuan anak tentang sejumlah hubungan yang dapat membantu mereka memperoleh fakta penjumlahan. Misalnya, 8 adalah 5 + 3, 7 adalah 5 + 2, dan 6 adalah 5 + 1.

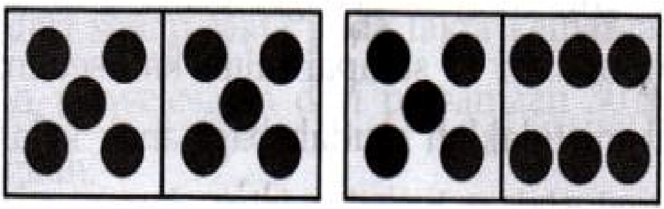
Sehingga, fakta seperti 7 + 8 dapat diproses oleh anak dengan melihat 5 di masing-masing angka dengan "tambahannya. Dalam contoh ini, anak akan menambah 5 + 4 dan kemudian menjumlahkan 2 tambahan dari 7 dan 3 tambahan dari 8 untuk mendapatkan 15.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										11
3									11	12
4								11	12	13
5							11	12	13	14
6						11	12	13	14	15
7					11	12	13	14	15	16
8				11	12	13	14	15	16	17
9			11	12	13	14	15	16	17	18

Gambar 3.22

Fakta Ganda Terdapat 10 fakta berganda dari fakta dasar 0 + 0 sampai 9 + 9, yang ditunjukkan oleh diagonal dari kiri atas sampai kanan bawah. Hal ini mudah dipelajari, karena merupakan bilangan cacah genap atan penjumlahan dua-an (0, 2, 4, ..., 18).

Tetangga Fakta Ganda Tetangga fakta ganda dapat juga disebut dengan fakta “ganda + satu.” atau “ganda – satu”. Sebagai contoh, 5 + 6, 7 + 6, dan yang lainnya. Strategi menggunakan fakta ini yaitu dengan melipatgandakan bilangan yang lebih kecil, kemudian menjumlahkannya dengan 1. Pastikan siswa mengetahui fakta ganda sebelum fokus pada strategi ini.



Gambar 3.23

Misalkan, menjelaskan 5 + 6 dapat menggunakan strategi berikut. Tampilkan kartu domino dengan muka lima-lima (Gambar 2.23) dan tanyakan berapa jumlahnya. Tempatkan muka domino lima-enam di samping muka (Gambar 2.23) dan tanyakan berapa banyaknya pada domino Bimbing anak sehingga anak akan melihat, “Ini hanya satu lebihnya dari fakta ganda”.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1								
1	1	2	3							
2		3	4	5						
3			5	6	7					
4				7	8	9				
5					9	10	11			
6						11	12	13		
7							13	14	15	
8								15	16	17
9									17	18

Gambar 3.24

Minta dan bimbing anak untuk menunjukkan gainbar “tetangga fakta ganda” di sebelah fakta ganda” pada tabel fakta dasar penjumlahan (Gambar 3.24).

Contoh 3.7

Gunakan strategimu dalam 3 cara yang berbeda untuk mengoperasikan 8 + 6.

Penyelesaian

a. 8 + 6 = 8 + (2 + 4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14
b. 8 + 6 = (7 + 1) + 6 = 7 + (1 + 6) = 7+ 7= 14
c. 8 + 6 = (2 + 6) + 6 = 2 +(6 + 6) = 2 +12 = 14

Fakta Dasar Pengurangan

Fakta dasar dari pengurangan lebih sulit daripada fakta dasar penjumlahan bagi anak, khususnya di kelas awal. Hal ini dapat terlihat ketika anak kelas awal menggunakan strategi membilang mundur dalam pengurangan. Sebagai contoh, 13 - 7, anak harus membilang mundur dari 13 sampai tujuh kali sedemikian sehingga diperoleh 6. Hal ini tidaklah mudah bagi anak kelas awal. Strategi untuk melatih anak dalam berpikir fakta, dasar pengurangan dapat dilakukan dengan memikirkan pengurangan sebagai lawan dari penjumlahan dan menggunakan 10 sebagai jembatan pembantu.

Pengurangan sebagai Kebalikan dari Penjumlahan

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2						7				
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Gambar 3.25

Mencari penjumlah yang belum diketahui dari konsep pengurangan dapat dicontohkan sebagai berikut.

"Ibu Bejo memiliki 7 pulpen. Dia memberikan beberapa pulpen ke Bejo. Sekarang dia memiliki 2 pulpen. Berapa banyak pulpen yang dia berikan kepada Bejo?"

Notasi pengurangan pada permasalahan di atas adalah 7 - 2 yang dapat diartikan sebagai berapa banyak lagi dari 2 untuk mencapai 7.

Konsep mencari penjumlah berguna untuk belajar tentang fakta dasar pengurangan yang berkaitan erat dengan fakta dasar penjumlahan melalui 4 fakta keluarga (*fact families*). Misal, operasi 7 - 2 = 5 berkaitan dengan fakta penjumlahan 7 = 2 + 5 clan 7 = 5 + 2. Kedua persamaan menunjukkan hubungan dengan fakta yang lain, 7 - 5 = 2. Sehingga, 2 fakta penjumlahan dan 2 fakta pengurangan membentuk sebuah fakta keluarga.

Fakta keluarga	
2+5 = 7	7-2=5
5+2 = 7	7-5=2

Contoh 3.8

Gunakan fakta keluarga untuk menyelesaikan persainaan 30 + k = 50.

a. Tulis fakta keluarga untuk 30 + k = 50.

b. Identifikasi dari setiap fakta pada fakta keluarga, manakah yang memudahkan penyelesaian dari persamaan 30 + k = 50 dalam satu kali langkah.

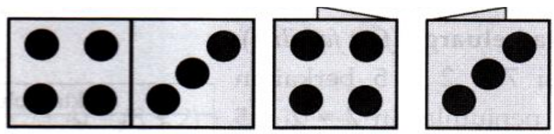
c. Tentukan nilai k

Penyelesaian

a.

Fakta keluarga dari 30 + k = 50	
30 + k = 50	50 – k = 30
k + 30 = 50	50 – 30 = k

Fakta keluarga	
4 + 3 = 7	7 - 4 = 3
3 + 4 = 7	7 - 3 = 4



(a) (b) (c)

b. 50 – 30 = k

c. 50 + 30 = 20, sehingga k = 20

- Gambar (a) dapat dipergunakan untuk merepresentasikan operasi 4 + 3 dan 3 + 4.
- Gambar (b) dengan melipat mata 3 pada kartu domino merepresentasikan 7 - 3 = 4.
- Gambar (c) dengan melipat mata 4 pada kartu domino merepresentasikan 7 - 4 = 3.

10 sebagai Jembatan Pembantu

Penalaran dalam stategi penjumlahan dapat digunakan untuk belajar fakta pengurangan. Sebagai contoh, 15 - 7, anak dapat membilang dari 7 naik 3 ke 10 dan kemudian 5 lebihnya ke 15 untuk memperoleh selisihnya yakni 8 (dari 3 + 5). Anak juga dapat menggunakan strategi lain dengan memulai memikirkan untuk membilang mundur dari 15 turun 5 ke 10, kemudian turun 3 lagi ke 7 sedemikian sehingga selisih keseluruhan diperoleh 8 (dari 5 + 3).

Strategi lain untuk belajar fakta pengurangan yakni dengan mengambil dari 10. Sebagai contoh, 15 - 7, anak dapat memikirkan 15 = 10 + 5 dan mengambil 10 untuk dikurangkan 7. Hal ini didasarkan karena anak lebih memaknai kombinasi yang membuat jadi 10.[19] Hasil pengurangan tersebut. (yakni 3), kemudian dijumnlahkan dengan 5, sehingga diperoleh 8.

Contoh 3.9

Gunakan strategi 10 sebagai jembatan pembantu untuk menentukan hasi1 17 - 9.

Penyelesaian

- 9 + 1 = 10; 10 + 7 = 17; 1 + 7 = 8. Jadi, 17 - 9 = 8.
- 10 + 7 = 17; 10 - 9 = 1; 7 + 1 = 8. Jadi, 17 - 9 = 8.
- 17 - 7 = 10 - 2 = 8. Jadi, 17 - 9 = 8. 2.4.

3.4 Tipe Permasalahan pada Perkalian dan Pembagian

Secara garis besar, terdapat empat jenis permasalahan perkalian dan pembagian, yakni kesamaan kelompok, perbandingan, kombinasi, dan *array* (Van de Walle dkk, 2010). Sebagian besar buku teks, seringkali hanya mencakup jenis permasalahan yang paling nmdah, yakni kesamaan kelompok dengan *hasil kali tidak diketahui atau faktornya tidak diketahui*.

Di sisi lain, permasalahan kesamaan kelompok dalam pembagian memiliki dua tipe, yakni konsep pembagian dengan pengukuran *(measurement division*) dan mengelompokkan secara adil (*partitive division*). Tipe pengukuran dalam pembagian bercirikan keseluruhan objeknya diketahui dan ukuran -jumlah objek (anggota)- dalam kelompok diketahui, namun jumlah kelompok tidak diketahui. Sedangkan, tipe pembagian dengan partisi, keseluruhannya diketahui dan jumlah kelompok diketahui, tetapi ukuran dalam setiap kelompok tidak diketahui.

Kesamaan Kelompok

Ketika permasalahan menunjukkan diketahuinya jumlah dan ukuran kelompok, namun keseluruhan objek tidak diketahui, maka termasuk permasalahan perkalian. Di sisi lain, ketika jumlah kelompok *atau* ukuran kelompok tidak diketahui, namun keseluruhan objek tidak diketahui, maka termasuk permasalahan pembagian.

Keselarahaa Tidak Diketahui

Permasalahan kesamaan kelompok dengan keseluruhan tak diketahui termasuk dalam permasalahan perkalian. Sebagai contoh, Joni membeli 3 kantung plastik kurma, dengan setiap kantung plastik berisi 10 kurma. Berapa jumlah keseluruhan biji kurma yang dimiliki Joni? Permasalahan ini menunjukkan bahwa terdapat tiga dari 10-an sehingga dapat diartikan sebagai penjumlahan berulang, yakni 10 + 10 + 10. Pertimbangkan contoh lain, Jino bersepeda dari rumahnya ke sekolah dengan kecepatan 3 km/jam dengan lama perjalanan 4 jam. Berapa jarak rumah Jino dengan Sekolah? Hal ini dapat diartikan bahwa setiap jam memperoleh 3 km, sehingga 4 jam diperoleh 3 + 3 + 3 + 3. Notasi perkalian dapat ditulis dengan beberapa bentuk, tergantung pada pemakaiannya, yakni seperti berikut.

Notasi Perkalian

Simbol		*Contoh*
x	symbol cross	3 x 4
.	dot	3 . 4
( )	tanda kurang	(3) (4) atau 3 (4) atau (3) 4

Ketika anak memikirkan penjumlahan berulang, mereka juga menghubungkannya dengan strategi membilang loncat. Permasalahan 3 dari 4-an (3 x 4) dapat dilakukan dengan membilang loncat dari 4 sebanyak 3 kali.

Perkalian Bilangan Cacah sebagai Penjumlahan Berulang

Untuk setiap bilangan cacah r dan s , dengan $r \neq 0$, maka

$$r \times s = \underbrace{s + s + \ldots + s}_{\text{Sebanyak } r}$$

jika $r \neq 0$ dan $s \neq 0$, maka r dan s disebut faktor.

jika r = 1, maka r x s = l x s = s

jika r = 0, maka r x s = 0 x s = 0, untuk semua nilai *s*.

Contoh 3.10

Harga pulpen adalah 3 (dalam ribuan), berapakah uang yang harus dibayarkan jika membeli 5?

Penyelesaian

5 x 3 = 3 + 3 +3 + 3 + 3 = 15 (dalam ribuan).

Contoh 3.11

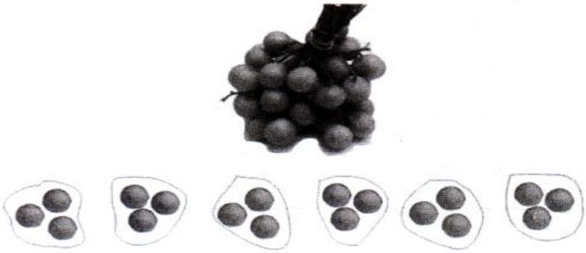
Yoppy memiliki 3 cangkir dan setiap cangkir berisikan 5 kelereng di dalamnya. Berapa keseluruhan kelereng?

Penyelesaian

3 x 5 = 5 + 5 + 5 = 15.

Jumlah atau ukuran Kelompok Tidak Diketahui

Permasalahan kesamaan kelompok dengan jumlah *atau* ukuran kelompok tidak diketahui merupakan permasalahan pembagian. Sebagai contoh, Joni memiliki 18 kelengkeng yang akan dibagi adil untuk dia dan 5 temannya. Berapa jumlah kelengkeng yang didapatkan setiap orang?



©makanansehat123.blogspot.com

Permasalahan ini menunjukkan bahwa 18 kelengkeng dibagi adil untuk 6 orang. Anak akan menggunakan strategi yang berbeda-beda dalam membagi adil kelengkeng. Anak mungkin membagi kelengkeng satu demi satu kepada 6 orang sedemikian sehingga setiap anak mendapatkan sekiah kelengkeng sebanyak tiga kali. Kemungkinan lain, anak akan membagi 3 kelengkeng langsung kepada 6 orang.

Pertimbangkan contoh lain berikut, Jino memiliki 18 kelengkeng yang akan dibungkus ke dalam sebuah plastik kecil yang masing-masing hanya memuat 3 kelengkeng. Berapa jumlah kantong plastik yang diperlukan Jino? Permasalahan ini menunjukkan bahwa Jino harus mengurangi 3-an dari 18 kelengkengnya. Ini menunjukkan bahwa hasil bagi diperoleh dengan mengukur sejumlah kelompok 3- an sehingga jumlah keseluruhan dari 18 habis. Dengan kata lain, melakukan pengurangan secara berulang oleh 3-an. Secara simbolis, ditulis $18 : 3 \Leftrightarrow 18 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$. 18 habis dikurangi sejumlah 6 tiga-an. Jadi, jumlah kantong yang diperlukan oleh Jino adalah 6. Strategi lain yakni dengan menjumlahkan 3 kelengkengnya berulang sedemikian sehingga setara dengan 18 kelengkeng. Strategi ini dapat diartikan berapa kali 3-an setara dengan 18. Secara simbolis, ditulis $18 : 3 \Leftrightarrow 3 \times ? = 18$. Menyelesaikan pembagian dengan strategi ini yakni dengan mengubahnya sebagai invers perkalian.

Definisi Pembagian

Untuk sembarang bilangan cacah a,b, dan c, dengan $b \neq 0$, berlaku $a \div b =$ c,
jika hanya jika $a = b \times c$, atau

$$a \div b = c \Leftrightarrow \underbrace{a - b - \dots - b}_{\text{sebanyak } c}$$

notasi pembagian

Notasi Pembagian

Simbol	*Deskripsi*	*Contoh*
$\div$	simbol "bagi"	$18 \div 3$
$\frac{\dots}{\dots}$	pecahan	$\frac{18}{3}$
$\dots\overline{)\dots}$	pembagian panjang	$3\overline{)18}$

Contoh 3.12 (Pembagian dengan Mengelompokkan)

Sebuah kelas terdiri dari 20 siswa akan dibagi menjadi 4 kelompok dengan masing -masing kelompok memiliki anggota yang sama. Berapakah banyak anggota tiap kelompok?

Penyelesaian

Memecah 20 siswa ke dalam 4 kelompok yang adil, sedemikian sehingga 4 kelompok tersebut terdiri atas 5 siswa. Jadi, terdapat 4 kelompok dengan 5 anak dalam setiap kelompok.

Contoh 3.13 (Pembagian dengan Cara Mengukur)

Sebuah kelas terdiri dari 20 siswa akan dibuat kelompok dengan masing-masing 5 siswa. Berapa kelompok yang dapat dibuat?

Penyelesaian

Dari 20 siswa dipilih 5 siswa ke kelompok satu, 5 siswa ke kelompok dua, dan seterusnya. Sedemikian sehingga, dari lima siswa yang dikelompokkan per kelompok dapat dihitung banyak kelompok yang terbentuk. Jadi, terdapat 4 kelompok dengan 5 anak perkelompok.Diskusikan letak perbedaan contoh ini dengan conk. sebelumnya!

Contoh 3.14

Tentukan hasil dari operasi berikut dengan menggunakan invers perkalian.

a. $49 \div 7$ c. $32 \div 8$

b. $42 \div 6$ d. $35 \div 5$

Penyelesaian

a. $49 \div 7 = 7$, karena $7 \times 7 = 49$

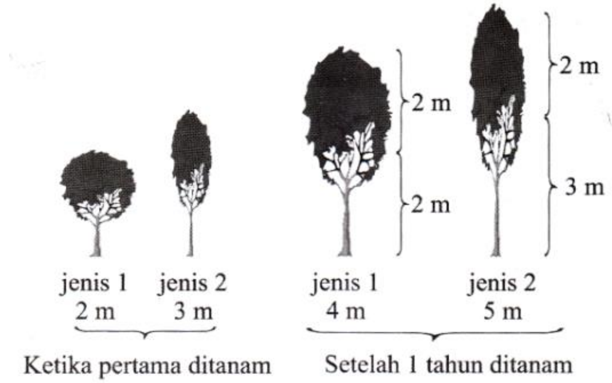
b. $42 \div 6 = 7$, karena $6 \times 7 = 42$

c. $32 \div 8 = 4$, karena $8 \times 4 = 32$

d. $35 \div 5 = 7$, karena $5 \times 7 = 35$

Perbandingan

Perbandingan dalam situasi perkalian (multiplikatif) berbeda dengan perbandingan dalam situasi penjumlahan (aditif). Perbandingan dalam penalaran aditif didasarkan pada jumlah dan selisih suatu kuantitas. Sedangkan, perbandingan dalam penalaran multiplikatif didasarkan pada satu himpunan yang merupakan kelipatan dari himpunan yang lain. Transisi permasalahan perbandingan dengan penalaran aditif ke multiplikatif rentan mengakibatkan miskonsepsi anak. Anak sering menyelesaikan masalah penalaran multiplikatif dengan menggunakan penalaran aditif. Sebagai contoh, Yoppy menanam pohon jenis pertama dan jenis kedua dalam waktu yang bersamaan. Tinggi potion jenis pertama adalah 2 meter dan pohon jenis kedua adalah 3 meter. Setelah satu tahun, pohon jenis pertama tumbuh menjadi 4 meter dan pohon jenis kedua tumbuh n-tenjadi 5 meter. Manakah pohon yang tumbuh pada tingkat yang lebih cepat ?



Gambar 3.27

Letak kesalahan anak ketika menjawab permasalahan ini, yakni menjawab dengan menggunakan penalaran aditif bahwa kedua pohon tumbuh pada tingkat yang sama karena setiap pohon tumbuh 2 m. Jawaban anak salah karena ketika tumbul, pada tingkat yang sama seharusnya pohon jenis kedua adalah 6 m (diskusikanl). Jadi, jawaban yang betul yakni pohon jenis 1 yang lebih cepat pertumbuhannya.

Tipe permasalahan perbandingan untuk perkalian dan pembagian dapat dijabarkan dengan contoh-contoh berikut ini.

Hasil Kali Tidak Diketahui (Situasi Perkalian)

- Trimbil memiliki 5 kelengkeng. Trinil memiliki 2 kali dari jumlah kelengkeng Trimbil. Berapa banyak kelengkeng yang dimiliki oleh Trinil ? *(Permasalahan perkalian)*
- Bulan Agustus, Trimbil menabung 2 kali junilah uang di bulan Jika bulan Juli. Trimbil menabung Rp1.000,00, Berapa banyak uang yang ditabung Trimbil pada bulan Agustus? (*Permasalahan perkalian*)

Ukuran kelompok Tidak Diketahui

- Trinil memiliki 10 kelengkeng. Ia memiliki 2 kali jumlah kelengkeng Trimbil. Berapa banyak kelengkeng yang dimiliki oleh Trimbil? (*Permasalahan pembagian dengan partisi*)
- Bulan Agustus, Trimbil menabung 2 kali jumlah uang di bulan Juli. Jika bulan Agustus Trimbil menabung Rp2.000,00, Berapa banyak uang yang ditabung Trimbil pada bulan Juli? (*Permasalahan pembagian dengan partisi*)

Kelipatan (Pengali) yang Tidak Diketahui

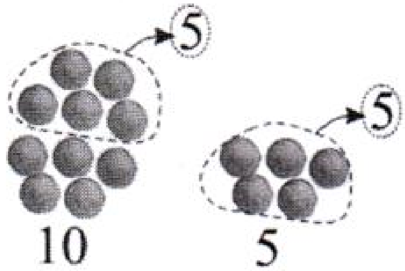
- Trinil memiliki 10 kelengkeng. Trimbil memiliki 5 kelengkeng. Berapa kali banyaknya kelengkeng Trinil dibandingkan kepunyaan Trimbil? (*Permasalahan pembagian dengan pengukuran*)
- Bulan Agustus, Trimbil menabung Rp2.000,00. Bulan Juli, Ia menabung Rp1.000,00. Berapa kali banyaknya uang yang ditabung Trimbil di bulan Agustus dibandingkan di bulan Juli? (*Permasalahan pembagian dengan pengakuran*)

Contoh 3.15

Trinil memiliki 10 kelengkeng. Trimbil memiliki 5 kelengkeng. Berapa kali banyaknya kelengkeng Trinil dibandingkan kepunyaan Trimbil?

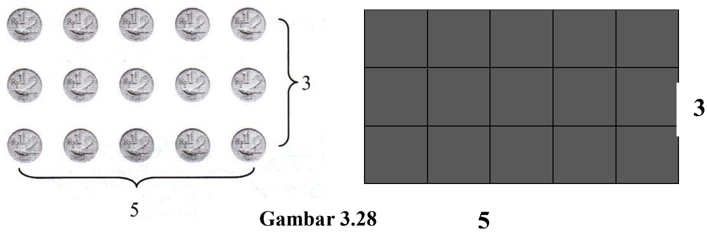
Penyelesaian

Kasus ini dapat diselesaikan dengan pembagian secara mengukur dengan mengartikan bahwa berapa 5-an kelengkeng sedemikian sehingga menjadi 10 kelengkeng atau berapa kali pengurangan 5-an dari 10 kelengkeng yang ada. Terlihat bahwa terdapat 2 kali pengurangan 5-an dari 10. Jadi, banyaknya kelengkeng Trinil 2 kali dari kepunyaan Trimbul.



Perhitungan Array Persegi Panjang

Salah satu cara untuk merepresentasikan perkalian bilangan cacah adalah dengan ausunan obyek pada baris-kolom persegi panjang (*rectangular array*). Misalkan, diketahui 3 siswa dengan masing-masing memiliki 5 uang koin Rp1,00. Berapakah keseluruhan koin jika dikumpulkan bersama? Permasalahan ini dapat dimodelkan dengan Gambar 3.28 berikut.



Gambar 3.28

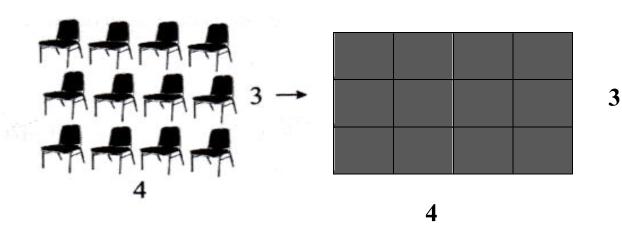
Perkalian pada Bilangan Cacah: *Rectangular Array* Misal *r* dan *s* berupa bilangan cacah, maka r x s adalah jumlah semua elemen dalam daerah persegi panjang yang memiliki *r* baris dan *s* kolonm.

Contoh 3.16

Sebuah sirkus berlangsung di sebuah ruangan. Banyaknya tempat duduk untuk setiap baris dari ruangan tersebut memiliki jumlah yang sama. Diketahui ruangan tersebut memiliki 3 baris tempat duduk dengan setiap baris memiliki 4 tempat duduk. Berapa jumlah maksimal pengunjung yang duduk di ruangan tersebut.

Penyelesaian

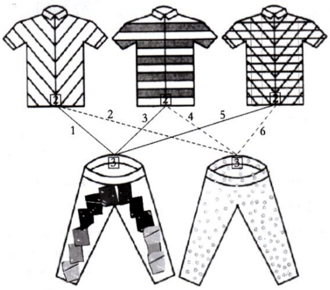
Permasalahan ini dapat dimodelkan dengan susunan seperti berikut.



Jadi, jumlah maksimal pengunjung yang duduk di ruangan tersebut sama artinya mencari luas persegi panjang, yakni 4 x 3 =12.

Kombinasi

Permasalahan ini menunjukkan jumlah total kemungkinan yang dibuat dengan memasangkan anggota dari dua himpunan. Misalkan, Trimbil memiliki tiga kemeja dan dua celana, berapa banyak pakaian berbeda yang dapat Trimbil pakai (Gambar 3.29).

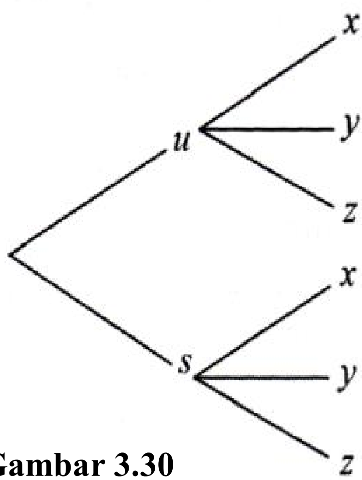


Gambar 3.29

Secara matematis, permasalahan di atas dapat diartikan 2 x 3 = 3 + 3, yaitu memasangkan satu-satu dari 3 kemeja dengan 2 celana, atau dapat diartikan 3 x 2 = 2 + 2 + 2, yaitu memasangkan satu-satu dari 2 celana ke 3 kemeja. Kedua bentuk perkalian tersebut memiliki jumlah kombinasi yang sama, yaitu 6.

Diagram Pohon

Cara lain untuk mengartikan konsep perkalian di kelas tinggi yaitu dengan diagram pohon. Membuat diagram pohon merupakan teknik menghitung yang berguna untuk beberapa jenis masalah perkalian, terlebih materi yang berkaitan dengan peluang. Misalkan, seorang pemudik ingin pulang kampung ketika lebaran, dia memiliki 2 alternatif jalur yaitu melewati jalur utara (*u*) dan jalur selatan (*s*) untuk melewati jalur utara dan selatan melewati kota x, y, atau z . Berapa banyak pilihan yang dapat dipilih oleh pemudik tersebut untuk pulang kampung? Permasalahan ini dapat dibuat sebuah diagram pohon seperti pada Gainbar 3.30. Terlihat dari diagram bahwa pilihan pemudik untuk pulang kampung, yakti 2 x 3 = 6 pilihan.



Gambar 3.30

3.5 Sifat-sifat Perkalian dan Pembagian

Empat sifat yang berlaku untuk perkalian bilangan cacah dapat dinyatakan di bawah ini, beserta beberapa sifat tambahan yang berhubungan dengan operasi penjumlahan dan perkalian.

Sifat Tertutup terhadap Perkalian

Sifat ini menyatakan bahwa hasil dari perkalian dua bilangan cacah juga bilangan cacah. Misalnya, 3 x 4 = 12, karena 12 juga anggota bilangan cacah.

Sifat Tertutup Terhadap Perkalian

Untuk seinbarang bilangan cacah *a* dan *b* berlaku

a x *b* adalah selalu bilangan cacah.

Sifat Identitas terhadap Perkalian

Bilangan 1 disebut identitas untuk perkalian karena ketika dikalikan dengan suatu bilangan akan menghasilkan bilangan itu sendiri. Sebagai contoh,

1 x 5 = 5 16 x 1 = 16 1 x 0 = 0

Bilangan 1 merupakan bilangan unik karena hanya satu - satunya bilangan yang merupakan identitas untuk perkalian.

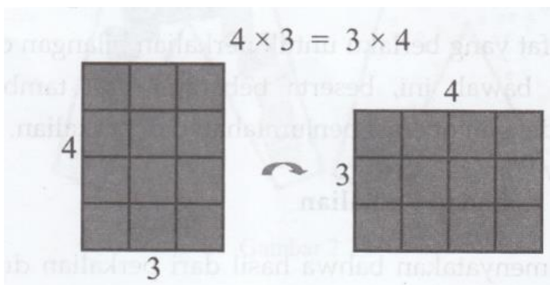
Sifat Identitas terhadap Perkalian

Untuk sembarang bilangan cacah *a*, berlaku

$a \times 1 = 1 \times a = a$

dan 1 disebut dengan identitas perkalian.

Sifat Komutatif terhadap Perkalian



Gambar 3.31

Sifat ini mengatakan bahwa dalam setiap perkalian dua bilangan, maka dua bilangan tersebut dapat dipertukarkan (dibalik) tanpa mempengaruhi hasil perkalian, sifat ini disebut sifat komutatif terhadap perkalian. Sebagai contoh, 4 x 3 = 3 x 4 yang dapat diilustrasikan seperti berikut.

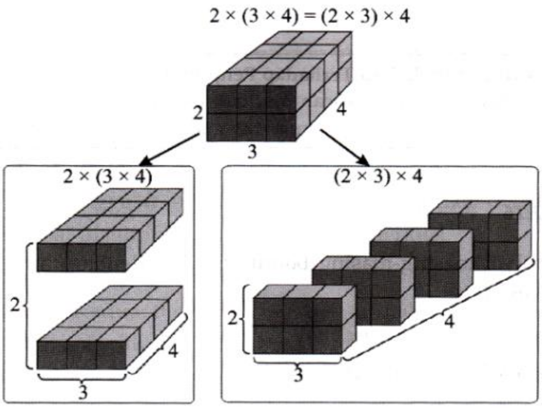
Sifat Komutatif terhadap Perkalian

Untuk sembarang bilangan cacah *a* dan *b* , berlaku

$a \times b = b \times a$.

Sifat Assosiatif terhadap Perkalian

Perkalian yang melibatkan tiga sembarang bilangan cacah berlaku salah satu bilangan dapat dikalikan dengan perkalian dua bilangan lainnya. Sifat ini disebut dengan sifat assosiatif terhadap perkalian. Misalnya, perkalian 4 x (3 x 17) akan lebih mudah jika dikerjakan dengan (4 x 3) x 17. Sifat assosiatif ini dapat dimodelkan dengan balok mainan yang ditunjukkan oleh Gambar 3.32 berikut.

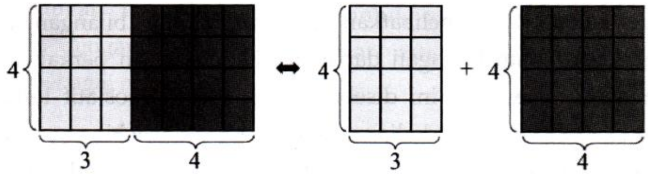


Gambar 3.32

Sifat Assosiatif Terhadap Perkalian
Untuk sembarang bilangan cacah *a*, *b*, dan *c*, berlaku
A x (b x c) = (a x b) x c.

Sifat Distributif Perkalian terhadap Penjumlahan

Terdapat satu sifat penting lain dari bilangan cacah. Sifat ini disebut dengan sifat distributif, yaitu menggabungkan antara perkalian dan penjumlahan. Misalnya, 4 x (3 + 4) dapat diubah menjadi (4 x 3) + (4 x 4). Perhatikan Gambar 3.33) berikut:



4 x (3 + 4) = (4 x 3) + (4 x 4)

Gambar 3.33

Sifat Distributif Perkalian Terhadap Penjumlahan
Untuk sembarang bilangan cacah *a,b,* dan *c,* berlaku
$a\ (\ b + c\ ) = ab + ac$

Contoh 3.17

Tulis kembali masing - masing bentuk berikut dengan ineriggunakan sifat distributif.

a. 3(4+5)	c. $am + am$
b.5 x 7 + 5 x 3	d. $a\ (\ b + c + d\ )$

Penyelesaian

a. 3(4 + 5)	= (3 x 4) + (3 x 5)
b.5 x 7 + 5 x 3	= 5 (7 + 3)
c. $am + am$	$= a\ (\ m + n\ )$
d. $a\ (\ b+ c + d\ )$	$= ab + ac + ad$

Sifat Perkalian terhadap Nol

Sifat Perkalian Terhadap Nol
Untuk sembarang bilangan cacah *a* , berlaku a x 0 = 0 x a =0

Sebagai contoh: 3 x 0 = 0 x 456 = 0.

Sifat Pembagian terhadap Nol

Sifat pembagian yang melibatkan nol dibagi dengan sembarang bilangan dapat dicontohkan dengan permasalahan berikut. Bejo tidak memiliki permen di kantongnya. Ia bagikan kepada 4 orang temannya. Berapa banyak permen yang didapat dari setiap temannya? Setiap teman Bejo tidak dapat permen artinya mendapatkan 0 permen.

Sifat Pembagian dari Jika a ≠ 0, maka 0 ÷ a = 0.

Permasalahan Pertama: a ÷ 0, dengan a ≠ 0 Jika a ÷ 0 = k, maka a = 0 x *k*, sehingga a = 0, tetapi hal ini kontradiksi dengan a ≠ 0. sehingga dapat disimpulkan a ÷ 0 tidak terdefinisi.

Permasalahan kedua : 0 ÷ 0 Jika 0 ÷ 0 = *k*, maka 0 = 0 x *k*, tetapi *k* dapat dipilih banyak nilai. Sehingga, nilai *k* tidak khusus untuk bilangan tertentu. Jadi, pembagian dengan kasus 0 ÷ 0 adalah tidak dapat didefinisikan.

Catatan: Sembarang bilangan dibagi nol adalah tidak terdefinisi.

Secara logika, permasalahan bilangan yang dibagi dengan nol dapat dicontohkan dengan urutan kejadian berikut.

- Bejo memiliki empat permen dan membaginya kepada dua orang teman. Berapa banyak permen yang didapatkan dari setiap temannya?
- Bejo membagi empat permen kepada satu teman, berapa banyak permen yang didapatkan oleh temannya?
- Bejo membagi empat permen kepada bukan teman, berapa banyak permen yang didapatkan temannya?

Urutan dari ketiga kasus di atas menunjukkan bahwa membagi jumlah apapun dengan nol merupakan logika yang tidak masuk akal dan tidak mungkin. Dalam matematika, pembagian dengan nol disepakati sebagai tidak terdefinisi.

3.6 Strategi Berpikir Fakta Dasar Perkalian & Pembagian

Seperti halnya belajar fakta penjumlahan dan pengurangan, belajar fakta dasar perkalian dan pembagian dengan strategi berpikir hendaknya dikaitkan dengan permasalahan di lingkungan sekitar anak.

Belajar fakta dasar pembagian selalu dikaitkan dengan perkalian. Fokus Mama dari belajar fakta pembagian adalah menciptakan masalah cerita sesuai konteks pembagian yang dapat membangun hubungannya ke dalam perkalian. Sebagai contoh, soal cerita yang memuat kalimat 35 ÷ 5 dapat diinterpretasikan berapa kali 5-an sehingga sama dengan 35.

Fakta dasar perkalian juga tidak lepas dari belajar membilang loncat. Anak belajar 3 x 2 = 6 dapat memahami dengan bernalar bahwa terdapat tiga kelompok dua-an (penjumlahan berulang oleh dua-an sebanyak tiga kali) atau membilang loneat 2,4, 6.

Komutatif

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2								
3	0	3								
4	0	4								
5	0	5								
6	0	6								
7	0	7								
8	0	8								
9	0	9								

Gambar 3.34

Mengalikan dua bilangan akan sama hasilnya jika urutan bilangan tersebut ditukar. Hal ini terlihat dari bentuk, yang simetri pada Gambar 3.34.

Perkalian yang melibatkan nol 0 atau 1

Perkalian yang melibatkan nol akan menghasilkan nol. Kasus ini dapat dimodelkan dengan tidak terdapat kelereng di dalam 1 gelas, tidak terdapat kelereng di dalam 2 gelas, hingga tidak terdapat kelereng dalam 9 gelas. Berapa banyak satu kelompok nol? Berapa banyak dua kelompok nol? Berapa banyak sembilan kelompok nol? Hal ini dapat terjawab dengan menjumlahkan nol sejumlah kelompoknya.

Fakta perkalian yang melibatkan 1 mengenalkan anak pada sifat identitas terhadap perkalian. 1 disebut dengan elemen identitas terhadap perkalian dikarenakan berapapun bilangan cacah dikalikan 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri. Kasus ini dapat dimodelkan dengan meletakkan 1 kelereng dalam beberapa gelas. Berapa banyak dua kelompok dari 1 kelereng? Berapa banyak lima kelompok dari 1 kelereng? Berapa banyak dua puluh kelompok dari 1 kelereng? Kasus ini juga dapat direpresentasikan dengan berapa banyak dalam 1 kelompok dari 7?

Perkalian dengan 2 (Ganda)

Fakta perkalian dengan 2 menghubungkan anak dengan fakta ganda dalam penjumlahan, misalkan dua kelompok dari empat kelereng, artinya 4 + 4 atau 2 x 4. Hal ini juga berhubungan dengan membilang loncat 2-an.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			0							
1			2							
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3			6							
4			8							
5			10							
6			12							
7			14							
8			16							
9			18							

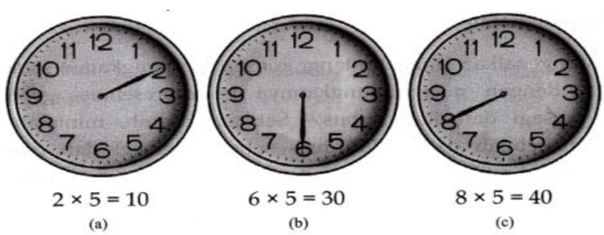
Gambar 3.35

Perkalian dengan 5

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0						0				
1						5				
2						10				
3						15				
4						20				
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6						30				
7						35				
8						40				
9						45				

Gambar 3.36

Belajar fakta perkalian dengan 5 ataupun membilang loncat 5-an dapat dikaitkan dengan fakta pada jam. Perhatikan Gambar 2.38a, terlihat bahwa 5 x 2 menandakan bahwa jarum menit pada angka 2 adalah 10 menit. Gambar 2.38b, menunjukkan jarum menit di angka 6 artinya 6 x 5 = 30 menit. Begitupun halnya pada Gambar 3.36 menunjukkan bahwa 8 x 5 = 40 menit.



Gambar 3.37

Perkalian dengan 9

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										0
1										9
2										18
3										27
4										36
5										45
6										54
7										63
8										72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Gambar 3.38

Fakta perkalian dengan 9 merupakan perkalian yang besar, namun, dengan strategi berpikir perkalian dengan melibatkan 9 dapat mudah diterapkan. Ada dua strategi yang dapat diterapkan. Pertama, perhatikan bahwa perkalian dengan 9 pasti menghasilkan digit puluhan yang satu kurangnya dari digit faktor lainnya (selain 9). Kedua, jumlah dari hasil kalinya adalah 9. Sebagai contoh, angka puluhan dari 5 . 9 adalah 4 (yakni merupakan satu kurangnya dari 5) dan jumlah digit dari hasil kalinya (yakni 45) adalah sama dengan 9 (karena 4 + 5 = 9).

Kemungkinan beberapa anak mengalami kesulitan menerapkan strategi di atas. Alternatif strategi yang dapat digunakan adalah dengan mengalikannya dengan 10 terlebih dahulu. Sebagai contoh, jika 5 x 10 = 50, maka 5 x 9 adalah 50 - 5 = 45.

2.7. Perpangkatan

Mengenalkan anak tentang konsep perpangkatan sebaiknya dimulai dengan menghubungkannya ke representasi geometris, yakni persegi dan/atau kubus (Musser, dkk, 2011). Sebagai contoh, mintalah anak membuat sebuah daftar dari luas sebuah persegi dan perkalian dimensinya dimulai dengan panjang sisinya 2 sampai 5 satuan.

Di depan telah dipelajari bahwa perkalian dapat didefinisikan sebagai penjumlahan berulang dan pembagian dapat diartikan sebagai pengurangan berulang. Analogi yang sama, konsep perpangkatan dapat diartikan sebagai perkalian berulang.

Definisi Perpangkatan

Misal a dan n sembarang dua bilangan cacah dengan $n \neq 0$, maka

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktor}}, \text{ dengan } n > 1$$

Keterangan:

n = pangkat (eksponen)

a = basis

Sehingga, a^n dibaca "a pangkat n" atau "a dipangkatkan n"

Contoh 3.18

Tulis kembali setiap permasalahan berikut ke dalam definisi perpangkatan.

a. $2^2 . 2^3$

b. $3^2 . 3^3$

Penyelesaian

a. $2^2 . 2^3 = (2 . 2) . (2 . 2 . 2) = 2^5$

b. $3^2 . 3^3 = (3 . 3 . 3) . (3 . 3 . 3) = 3^6$

Perhatikan contoh (a) di atas terlihat bahwa faktor perpangkatannya adalah 2 dan 3. Sehingga, bilangan pangkatnya adalah 2 + 3 = 5. Begitu halnya dengan contoh (b). Jadi, dapat dibuat sebuah teorema seperti berikut.

Teorema
Misal *a, m,* dan *n* adalah sembarang bilangan cacah dengan *m* dan *n* bukan nol, maka $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ faktor}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktor}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ faktor}} = a^{m+n}.$$

Contoh berikut akan menunjukkan perpangkatan bentuk $a^n \cdot b^n$.

Contoh 3.19

Tulis kembali setiap permasalahan berikut ke dalam definisi perpangkatan.

a. $2^2 \bullet 3^2$

b. $3^3 \bullet 2^3$

Penyelesaian

a. $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2.3) = (2 \cdot 3)^2$

b. $3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = (3 \cdot 2)^3$

Contoh 3.18 di atas menghasilkan sebuah teorema seperti berikut.

Teorema
Misal *a,b* dan *n* adalah seinbarang bilangan cacah dengan *n* bukan maka $a^n \cdot b^n = (a.b)^n$

Bukti:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktor}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ faktor}} = \underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ pasang faktor}} = (a \cdot b)^n.$$

Contoh berikut akan menunjukkan perpangkatan bentuk $(a^m)^n$.

Contoh 3.20

Tulis kembali setiap permasalahan berikut ke dalam definisi perpangkatan.

a. $(2^2)^3$ b. $(5^4)^5$

Penyelesaian

a. $(2^2)^3 = 2^2 . 2^2 . 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 2^{2.3}$

b. $(5^4)^5 = 5^4 . 5^4 . 5^4 . 5^4 . 5^4 = 5^{4+4+4+4+4} = 5^{20} = 5^{4.5}$

Contoh 2.19 di atas menghasilkan sebuah teorema seperti berikut.

Teorema

Misal *a, m,* dan *n* adalah sernbarang bilangan cacah dengan *m* dan bukan nol, maka $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Bukti :

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\text{ faktor}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ faktor}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ faktor}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ faktor}}}_{n\text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n\text{ faktor}}$$

Catatan penting mengenai konsep perpangkatan dari teorema di atas dapat diuraikan seperti berikut.

- Teorema-teorema di atas tidak berlaku pada penjumlahan dan pengurangan.. Misalnya, $2^2 + 3^2 \neq (2 + 3)^2$ atau $2^2 - 3^2 \neq (2 - 3)^2$.
- Jika am . $a^n = a^{m+n}$ dengan m = 0, mak. $A^0 . a^n = a^{0+n} = a^n$. Sehingga, dapat didefinisikan bahwa $a^0 = 1$, dengan $a \neq 0$.
- Bentuk 0^0 tidak dapat didefinisikan (mengapa?). Perhatikan dua pola berikut $3^0 = 1$, $2^0 = 1$, $1^0 = 1$ dan $0^3 = 0$, $0^2 = 0$, $0^1 = 0$. Polo pertama, membinibing kita untuk memperoleh hasil $0^0 = 1$, tetapi pada pola kedua, menuntun kita untuk memperoleh hasil $0^0 = 1$. Masing-masing perpangkatan tersebut memiliki pola yang tidak konsisten, sehingga dapat disimpulkan bahwa 0^0 tidak dapat didefinisikan.

  Contoh berikut akan menunjukkan perpangkatan bentuk $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

Contoh 3.21

Tulis kembali setiap permasalahan berikut ke dalam definisi perpangkatan.

a. $2^5 \div 2^2$ b. $3^7 \div 3^2$

Penyelesaian

a. $2^5 \div 2^2$ sama halnya dengan 2^2 (...) = 2^5,
karena $2^2 . 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$, maka $2^5 \div 2^2 = 2^3$.

b. $3^7 \div 3^2$ sama halnya dengan 3^2. (...) 3^7
Karena $3^2 . 3^5 = {}^{32+5} = 3^7$, maka $3^7 \div 3^2 = 3^5$

Contoh 2.20 di atas menghasilkan sebuah teorema seperti berikut.

Teorema
Misal *a, m,* dan *n* adalah sembarang bilangan cacah dengan *m* dan *n* bukan nol, dan $m > n$, maka $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Bukti:

$a^m \div a^n = k$ jika hanya jika $a^m = k$. an, karena $a^n . a^{m-n} = a^m$ (mengapa?) sehingga $k = a^{m-n}$. jadi, dapat di simpulkan $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

Latihan Soal

1. Manakah dari permasalahan berikut yang kuantitasnya menunjukkan bilangan cacah?
   a. Suhu di belahan kutub utara
   b. Jumlah manusia di bumi
   c. Bagian dari sebuah gelas yang pecah
2. Doni memiliki 12 uang receh. Dia memberikan 4 uang receh yang dimilikinya kepada Dina. Berapa banyak uang receh yang Doni miliki sekarang? Dari permasalahan ini, tulis apa yang diketahui dan tidak diketahui dan jelaskan bagaimana kamu menjawab permasalahan ini.
3. Dani memiliki beberapa pulpen. Ibunya memberikan 3 pulpen kepadanya. Sekarang, Dani memiliki 5 pulpen. Berapakah jumlah pulpen yang dimiliki Dani sebelumnya? Dari permasalahan ini, tulis apa yang diketahui dan tidak diketahui dan jelaskan bagaimana kamu menjawab permasalahan ini.
4. Danang memiliki 12 kelereng yang akan ia bagikan kepada 6 temannya. Berapa kelereng yang diperoleh setiap temannya? Gunakan model untuk mejelaskan prosedur dari pembagian dalam permasalahan ini.
5. Dinar memiliki 20 koin yang jika dibandingkan milik Dimas, milik Dinar 4 kali lebih banyak dari jumlah koin milk Dinar. Berapa jumlah koin milik Dimas? Bagaimana kamu menjelaskan perbandingan ini

BAB IV
KPK & FPB

- A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi
- B. Gambaran Umum Materi
- C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja
- D. Materi

BAB
IV

KPK & FPB

A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Pada bab ini kompetensi yang harus dimiliki mahasiswa adalah menjelaskan perkembangan bilangan dan lambang bilangannya. Kompetensi tersebut terbagi menjadi beberapa indikator sebagai berikut:

- Memahami dan mengajarkan faktor dan kelipatan bilangan.
- Membedakan dan mengklasifikasikan bilangan yang termasuk genap dan ganjil.
- Memahami dan menerapkan beberapa ciri-ciri uji keterbagian bilangan.
- Mengidentifikasi bilangan prima dan komposit serta hubungannya.
- Memahami berbagai metode untuk menentukan faktor prima sekaligus memodelkannya.
- Memahami, menerapkan, dan mengajarkan berbagai strategi dan algoritma untuk menentukan faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil terkecil serta menggunakan model yang cocok untuk merepresentasikannya.

B. Gambaran Umum Materi

Bab ini mengkaji tentang Kelipatan Persekutuan Terkecil dan Faktor Persekutuan Terbesar. Materi ini lebih fokus pada pemahaman untuk menyelesaikan masalah baik menggunakan model maupun algoritma yang terkait dengan bilangan prima, komposit, ganjil, genap, faktor dan kelipatan.

C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja

Pengetahuan tentang kelipatan persekutuan terkecil dan faktor persekutuan terbesar menyajikan konsep tentang teori bilangan yang meliputi faktor dan kelipatan yang merupakan konsep dasar dalam menentukan kelipatan persekutuan terkecil dan faktor persekutuan terbesar. Diharapkan dari penjelasan tentang materi ini, mahasiswa dapat memahami konsep untuk menentukan kelipatan persekutuan terkecil dan faktor persekutuan terbesar serta dapat menerapkannya dalam pembelajaran di Sekolah Dasar.

D. Materi

4.1. Faktor dan Keliptan

Salah satu bentuk penting yang berhubungan dengan teori bilangan yakni faktor dan kelipatan. Faktor merupakan sebuah bilangan yang jika dikalikan dengan bilangan yang lain menghasilkan hasil kalinya (kelipatannya). Sebagai contoh, 2 dan 3 merupakan faktor dari 6, sedangkan 6 adalah kelipatan dari 2 dan 3.

$$2x3=6$$

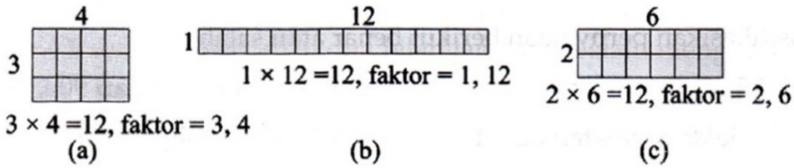
Setiap bilangan cacah lebih dari satu memiliki sedikitnya dua buah faktor, yaitu bilangan itu sendiri dan 1. Setiap bilangan yang hanya memiliki kedua faktor tersebut dikatakan tidak faktor sejati (*proper factors*).

2 = 2 x1	(tidak memiliki faktor sejati)
3 = 3 x 1	(tidak memiliki faktor sejati)
6 = 6 x1 dan 6 = 2 x 3	(memiliki faktor sejati, yakni 2 dan 3)

Definisi: Faktor dan Kelipatan

Jika *a* dan *b* adalah bilangan cacah, maka *a* adalah faktor *b* jika hanya jika terdapat *c* bilangan cacah sedemikian sehingga *ac = b*. Sehingga dapat dikatakan bahwa *a* pernbagi *b*, *a* faktor *b, b* kelipatan *a*, atan *b* habis dibagi

Salah satu model untuk mencari faktor bilangan dapat menggunakan *array* persegi panjang. Misalkan, mencari semua faktor dari 12 dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut (1) Gunakan 12 potongan kertas yang kongruen untuk disusun menurut baris-kolorn. (2) Gambar hasil dari pola baris-kolom dalam kertas berpetak. (3) Tulis berapa jumlah baris dan kolomnya (Gambar 4.1.a). (4) Buat kemungkinan yang lain untuk menyusun 12 potongan kertas berdasarkan baris-kolom (Gambar 4.1.b dan 4.1.c). (5) Gambar kembali ke dalam kertas berpetak. (6) Tulis berapa jumlah baris dan kolomnya.



Gambar 4.1

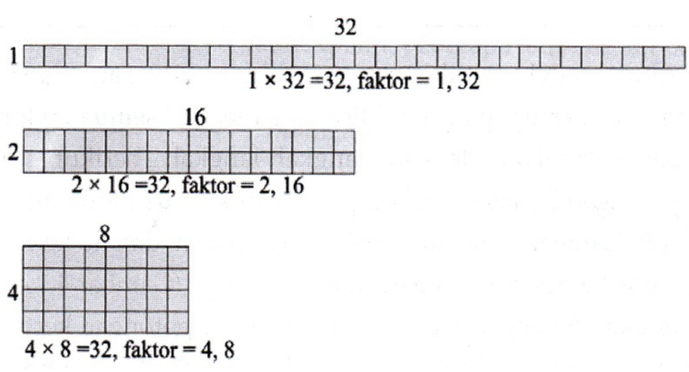
Sehingga, dari kegiatan di atas dapat diperoleh faktor dari 12 yakni 1,3, 4, 6, 12.

> **Catatan:**
> Jika *a* dan *b* adalah bilangan cacah, maka *a* adalah faktor *b* dapat ditulis $a \mid b$. Jika *a* bukan faktor *b* dapat ditulis a + b

Contoh. 4.1

Gunakan model *array* persegi panjang untuk mencari semua faktor dari 32.

Penyelesaian



Jadi, terlihat bahwa semua faktor dari 32 adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Contoh 4.2

Klasifikasikan pernyataan berikut benar atan salah!

a. 6 | 12
b. 12 adalah kelipatan dari 4
c. 7 adalah pembagi dari 15
d. 9 adalah faktor dari 90
e. 93 adalah kelipatan dari 3
f. $2^2 .2^3 . 3 \mid 2^5.6$

Penyelesaian

a. Benar, 6 |12
b. Benar, 12 adalah kelipatan d. 4
c. Salah, 7 bukan pembagi dari 15
d. Benar. 9 adalah faktor dari 90
e. Behar, 93 adalah kelipatan dari 3
f. Benar, $2^2 .2^3 .3 \mid 2^5. 6$

4.2. Bilangan Ganjil dan Genap,

Langkah awal anak ketika menjumpai teori bilangan yakni mengenal dan membedakan bilangan ganjil dan genap. Perbedaan antara bilangan genap dan ganjil merupakan dasar dalam praktek matematika dan praktek sehari-hari, dan memiliki asal-usul matematika dan budaya (Zaskis, 1998). Beberapa orang masih miskonsepsi mengenai bilangan ganjil dan genap, yakni 0 termasuk ganjil atau genap.

Sebuah bilangan cacah dikatakan genap memiliki beberapa ciri - ciri (1) memiliki 2 sebagai faktor; (2) habis dibagi 2., (3) jika $a = 2k$, dengan k adalah bilangan cacah, maka a adalah genap; (4) penjumlahan dua bilangan genap selalu genap; (5) dapat direpresentasikan sebagai penjumlahan dua bilangan cacah; (6) memiliki digit satuan 2, 4, 6, 8, 0. tersebut menunjukkan bahwa 0 termasuk genap (Bennett, dkk, 2012).

Selain penjumlahan dua bilangan genap adalah genap, perkalian yang melibatkan bilangan genap selalu menghasilkan genap. Di sisi lain, perkalian dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan ganjil. Secara umum, dapat ditulis perkalian yang melibatkan ganjil dan genap suatu bilangan ke dalam tabel perkalian berikut.

Tabel 4.1 Perkalian yang Melibatkan Bilangan Ganjil dan Genap

x	Genap	Ganjil
Genap	Genap	Genap
Ganjil	Genap	Ganjil

Contoh 4.3

Sebutkan alasan yang mungkin mengapa 1.234.567 merupakan bilangan ganjil

Penyelesaian

Bilangan tersebut memiliki digit akhir 7 sehingga termasuk bilangan ganjil.

Digit terakhir merepresentasikan bentuk eksplisit dari $2k + 1$.

Contoh 4.4

Sebutkan alasan yang mungkin mengapa 3^{99} merupakan bilangan ganjil.

Penyelesaian

Termasuk bilangan ganjil, karena bilangan ganjil dipangkatkan berapapun sama artinya dengan perkalian bilangan ganjil dengan ganjil sejumlah tertentu yang hasilnya selalu tidak mungkin genap.

4.3. Keterbagian

Beberapa uji sederhana dapat menentukan dengan mudah faktor sebuah bilangan. Sebagai contoh, apakah 38, 70, dan 111 habis dibagi faktor) 2, 5, atau 10. Kalian dapat melihat angka pada digit tem., untuk menentukan apakah suatu bilangan habis dibagi 2, 5, atau 10 tanpa melakukan algoritma pembagian.

Sifat-sifat dari Keterbagian

Buku ini akan menampilkan uji keterbagian oleh 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, dan 10. Sebelum mempelajarinya, terlebih dahulu diperkenalkan sifat-sifat dari uji keterbagian, seperti berikut.

Sifat-Sifat Keterbagian

Dimisalkan a, b, c, dan k sembarang bilangan cacah, dengan $a \neq 0$.

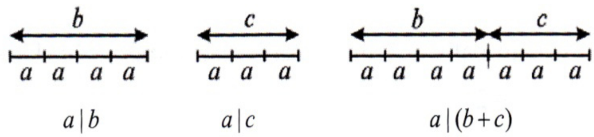
- Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b+c)$, dengan $a \neq 0$.

  Catatan: Sifat ini tidak berlaku jika bilangan tak nol tersebut tidak membagi habis setiap kedua bilangan. Secara simbolis ditulis

  Jika $a \nmid b$ dan $a|c$, maka $a \nmid (b+c)$
- Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b-c)$, dengan $a \neq 0$ dan $b \geq c$.
- Jika $a|b$, maka $a|kb$, dengan $a \neq 0$.

Sifat tersebut dapat diilustrasikan seperti berikut.

- Jika *b* habis dibagi *a* dan *c* habis dibagi *a* , maka *b+c*, habis dibagi *a* .

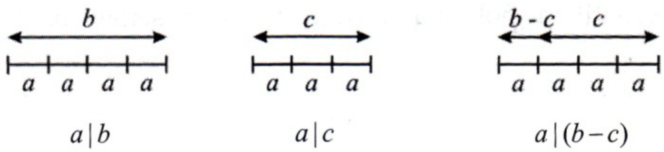


Gambar 4.2

Contoh 4.5 (Aplikasi)

Diberikan beberapa pernyataan berikut 2 |4, 2 | 6, dan 2|10, maka dapat disimpulkan bahwa 2| (4+6) = 2 | 10 .

- Jika *b* habis dibagi *a* dan *c* habis dibagi *a*, dengan $b \geq$ c, maka $b - c$ habis dibagi a.

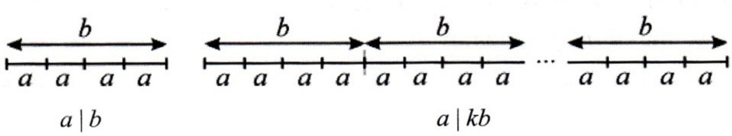


Gambar 4.3

Contoh 4.6 (Aplikasi)

Diberikan beberapa pemyataan berikut 2|4, 2|6, dan 2|10, maka dapat disimpulkan bahwa 2|(10-4) = 2|6 .

- Jika *b* habis dibagi *a* , sembarang kelipatan *b* habis dibagi *a* .



Gambar 4.4

Contoh 4.7 (Aplikasi)

Diberikan pernyataan bahwa 2|10, maka berlaku juga 2|20, karena 20 = *k* x 10 dengan *k* = 2.

Uji Keterbagian

Uji keterbagian bilangan merupakan konsep awal dalain mempelajari teori bilangan dan pecahan. Keterbagian berguna untuk menentukan faktor bilangan dan menguji bilangan merupakan bilangan prima atau bukan. Di sisi lain, keterbagian juga digunakan untuk menyederhanakan sebuah pecahan dan menyamakan penyebutnya.

Uji Keterbagian oleh, 2, 5, dan 10 Uji keterbagian oleh 2, 5, dan 10 memiliki kesamaan yakni sama-sama didasarkan pada digit terakhirnya. Perhatikan pola pada digit terakhir .perhatikan pola pada digit terakhir setiap bilangan berikut.

Bilangan habis dibagi 2 adalah 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...
Bilangan habis dibagi 5 adalah 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...
Bilangan habis dibagi 10 adalah 0, 10, 20, 30, 40, 50, ...

Uji Keterbagian oleh 2, 5, clan 10.

- Sebuah bilangan habis dibagi 2, jika hanya jika angka satuannya adalah 0, 2, 4, 6, da. 8.
- Sebuah blaangan habis dibagi 5, jika hanya jika angka satuannya adalah 0 dan 5
- Sebuah bilangan habis dibagi 10 jika hanya jika angka satuannya adalah 0

Contoh 4.8

Klasifikasikan pernyataan berikut benar atau salah.

a. 2 |13.232.776	d. 5|12.345
b. 10|0	e. 2 | 23.781
c. 5|323.259.130	f. 2|2.300.788

Penyelesaian

a. Benar, karena 2| 6	d. Benar, karena 5|5
b. Benar, karena 10 x 0	e. Salah, karena 2|1
c. Benar, karena 5 | 0	f. Benar, karena 2|8

Contoh 4.9

Buktikan bahwa 2.123 tidak habis dibagi 5!

Penyelesaian

$$2.123 = \underbrace{(2 \times 10^3) + (1 \times 10^2) + (2 \times 10)}_{\text{Habis dibagi lima}} + \underbrace{3}_{\text{Tidak habis dibagi lima}}$$

Berdasarkan sifat keterbagian bahwa $5 | 10^3$, maka $5\ |2 \times 10^3$. Kasus yang sama berlaku pada 1×10^2 dan 2×10 yang juga habis dibagi 5. Namun, terdapat 3 yang tidak dapat habis dibagi 5 sehingga terbukti bahwa $5\ |\ \ 2.123$.

Contoh 4.10

Isilah titik-titik dalarn dua. angka yang belun, diketahui berikut sehingga bilangan tersebut habis dibagi dengan 2 tetapi tidak habis dibagi 5 dan 10. Tempat satu angka untuk setiap tempat yang belum diketahui!

7 6 5. 4_ _

Penyelesaian

Digit terakhir adalah 2, 4, 6, atau 8, sedangkan digit yang lain dapat menggunakan sembarang angka.

Uji Keterbagian oleh 3 dan 9 Uji keterbagian oleh 3 dan 9 memiliki kesamaan yakni sama - sama didasarkan pada jumlah digit di setiap nilai tempatnya. Sebagai catatan bahwa setiap bilangan yang habis dibagi 9 pasti habis dibagi 3, namun belum tentu sebaliknya.

Uji Keterbagian oleh 3 dan 9
• Sebuah bilangan habis dibagi 3 jika hanya jika jumlah angka pada masing-masing nilai tempatnya habis dibagi 3.
• Sebuah bilangan habis dibagi 9 jika hanya jika jika junilah angka pada masing-masing nilai tempatnya habis dibagi 9.

Keterbagian oleh 3 dan 9 dapat direpresentasikan dengan model basis sepuluh. Sebagai contoh, 435 dapat digambarkan dengan model pada Gambar 4.5.

Jika 1 satuan pada masing-rnasing unit persegi dipisahkan, maka akan diperoleh sisa 99 unit satuan yang masing-masing dapat dikelompokkan ke dalam 3 kelompok. Demikian pula, 1 unit satuan pada masing-masing unit memanjang dipisahkan, diperoleh sisa 9 unit satuan yang masing-masing dapat dikelompokkan ke dalam 3 kelompok. Pertanyaan yang dapat dimunculkan adalah apakah 3 membagi habis 435? 3 dapat membagi habis 435 jika hanya jika 3 membagi habis unit satuan yang tersisa, yakni 4 untuk bagian persegi, 3 untuk bagian memanjang, dan 5 untuk unit satuan. Sehingga, total unit satuan yang tersisa adalah 4 + 3 + 5 = 12, karena 3|12, maka 3|435. Namun, 9|12, sedemikian sehingga 9 | 435.

Contoh 4.11

Klasifikasikan pernyataan berikut benar atau salah

a. 3 |12.345 c. 9 |6.543

b. 9 |12.345 d. 3 |567

Penyelesaian

a. Benar, karena 1 + 2 + 3 + 4 + 5 =15, dengan 3|15.
b. Salah, karena 9 |15.
c. Benar, karena 6 + 5 + 4 + 3 = 18, dengan 3| 18.
d. Benar, karena 5 + 6 + 7 =18, dengan 3|18.

Contoh 4.12

Isilah titik-titik dalain dua angka yang belum diketahui berikut sehingga bilangan tersebut habis dibagi dengan 3 dan 9. Tempat satu angka untuk setiap tempat yang belum diketahui!

1 2.7 6 5.5_ _

a. Bagaimana kalian akan mengetahui jawaban anda betul!
b. Susunlah rencana yang akan kalian gunakan!
c. Selesaikan permasalahan di atas sesuai rencanamu!
d. Apakah kamu memiliki semua jawaban yang memungkinkan? Jelaskan!

Penyelesaian

Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan!

Uji Keterbagian oleh 4 dan 8 Uji keterbagian 4 dan 8 berhubungan erat dengan uji keterbagian dengan 2, karena merupakan kelipatannya. Jika sebelumnya uji keterbagian. 2 dapat dilakukan dengan melihat digit terakhirnya, uji keterbagian oleh 4 dengan melihat dua digit terakhirnya, dan uji keterbagian terakhirnya. Hal ini didasarkan bahwa keterbagian dengan 4 terdiri dari dua digit, $2^2 = 4$ dan 8 terdiri dari 3 digit, $2^3 = 8$.

Uji Keterbagian oleh 4 dan 8

- Sebuah bilangan habis dibagi 4 jika hanya jika dua digit terakhimya habis dibagi 4.
- Sebhah bilangan habis dibagi 8 jika hanya jika tiga digit terakhimya habis dibagi 8.

Contoh 4.13

Klasifikasikan pernyataan berikut benar atau salah.

a. 4|1.432 c. 8|4.204
b. 4|2.345.678 d. 8|98.765.432

Penyelesaian

a. Benar, karena 4 |132.
b. Salah, karena 4 |78.
c. Salah, karena 8|204.
d. Benar, karena 8 |432.

Contoh. 4.14

Benar atau salah? Jika bilangan habis dibagi dengan 2 dan 4, inaka akan habis dibagi dengan 8? Berikan beberapa contoh pendukung jika pernyataan ini benar dan berikan contoh penyangkal jika pernyataan ini salah.

Penyelesaian

Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan!

Uji Keterbagian oleh 6 Uji keterbagian oleh 6 dapat dilakukan jika hanya jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan 3. Hal ini dapat dilihat dari pola bilangan kelipatan 6 berikut 6, 12, 18, 24, 30,...

Terlihat bahwa semua bilangan tersebut memiliki faktor sejati (*proper factors*) yakni 2 dan 3.

Uji Keterbagian oleh 6
Sebuah bilangan habis dibagi 6 jika hanya jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan habis dibagi 3.

Contoh 4.15
Klasifikasikan pernyataan berikut benar atau salah!
6|2.114.970

Penyelesaian
Di satu sisi 3|2 + 1 +1+ 4 + 9 7 + 0 = 3|24,maka 6|2.114.970.

Contoh 4.16

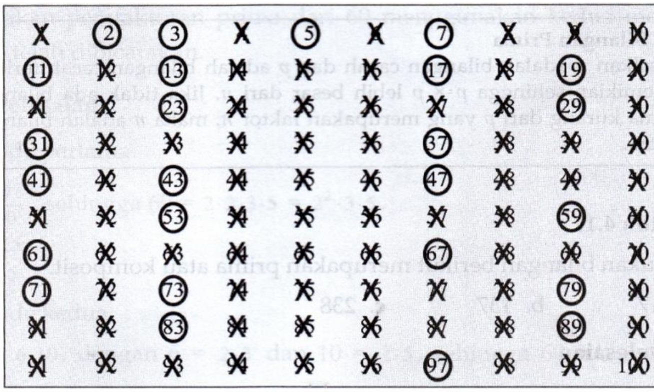
Bilangan habis dibagi 6 jika hanya jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan 3. Apakah hal ini juga menunjukkan bahwa bilangan habis dibagi 10 jika hanya jika habis dibagi 2 dan 5? Selidiki dengan inenggunakan beberapa contoh! Jika tidak demikian, beri satu contoh penyangkalnya.

Penyelesaian
Ya!
Misal, 30 habis dibagi 10 juga habis dibagi 2 dan 5.
Berikut bilangan kelipatan 2 dan 5 serta 10 yang selalu persekutuan ketika digit terakhir adalah 0.
0, 2, ... , **10**, ... , **20**, ... , **30**, ... , **40**, ... , **50**, ...
0, 5, **10**, 15, **20**, 25, **30**, 35, **40**, 45, **50**, ...
0, **10**, **20**, **30**, **40**, **50**, ...

4.4. Bilangan Prima dan Komposit

Di depan telah diulas bahwa setiap bilangan cacah lebih dari 1 memiliki sedikitnya 2 faktor. Jika bilangan cacah lebih dari 1 tersebut memiliki tepat 2 faktor yang berbeda, maka disebut **bilangan prima.** Sedangkan, bilangan cacah lebih dari 1 memiliki lebih dari 2 faktor disebut dengan **bilangan komposit**. Sebagai contoh, 2, 3, dan 5 merupakan bilangan prima dan 4, 6, 8, 9, 10 adalah bilangan komposit. Sedangkan, 1 bukan prima maupun komposit karena 1 hanya memiliki satu faktor yakni "1" itu sendiri.

Salah satu metode yang dapat menentukan sebuah bilangan cacah merupakan bilangan prima adalah dengan menggunakan metode *Sieve of Eratosthenes.* Sebagai contoh, untuk menentukan bilangan cacah sampai 100 dapat dimulai dengan mencoret 1, karena bukan prima, kemudian melingkari 2 dan mencoret kelipatannya (4, 6, 8, 10, ...). Selanjutnya, melingkari 3 dan mencoret kelipatannya (6, 9, 12, 15, ...). Kemudian, melingkari 5 dan 7 serta mencoret kelipatannya.



Gambar 4.6

Di samping metode di atas, untuk menentukan bilangan yang besar merupakan prima atau bukan dengan menyelidiki apakah bilangan tersebut memiliki sembarang faktor selain 1 dan dirinya sendiri, yakni dengan membaginya dengan bilangan prima (2, 3, 5, 7, ...) dan tidak perlu membaginya dengan bilangan komposit (4, 6, 8, 9, ...). Sebagai cont., jika 4 pembagi sebuah bilangan, tentunya 2 juga pembagi dari bilangan tersebut. Dengan kata lain, jika 2 tidak membagi habis suatu bilangan, maka 4 tidak membagi habis bilangan tersebut. Begitupun bilangan komposit lainnya tidak perlu dilakukan pembagian.

Selanjutnya, untuk menentukan apakah bilangan 367 adalah prima atau tidak, dapat dilakukan seperti berikut. Pertama, menguji 367 habis dibagi dengan 2, 3, 5, dan 7. Apabila pengujian yang anda lakukan teliti, 367 tidak habis dibagi dengan 2, 3, 5 dan 7 (buktikan!). Kedua, melakukan *trial and error* (coba-coba) dengan mengambil nilai 21 x 21 = 441 yang lebih dari 367. Jadi, faktor prima yang masih memungkinkan adalah 11, 13, 17, elan 19. Namun, karena tidak terdapat faktor prima yang memenuhi, maka 367 adalah bilangan prima.

Uji Bilangan Prima

Misalkan *n* adalah bilangan cacah dan *p* adalah bilangan cacah terkecil sedemikian sehingga *p x p* lebih besar dari *n*. Jika tidak ada bilangan prima kurang dari *p* yang merupakan factor *n*, maka *n* adalah bilangan prima.

Contoh. 4.17

Tentukan bilangan berikut inerupakan prima atau komposit.

a. 117 b. 137 c. 238

Penyelesaian

a. Karena 11 x 11 > 117, maka faktor prima yang mungkin adalah 2, 3, 5, dan 7. Terdapat 3 inerupakan faktor dari 117, sehingga 117 adalah komposit.

b. Karen. 13 x 13 137, maka faktor prima yang mungkin adalah 2, 3, 5, 7 dan 11. Tidak terdapat faktor prima yang memenuhi, maka 137 adalah bilangan prima.

c. Diserahkan pembaca sebagai latihan!

4.5. Pemfaktoran Prima

Terdapat dua metode untuk menentukan semua faktor prima dari sebuah bilangan. Metode pertama adalah dengan melakukan pembagian berulang prima yang dimulai dengan bilangan prima terkecil ke yang terbesar: 2, 3, 5, dan diteruskan sampai bilangan yang dibagi menjadi faktor prima itu sendiri. Metode kedua adalah melakukan pemfaktoran bilangan ke dalam sebarang dua faktor yang memenuhi dan kemudian memfaktorkan faktor-faktor tersebut. Dalam mencari faktor pada metode kedua didasarkan pada perhitungan mental yang memungkinkan anak untuk mengaplikasikan daya ingatnya.

Contoh 4.18

Tentukan pemfaktoran prima dari 60 menggunakan kedua metode yang telah dibicarakan.

Penyelesaian

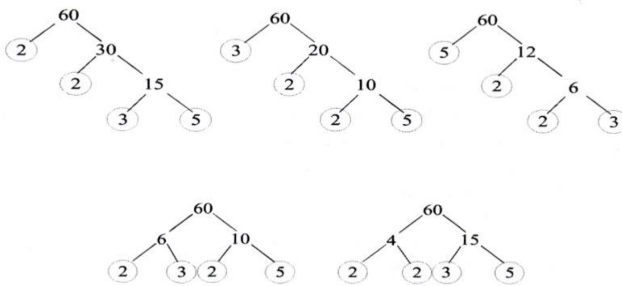
Metode pertama

$$\begin{array}{r|l} 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}, \text{ sehingga } 60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 2^2\cdot 3\cdot 5.$$

Metode kedua

60 = 6.10, dengan 6 = 2.3 dan 10 = 2.5, sehingga 60 = 2.3.2.5 = 2^2.3.5.

Kedua metode pada jawaban soal di atas dapat dirangkmn dan dituangkan ke dalam gambar yang dikenal dengan pohon faktor, seperti berikut.



$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Gambar 4.7

Anak dapat diperkenalkan dengan *blok prima berpola* untuk mencari faktor prima (Burkhart, 2009). Blok prima berpola merepresentasikan strategi perkalian mental. Berikut ditampilkan faktor prima dari 1 sampai 50 dengan setiap model disusun dengan aturan setiap prima yang lebih besar ditempatkan di atas prima yang lebih kecil (Burkhart, 2009).

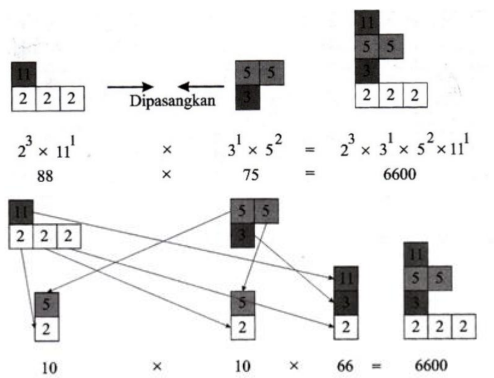
1	2 2^1	3 3^1	4 2^2	5 5^1	6 $2^1 \times 3^1$	7 7^1	8 2^3	9 3^2	10 $2^1 \times 5^1$
11 11^1	12 $2^2 \times 3^1$	13 13^1	14 $2^1 \times 7^1$	15 $3^1 \times 5^1$	16 2^4	17 17^1	18 $2^1 \times 3^2$	19 19^1	20 $2^2 \times 5^1$
21 $3^1 \times 7^1$	22 $2^1 \times 11^1$	23 23^1	24 $2^3 \times 3^1$	25 5^2	26 $2^1 \times 13^1$	27 3^3	28 $2^2 \times 7^1$	29 29^1	30 $2^1 \times 3^1 \times 5^1$
31 31^1	32 2^5	33 $3^1 \times 11^1$	34 $2^1 \times 17^1$	35 $5^1 \times 7^1$	36 $2^2 \times 3^2$	37 37^1	38 $2^1 \times 19^1$	39 $3^1 \times 13^1$	40 $2^3 \times 5^1$
41 41^1	42 $2^1 \times 3^1 \times 7^1$	43 43^1	44 $2^2 \times 11^1$	45 $3^2 \times 5^1$	46 $2^1 \times 23^1$	47 47^1	48 $2^4 \times 3^1$	49 7^2	50 $2^1 \times 5^2$

Perhatikan bahwa setiap bilangan komposit dapat diperoleh dari hasil kali bilangan prima. Fakta ini dikenal dengan teorema fundamental aritmatik.

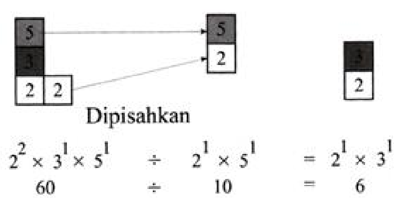
Teorema Fundamental Aritmatik(Fundamental Theorem of Arithmetic)
Setiap bilangan komposit dapat dijabarkan sebagai hasil kali sem,a pembaginya yang prima. Misalnya, 60 = 2.2.3.5 atati 2^2.3.5.

Gambar 4.8

Teorema di atas menyatakan setiap bilangan komposit dapat dijabarkan sebagai hasil kali semua pembaginya yang prima. Hal ini berimplikasi pada perkalian dan pembagian dua atau lebih bilangan komposit selalu dapat dijabarkan dalam operasi masing-masing pembaginya yang prima. Sebagai contoh., 88 X 75 dan 60 ÷ 10 dapat dijabarkan dengan hasil kali pembaginya yang prima (Lihat Gambar 4.9 & 4.10) (Burkhart, 2009)



Gambar 4.9



Gambar 4.9

4.6. Faktor Persekutuan Terbesar

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua atau lebih bilangan cacah bukan nol adalah bilangan cacah terbesar sebagai faktor dari kedua atau lebih bilangan tersebut. FPB dari *a* dan *b* dapat dinotasikan FPB *(a, b).*

Menentukan FPB dapat dilakukan dalam beberapa metode, diantaranya dengan (1) irisan himpunan, (2) faktorisasi prima, (3) algoritma pengurangan, dan (4) algoritma Euclid. Namun, secara umum, di tingkat Sekolah Dasar memakai dua cara yang pertama.

Irisan himpunan

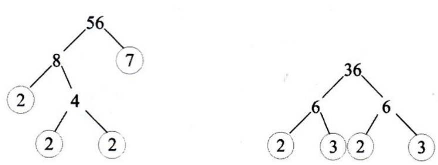
Langkah-langkah dalarn metode irisan himpunan adalah membuat daftar semua faktor berturut-turut untuk setiap bilangan dan cari faktor terbesar yang sama. Sebagai contoh, menentukan FPB dari 56 dan 36 yakni dengan mendaftar semua faktornya seperti berikut.

Faktor dan 56: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56
Faktor dari 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

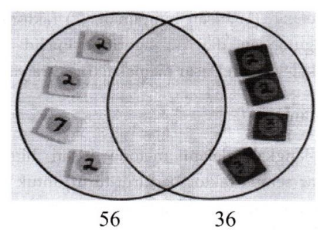
Dari dua bilangan di atas faktor persekutuannya adalah 1, 2, 4 dan yang terbesar yaitu 4. Sehingga, FPB (56, 36) = 4.

Faktorisasi Prima

Metode ini dilakukan dengan menulis bilangan-bilangan tersebut sebagai perkalian bilangan prima, dan hasil perkalian bilangan prima yang merupakan faktor persekutuan kedua bilangan tersebut adalah FPB-nya. Sebagai contoh, faktorisasi prima dari 56 dan 36 dapat dimodelkan oleh pohon faktor dan diagram venn berikut (Kurz & Garcia, 2012).



Gambar 4.11



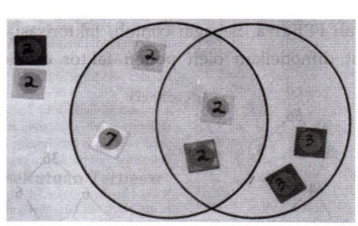
Gambar 4.12

Pohon faktor dan diagram venn. di atas inenunjukkan bahwa 56 = 2 x 2 x 2 x 7 dan 36 = 2 x 3 x 2 x 3. Perkalian faktor prima bilangan tersebut dapat dalam bentuk pangkat seperti berikut.

56 = 2^3 x 7 = 2^2 x 2 x 7

36 = 2^2 x 3^2

Perhatikan bahwa faktor persekutuan terbesar dari 56 dan 36 yakni 2^2. Hal ini dapat ditunjukkan oleh irisan dua himpunan dalam diagram venn berikut.



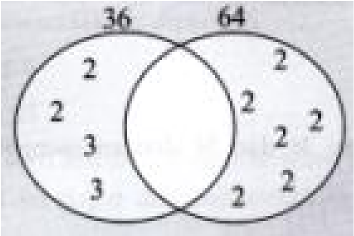
Gambar 4.13

Contoh. 4.19

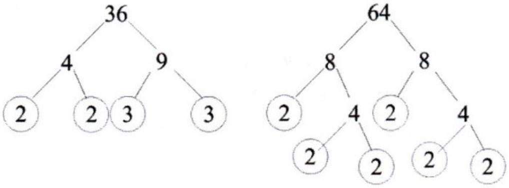
Tentukan FPB (36, 64) dengan irisan himpunan dan faktorisasi prima.

Penyelesaian

- Dengan irisan himpunan Faktor dari 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
  Faktor dari 64: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
  Faktor persekutuan dari kedua bilangan tersebut adalah 1, 2, dan 4. Sehingga faktor persekutuan terbesarnya adalah 4.



- Dengan faktorisasi prima 36

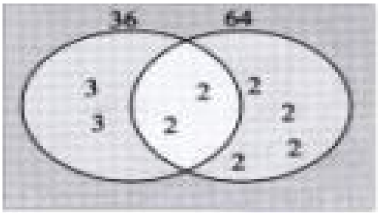


Pohon faktor dan diagram di atas juga dapat ditulis dalam bentuk pangkat seperti berikut.

$36 = 2^2 \times 3^2$

$64 = 2^6 = 2^2 \times 2^4$

Terlihat 2^2 sebagai faktor persekutuan terbesar dari pasangan 36 dan 64. Sehingga, FPB (36, 64) = $2^2 = 4$. Hal ini dapat ditunjukkan oleh irisan dua himpunan dalam diagram ven. berikut.



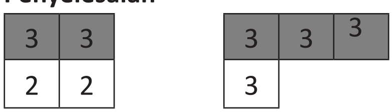
Beberapa contoh menentukan FPB dengan pemfaktoran prima di atas selalu memilih bilangan yang sama dengan pangkat yang terkecil.

Model *blok prima berpola* juga dapat digunakan sebagai alat yang sangat efektif untuk menemukan dan menggambarkan hubungan matematis yang melekat dalam Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) (Burkhart, 2009). FPB direpresentasikan sebagai koleksi terbesar blok yang terkandung dalam kedua blok aslinya.

Contoh 4.20

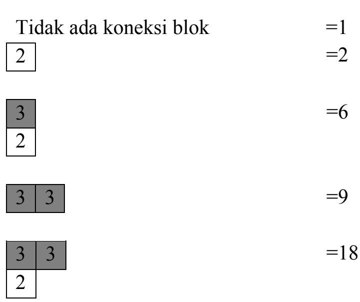
Tentukan FPB dari 36 dan 54 dengan menggunakan model blok berpola

Penyelesaian



36 54

Faktor persekutuan dari 36 dan 54 adalah koleksi blok yang terkandung dalam kedua blok di atas.



Koleksi di atas yang mengandung sebagian besar blok merupakan FPB (36, 54) yakni 18.

Contoh 4.21

Tentukan FPB(8, 25)

Penyelesaian

Dengan mendaftar semua faktor, diperoleh

Faktor dari 8 = 1, 2, 4, 8

Faktor dari 25 = 1, 5, 25

Faktor persekutuan dari kedua bilangan tersebut dan yang terbesar yaitu adalah 1. Hal ini dapat diyisualisasikan dengan model blok prima berpola berikut.

2	2	2

2^3

5	5

5^2

Tidak ada koleksi blok = 1
Sehingga faktor persekutuan terbesarnya adalah 1.

Terdapat kejadian bahwa sebuah bilangan hitung tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, maka bilangan tersebut disebut relatif prima. Jika pembilang dan penyebut pada pecahan merupakan pasangan yang relatif prima, maka pecahan tersebut mempakan pecahan dalam bentuk yang paling sederhana. Sebagai contoh, 8/25 mempakan bentuk pecahan paling sederhana disebabkan 8 dan 25 mempakan relatif prima (lihat contoh di atas!).

Contoh 4.22

Manakah pasangan bilangan berikut yang relatif prima?

a. 3 dan 5 b. 31 dan 120 c. 9 dan 132

Penyelesaian

a. 3 dan 5 adalah relatif prima karena FPB(3, 5) = 1
b. 31 dan 120 adalah relatif prima karena FPB(31, 120) = 1
c. 9 dan 132 bukan relatif prima karena FPB(9, 132) = 3

Contoh 4.23

Jika *a* dan *b* adalah dua bilangan prima berbeda, apakah *a* dan *b* relatif prima? Cobalah beberapa contoh dan perkirakan jawab Anda!

Penyelesaian

a dan *b* pasti relatif prima. Sebagai contoh, 7 dan 11 mempakan pasangan prima yang relatif prima, hal ini dikarenakan setiap bilangan prima hanya memiliki 2 faktor, yakni 1 dan bilangan itti sendiri. Hal ini berakibat setiap pasangan bilangan prima yang berbeda tidak memiliki faktor persekutuan selain 1.

Semua bilangan hitung kurang dari bilangan prima *p* adalah relatif prima terhadap *p*. Misalkan, setiap bilangan 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 adalah relatif prima terhadap bilangan prima 7. Sebagai contoh, ambil 2 dan 7; 3 dan 7; atan 6 dan 7, maka pasangan tersebut pastilah relatif prima.

Algoritma Pengurangan

Perhatikan sifat keterbagian yang telah diulas sebelumnya, yakni jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b - c)$, dengan a ≠ 0 dan b ≥ c. Hal ini dapat diartikan bahwa sembarang bilangan yang membagi habis dua bilangan tertentu, maka bilangan tersebut membagi habis selisih dua bilangan itu. Sejalan dengan itu, jika *k* merupakan faktor persekutuan dari *a* dan *b*, dengan a ≥ b maka *k* merupakan faktor persekutuan dari *a - b* dan b. Karena setiap faktor persekutuan dari *a* dan *b* juga faktor persekutuan dari (*a - b*) dan b, maka pasangan (*a, b*) dan (*a - b, b*) memiliki faktor persekutuan yang sama. Jadi, dapat disimpulkan FPB (a, b) = FPB(a - b, b).

Teorema
Jika *a* dan *b* adalah sembarang bilangan cacah dengan *a* ≥ *b*, maka FPB(*a* ,*b*) = FPB(*a* - *b*, *b*).

Contoh 4.24

Tentukan FPB dari setiap pasangan bilangan yang diketahui berikut.

a. 8 dan 16 b. 390 dart 546 c. 1173 dan 374

Penyelesaian

a. FPB (16, 8) = FPB (16 - 8, 8) = FPB (8, 8) = 8, Jadi, FPB (16, 8) = 8.

b. FPB(546, 390) = FPB(546 - 390, 390)
= FPB(156, 390)
= FPB(156, 390 -156) = FPB(156, 234)
= FPB(156, 78)
= FPB(78, 78)
= 78

Jadi, FPB (546, 390) = 78.

c. FPB(1173, 374) = FPB(1173 - 374, 374)
= FPB(799, 374)
= FPB(799 - 374, 374)
= FPB(425, 374)
= FPB(51, 374)
= FPB(51, 374 - 51)
= FPB(51, 323)
= FPB(51, 272)
= FPB(51, 221)
= FPB(51, 170)

= FPB(51, 119)
= FPB(51, 68)
= FPB(51, 17)
= FPB(34, 17)
= FPB(17, 17)
=17

Jadi, FPB(1173, 374)= 17.

Algoritma Pembagian (Algoritma Euclid)

Algoritina pembagian merupakan pengembangan dari algoritma pengmangan karena sejatinya pembagian dapat dipandang sebagai pengurangan berulang. Seperti contoh 4.24c dapat dilakukan dengan langsung membagi 1173 dengan 374 sehingga diperoleh sisa bagi yakni 51, sehingga bentuk FPB(1173, 374) langsung dapat diubah ke dalam FPB(374, 51), bentuk dapat juga disederhanakan dengan membagi 374 dengan 51 dimana diperoleh sisa bagi 17. Sehingga, bentuk FPB(374, 51) menjadi FPB(51, 17), karena 17 mempakan FPB dari 51 dan 17, mak. FPB(1173, 374) = 17. Secara ringkas, uraian di atas dapat dirangkum seperti berikut.

$$\text{FPB}(1173, 374) \rightarrow \begin{array}{r} 3 \\ 374\overline{)1173} \\ \underline{1122} \\ 51 \end{array}$$

$$\text{FPB}(374, 51) \rightarrow \begin{array}{r} 7 \\ 51\overline{)374} \\ \underline{357} \\ 17 \end{array}$$

$$\text{FPB}(51, 17) \rightarrow \begin{array}{r} 3 \\ 17\overline{)51} \\ \underline{51} \\ 0 \end{array}$$

a	*b*	*c*
1173	374	51
374	51	17
51	17	0

Jadi, FPB(51, 17) =17, maka FPB(1173, 374) =17.

Teorema

Jika a dan b adalah sembarang bilangan cacah dengan $a \geq b$ dan terdapat c bilangan cacah (hasil pernbagian) sehingga

$$a = bc + s, \text{ dengan } s < b, \text{ maka. } \mathrm{FPB}(a, b) = \mathrm{FPB}(b,s)$$

Keterangan

a bilangan yang dibagi, b bilangan pembagi, c hasil bagi, dan s adalah sisa.

Contoh. 4.25

Tentuka. FPB dari pasangan bilangan berikut dengan algoritma Euclid.

a. 1071 dan 1029

b. 589 dan 494

Penyelesaian

a.

$$\mathrm{FPB}(1071, 1029) \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 1029\overline{)1071} \\ \underline{1029} \\ 42 \end{array}$$

$$\mathrm{FPB}(1029, 42) \rightarrow \begin{array}{r} 24 \\ 42\overline{)1029} \\ \underline{84} \\ 189 \\ \underline{168} \\ 21 \end{array}$$

$$\mathrm{FPB}(42, 21) \rightarrow \begin{array}{r} 2 \\ 21\overline{)42} \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

a	*b*	*c*
1071	1029	42
1029	42	21
42	21	0

Jadi FPB (1071,1029) = 21

b.

a	b	c
589	494	95
494	95	19
95	19	0

Jadi, FPB (589, 494) =19

4.7. Kelipatan Persekutuan Terkecil

Bilangan cacah positif *m* adalah kelipatan persekutuan terkecil (disingkat KPK) dua bilangan cacah positif *p* dan *q* jika dan hanya jika *m* adalah bilangan cacah positif terkecil yang dapat dibagi oleh *p* dan *q*. Notasi KPK dari *p* dan *q* dapat ditulis sebagai KPK(*p, q*). Dari definisi ini, jelas bahwa kelipatan persektituan terkecil dua bilangan cacah adalah bilangan cacah positif yang habis dibagi kedua bilangan tersebut.

Cara menentukan KPK dapat dilaktikan dalam beberapa langkah, diantaranya dengan (1) irisan himpunan, (2) membuat kelipatan dan pembagi, dan (3) pemfaktoran prima (Brown dkk, 2002). Di samping dalam bab ini diperkenalkan metode menentukan KPK dengan menggunakan rumus.

Irisan Himpunan

Mencari KPK dengan metode irisan himpunan yakni dengan mendaftar semua kelipatan dari masing-masing bilangan dan menemukan kelipatan pertama yang sama. Misalkan, diminta menentukan KPK dari 10 dan 12 dapat dilakukan seperti berikut.

Kelipatan dari 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,…

Kelipatan dari 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96,….

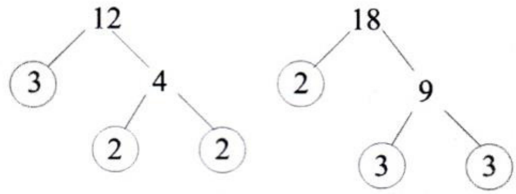
Terlihat bahwa terdapat kelipatan persekutuan yang terkecil, yakni 60. Jadi, KPK (10, 12) = 60.

Faktorisasi Prima

Contoh menggunakan faktorisasi prima, misal jika diminta menentukan KPK dari 12 dab 18 dapat diselesaikan seperti berikut.

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$



Gambar 4.14

Kelipatan persekutuan dari 2^2 dan 2 adalah 2^2, sedangkan kelipatan persekutuan 3 dan 3^2 adalah 3^2 , maka KPK(12, 18) = $2^2 \times 3^2 = 36$.

Contoh. 4.26

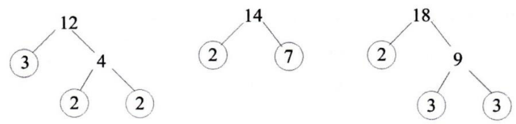
Tentukan KPK dari 12, 14, dan 18!

Penyelesaian

$12 = 2^2 \times 3$

$14 = 2 \times 7$

$18 = 2 \times 3^2$



Kelipatan persekutuan dari 2^2, 2 dan 2 adalah 2^2, sedangkan kelipatan persekutuan 3 dan 3^2 adalah 3^2. Adapun kelipatan persekutuan dari ketiga bilangan tersebut haruslah memiliki faktor 7, sehingga KPK(12, 14, 18) = $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$.

***Catatan**:* Dalam menentukan KPK dengan pemfaktoran prima, yakni mengalikan bilangan persekutuan dengan pangkat terbesar dan bilangan yang berdiri sendiri (jika ada).

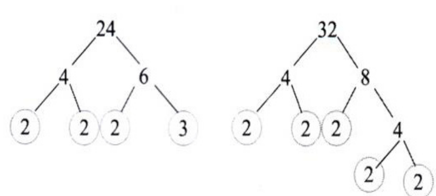
Seperti halnya mencari FPB dengan menggunakan model blok *prima borpola*, dalam mencari KPK juga dapat menggunakan model tersebut. Perbedaannya, jika menentukan FPB dengan mencari koleksi blok terbesar yang terkandung dalam kedua blok aslinya, sedangkan menentukan KPK dengan mencari kelipatan dengan setiap kelipatan dari angka akan berisi kedua blok aslinya. Dengan demikian, kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan akan diwakili oleh kumpulan blok terkecil yang berisi kedua blok aslinya.

Menggunakan Rumus

Di depan, telah dibahas mencari KPK dengan peinfaktoran prima. Sebagai contoh, menentukan KPK(24, 32) seperti berikat.

$24= 2^3 x 3$

$32 = 2^5$



Gambar 4.15

Sehingga, KPK (24,32) = $2^3 \times 3 = \dfrac{24 \times 32}{FPB\ (24{,}32)} = \dfrac{(2^3 \times 3)2^3}{2^3}$

Hal ini menunjukkan sebuah teorema sebagai berikut.

Teorema
Jika *a* dam sembarang bilangan cacah, maka
KPK (*a*,*b*) = $\frac{a x b}{FPB\ (a.b)}$,atau KPK (*a*,*b*) x FPB (*a*,*b*) = *a* x *b*

Contoh 4.27

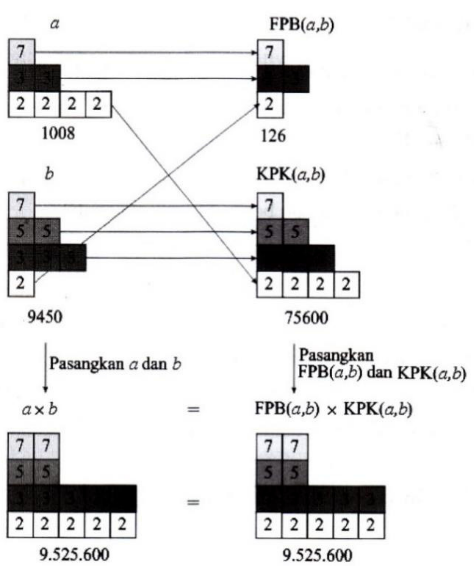
Tentukan KPK(42, 96)!

Penyelesaian

KPK (42,96)= 672 = $\frac{42\ X\ 96}{6}$ = $\frac{42\ X\ 96}{FPB\ (42{,}96)}$.

Teorema di atas dapat ditunjukkan dengan menggunakan blok prima berpola. Secara khusus, untuk setiap warna bilangan yang lebih kecil dari blok a dan b niernbentuk FPB dan bilangan yang lebih besar membentuk KPK, seperti dalam contoh yang ditainpilkan untuk menentukan FPB dan KPK dari 1008 dan 9450 berikut (Burkhart, 2009).

Situasi tertentu untiik KPK tiga atan lebih bilangan cacah positif dapat dicari dengan terlebih dalmin mencari KPK dari sepasang demi sepasang.



Gambar 4.16

Contoh., 4.28
Carilah KPK dari 42, 96, 104, 18.

Penyelesaian
KPK (42, 96) = 672, dan
KPK (104, 18) = 936, sehingga
KPK (42, 96, 104, 18) = KPK (672, 936) = 26.208.

Latihan Soal

1. Dengan menggunakan definisi faktor, jelaskan mengapa 9 bukan faktor dari 21!
2. Bilangan 15 memiliki tepat empat pembagi. Dapatkah anda membuat daftar semua pembaginya? Dapatkan anda memikirkan beberapa angka lain yang memiliki tepat empat pembagi?
3. Tentukan FPB dan KPK dari *wxyz* dan *xyz.*
4. Doni mempunyai 12 apel dan 8 jeruk. Ia ingin membagi buah-buahan tersebut ke dalam beberapa kantong plastic sedemikian hingga isi tiap kantong plastic tersebut sama (banyaknya apel di tiap kantong sama, demikian juga banyak jeruk di tiap kantong sama). Berapakah banyaknya kantong plastik terbanyak yang diperlukan oleh Doni? Berapakah banyaknya apel dan jeruk di masing-masing kantong?
5. Tiga bus kota dengan jurusan yang berbeda meninggalkan terminal yang sama, dan akan kembali ke terminal tersebut setiap 60 menit, 80 menit dan 120 menit. Jika ketiga bus tersebut meninggalkan terminal secara bersamaan pada pukul 05.30 pagi, pukul berapa ketiga bus akan bertemu di terminal yang sama tersebut?

BAB V
BILANGAN BULAT

- A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi
- B. Gambaran Umum Materi
- C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja
- D. Materi

BAB
V

BILANGAN BULAT

A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Pada bab ini kompetensi yang harus dimiliki mahasiswa adalah menjelaskan perkembangan bilangan dan lambang bilangannya. Kompetensi tersebut terbagi menjadi beberapa indikator sebagai berikut:

- Mengenal dan membelajarkan sejarah bilangan negatif dan bilangan bulat.
- Memahami konsep dan karakteristik masing-inasing operasi bilangan bulat.
- Membelajarkan operasi bilangan bulat dengan model atau alat peraga yang sesuai.
- Memahami konsep dan sifat urutan bilangan cacah.
- Mengenal dan memahami bilangan dengan pangkat negatif dan bilangan negatif yang dipangkatkan.

B. Gambaran Umum Materi

Bab ini mengkaji tentang bilangan bulat yakni mengenal bilangan bulat, memodelkan operasi bilangan bulat, mengklasifikasikan sifat-sifatnya dan memahami pangkat negatif. Permasalahan pada operasi bilangan bulat dapat mudah ditanamkan pada anak jika menggunakan model. Secara garis besar, operasi bilangan bulat pada materi ini menampilkan dua model yang umum digunakan yaitu model keping dan model garis bilangan.

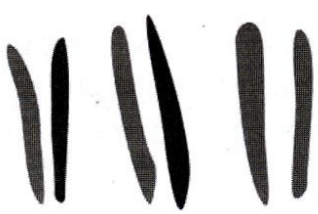
C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja

Pengetahuan tentang konsep bilangan bulat menyajikan konsep tentang bilangan positif dan bilangan negative serta operasi hitung bilangan bulat. Melalui penggunaan model yaitu model keping dan model garis bilangan, diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep operasi hitung bilangan bulat serta dapat menerapkannya dalam pembelajaran di Sekolah Dasar.

D. Materi

5.1. Mengenal Bilangan Bulat

Belum ada catatan sejarah yang pasti untuk menunjukkan kapan bilangan bulat pertama kali digunakan. Di dalam matematika, himpunan bilangan bulat merupakan hasil dari perluasan bilangan cacah untuk menyelesaikan permasalahan pengurangan, misalkan 5 - 6 = -1. Simbol "-" atau *minus* merupakan representasi dari kuantitas untuk sebuah lawan dari kualitas yang digunakan untuk transaksi ekonomi Cina dahulu. Sejak tahun 200 SM sampai 200 M, perhitungan Cina telah memulai menggunakan batang kayu hitam (negatif) untuk debit dan batang kayu merah (positif) untuk kredit.



Gambar 5.1

Dalam pemikiran Cina, angka negatif sebagai angka yang harus dikurangi dari kuantitas atau jumlah yang belum dibayar. Mereka tidak membedakan antara dua makna dari tanda minus. Saat ini, tanda minus dikatakan memiliki dua fungsi yang berbeda, salah satunya adalah fungsi biner yang melambangkan operasi pengurangan, salah satunya adalah fungsi biner yang melambangkan angka negatif atau inyers aditif dari bilangan (Kilhamn, 2011).

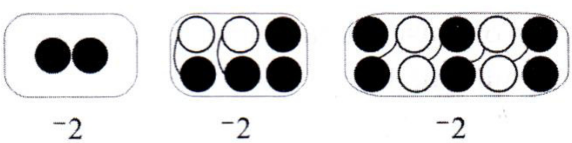
Mengurangkan 4 dari 2 ketika melakukan transaksi, yakni dengan meletakkan dua batang merah dan empat batang hitam, menghilangkan masing-masing dua, menyisakan 2 batang merah yang mewakili 2 yang belum dibayarkan. Dalam notasi modern ditulis 2 - 4 = -2.

Konsep bilangan negatif adalah konsep abstrak yang sulit bagi anak ketika mempelajarinya. Di sisi lain, pengenalan terhadap bilangan negatif kurang dikaitkan dengan dunia nyata. Konteks yang berhubungan langsung dengan bilangan negatif antara lain, keuntungan dan kerugia, termometer, lift, balon udara, cerita tukang pos, kerikil dalam tas, dan skor pada nilai olahmga golf (Van de Walle dkk, 2010).

Definisi Bilangan bulat
Himpurian bilangan bulat mempakan kumpulan
I atau *B* = { , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

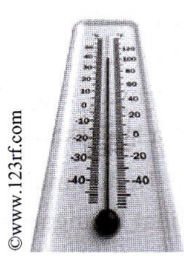
5.2. Model untuk Bilangan Bulat

Terdapat dua tipe model dasar yang digunakan untuk memahami bilangan bulat dan operasinya, yakni model netralisasi dengan menggunakan media keping dua warna dan menggunakan garis bilangan. Model keping memiliki dua warna berbeda, salah satu mewakili nilai positif dan yang lain mewakili nilai negatif. Sepasang keping berbeda warna tersebut memiliki nilai 0 (netral). Sebagai contoh, 1 keping warna putih mewakili positif 1 dan 1 keping warna hitam mewakili negatif 1 sehingga representasi dari -2 dapat dimodelkan dengan bemgam model. Gambar 5.2 berikut masing - masing merepresentasikan -2.

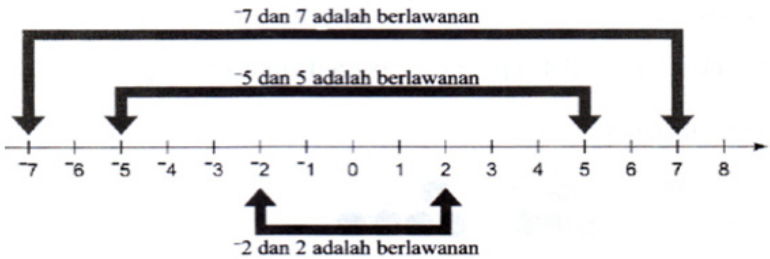


Gambar 5.2

Model lain yang dapat merepresentasikan bilangan bulat adalah garis bilangan. Garis bilangan dapat dihubungkan dengan petunjuk angka pada terrnoineter (Gambar 5.3). Model vertikal dari garis bilangan dapat diilustrasikan pada Gambar 5.4. Bilangan di sebelah kanan angka nol disebut bilangan bulat positif sedangkan di sebelah kiri nol merupakan bilangan bulat negatif. Setiap bilangan di kanan nol hubungan dengan bilangan di kiri nol, misal -2 dan 2, -5 dan 5, -7 dan 7, dan seterusnya yang disebut dengan lawan atau negatif satu sama lain.



Gambar 5.3



Gambar 5.4

Model garis bilangan memiliki kelebihan sekaligus kekurangan. Kelebihan model ini yakni siswa mengetahui jarak nilai yang diketahui terhadap nol, siswa dapat me n pemahaman bilangan nonbulat negatif dan positif (semisal $-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}$) yang sulit direpresentasikan dengan model keeping (Van de Walle, 2010).

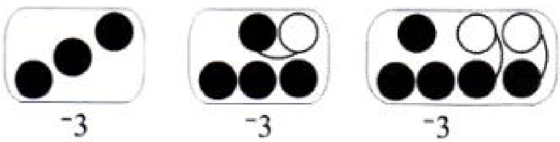
Di sisi lain, operasi dalam bilangan bulat dengan menggunakan garis bilangan sulit dilakukan oleh anak dan sering menyebabkan miskonsepsi. Hal ini didasarkan pada alasan bahwa anak selalu belajar membilang atan menghitung objek sebelum memahami urutan atau posisi bilangan (Wilkins dalam Steiner, 2009). Oleh sebab itu, hendaknya ketika anak belajar mengenai operasi bilangan bulat mulailah menggunakan media dan bimbing mereka dengan konteks yang berada di sekitarnya. Setelah pemahaman mengenai perhitungan dengan media lanjutkan dengan menggunakan garis bilangan.

Kedua model di atas hendaknya diberikan semua kepada anak. Melihat bilangan bulat di dua model tersebut dapat membantu siswa mengekstrak konsep penting tentang bilangan bulat yang dimaksudkan. Bilangan bulat terdiri dari dua konsep yakni kuantitas dan lawan. Kuantitas dimodelkan dengan jurnlah keping atau panjang panah. Konsep lawan direpresentasikan sebagai warna yang berbeda atau arah yang herbeda (Van de Walle, 2010).

Contoh 5.1

Gambar tiga model keping yang berbeda untuk merepresentasikan -3.

Penyelesaian



Contoh 5.2

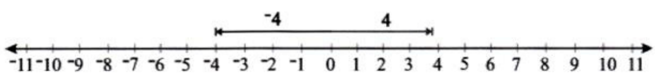
Tentukan lawan dari masing-masing bilangan bulat berikut dan gambarkan pada garis bilangan.

a. -4 c. 0

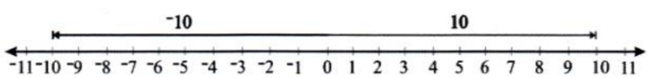
b. -10 d. 4

Penyelesaian

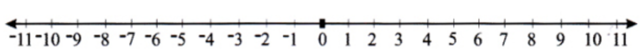
a. -4 >< 4



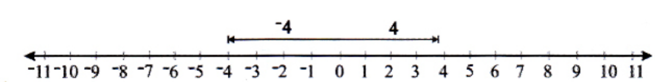
b. -10 >< 10



c. 0 > < 0



d. 4 > < -4



5.3. Penjumdahan dan pengurangan Bilangan Bulat

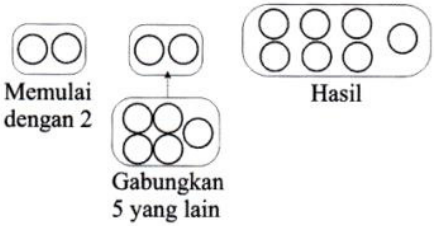
Mengenalkan penjumlahan atau pengurangan yang melibatkan bilangan bulat dapat menggunakan salah satu konteks yang ditampilkan sebelummya, misal menggunakan konteks temperatur suhu. Model yang dapat merepresentasikan penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat yakni model keping dua warna dan model garis bilangan.

Mulailah pembelajaran penjumlahan ini dengan melibatkan penjumlahan bilangan cacah. Permasalahan ini dapat dicontohkan seperti berikut.

Pagi ini suhu di Belanda berkisar 2°C dan di siang hari naik 5°C. Berapa suhu di siang hari dari pernyataan tersebut?

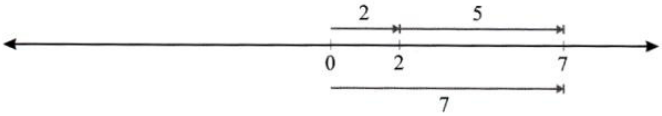
Permasalahan di atas dapat dinotasikan dengan 2 + 5 = ? yang kemudian dimodelkan seperti berikut.

Model Keping untuk 2 + 5



Gambar 5.5a

Model Garis Bilangan untuk 2 + 5

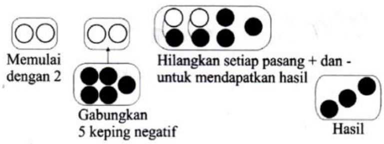


Gambar 5.5b

Memulai arah positif sejauh 2, keimidian inenggabungkannya dengan arah positif sejauh 5 dari titik ujung 2. Hasilnya ditunjukkan oleh arah garis tunggal d. 0 sampai akhir. Jadi, suhu di siang hari inerupakan hasil dari 2 + 5 = 7.

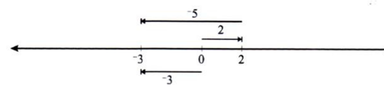
Penjumlahan yang melibatkan salah satu bilangan negatif dapat diilustrasikan oleh contoh berikut "Pada suatu hari di bulan Januari suhu menunjukkan 2°C. Hari berikutnya adalah lima derajat lebih dingin. Berapa suhu yang baru?" Pernyataan ini dapat diinterpretasikan sebagai 2 + -5. Masalah ini dapat dimodelkan oleh gambar berikut.

Model Keping untuk 2 + -5



Gambar 5.6a

Model Garis Bilangan untuk 2 + -5

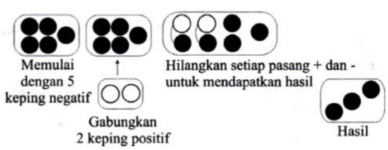


Gambar 5.6b

Memulai dengan arah positif sejauh 2, kemudian menggabungkannya dengan arah negatif sejauh 5 dari titik ujung 2. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai akhir. Jadi, sulut Baru adalah -3.

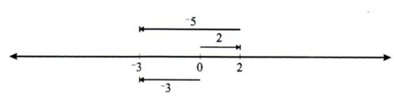
Contoh lain yang melibatkan salah satu bilangan negatif dapat diilustrasikan berikut "Suhu di freezer kulkas saya menunjukkan -5°C. Saya menaikkannya 2°C. Berapa suhu tempat freezer sekarang?" Pernyataan ini dapat diinterpretasikan sebagai -5 + 2. Masalah ini dapat dimodelkan oleh gambar berikut.

Model keeping untuk -5 + 2



Gambar 5.7a

Model Garis Bilangan untuk -5 + 2

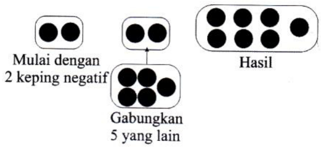


Gambar 5.7b

Memulai dengan arah negatif sejauh 5, kemudian menggabungkan arah positif sejauh 2 dari titik akhir yang diperoleh sebelumnya. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai akhir. Jadi, suhu tempat freezer sekarang adalah -3.

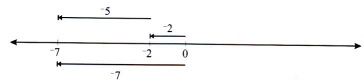
Penjumlahan dua bilangan negatif dapat dicontohkan seperti berikut "Pada suatu hari di bulan Desember, suhu -2°C. Hari berikutnya adalah lima derajat lebih dingin. Berapa suhu yang baru?" Pernyataan ini dapat diinterpretasikan sebagai -2 + -5 yang dapat dimodelkan pada gambar berikut.

Model keeping untuk -2 + 5



Gambar 5.8a

Model Garis Bilangan untuk -2 + -5



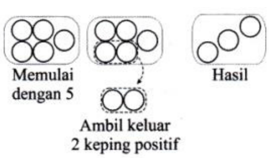
Gambar 5.8b

Memulai dengan arah negatif sejauh 2, kemudian menggabungkan arah negatif sejauh 5. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai akhir. Jadi, suhu yang baru adalah -7.

Pengurangan dua bilangan bulat dapat diawali dengan pengurangan bilangan cacah. Upayakan memulai permasalahan dengan menghubungkannya kepada konteks yang familiar bagi anak. Ingat kembali bahwa dalam pengurangan dapat menggunakan konsep mengambil keluar (Sebagai contoh, memulai dengan 3 dan mengambil 5) atau konsep membandingkan (Berapa beda antara 3 dan -2?). Berikut ini ditampilkan beberapa contoh yang hanya menampilkan prosedur pengurangan beserta modelnya.

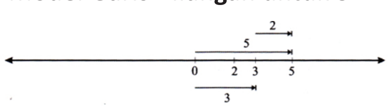
Prosedur pengurangan bilangan cacah dengan bilangan yang dikurang lebih besar daripada bilangan pengurang dapat dicontohkan dengan 5 - 2 berikut.

Model keping untuk 5 – 2



Gambar 5.9a

Model Garis Bilangan untuk 5 – 2

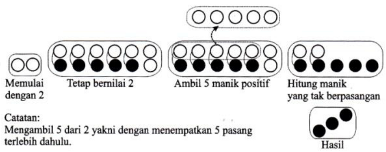


Gambar 5.9b

Memulai dengan arah positif sejauh 5, kemudian mundur dengan arah positif sejauh 2. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai pangkal arah positif 2.

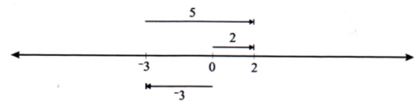
Prosedur pengurangan bilangan cacah dengan bilangan yang dikurang lebih kecil daripada bilangan pengurang dapat dicontohkan dengan 2 - 5 berikut.

Model Keping untuk 2 – 5



Gambar 5.10a

Model Garis Bilangan untuk 2 – 5

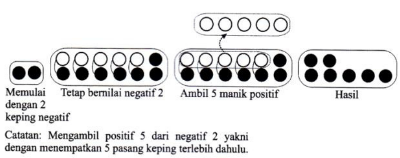


Gambar 5.10b

Memulai dengan arah positif sejauh 2, kemudian mundur dengan arah positif sejauh 5. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai pangkal arah positif 5. Jadi, hasilnya adalah -3.

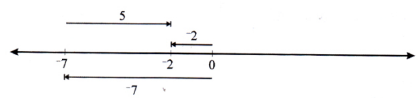
Prosedur pengurangan bilangan bulat dengan bilangan pengurang yang positif dapat dicontohkan dengan (-2) - 5 berikut.

Model Keping untuk (-2) - 5



Gambar 5.11a

Model Garis Bilangan (-2)-5

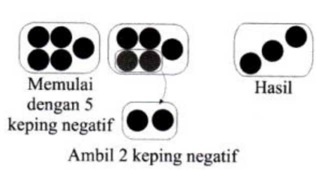


Gambar 5.11b

Memulai dengan arah negatif sejauh 2, kemudian dari titik ujung -2 mundur dengan arah positif sejauh 5. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai titik pangkal arah positif 5. Jadi, hasilnya adalah -7.

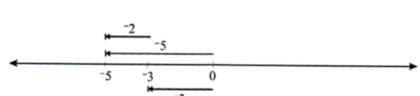
Prosedur pengurangan bilangan bulat dengan bilangan pengurang yang negatif dapat dicontohkan dengan (-5) – (-2) berikut.

Model Keping untuk (-5) – (-2)



Gambar 5.12a

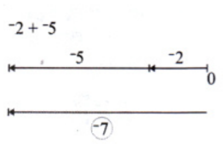
Model Garis Bilangan (-5) – (-2)



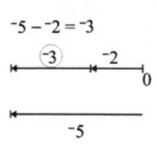
Gambar 5.12b

Memulai dengan arah negatif sejauh 5, kemudian dari titik ujung -5 mundur dengan arah negatif sejauh 2. Hasilnya ditunjukkan oleh arah tunggal dari 0 sampai titik pangkal arab negatif 2. Jadi, hasilnya adalah -3.

Penting bagi anak untuk membuat hubungan antara operasi penjumlahan dan pengurangan. Sebagai contoh, menghubungkan operasi (-5) – (-2) dan (-5) + 2 serta (-2) + (-5) dan (-2) + (-5) yang bentuk operasinya berbeda tetapi memiliki hasil yang sama. Garis bilangan dapat menunjukkan hubungan keduanya (lihat Gambar 5.13 & 5.14).



Gambar 5.13



Gambar 5.14

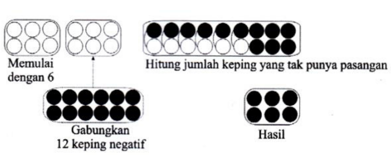
Contoh 5.3

Suhu rata-rata di Inggris dalam seminggu di bulan Desember adalah 6°C. Rata-rata suhu di Rusia pada ming, yang sama adalah 12°C lebih rendah. Berapa rata-rata suhu di Rusia selama minggu itu?

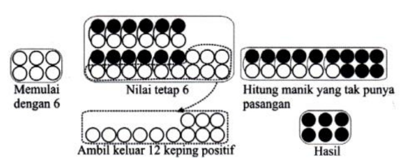
Penyelesaian

Permasalahan di atas dapat diinterpretasikan 6 + (-12) atau 6 -12.

Model Keping 6 + (-12)



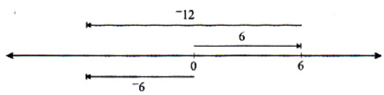
Model keping untuk 6 – 12



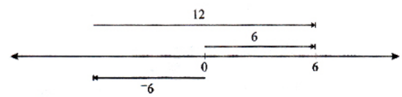
Catatan : Mengambil posistif 12 dari 6 yakni dengan bantuan 12 pasang keping.

Perhatikan bahwa yang punya pasangan adalah 6 keping negarif.

Model Garis Bilangan untuk 6 + (-12)



Model Garis Bilangan untuk 6 – 12

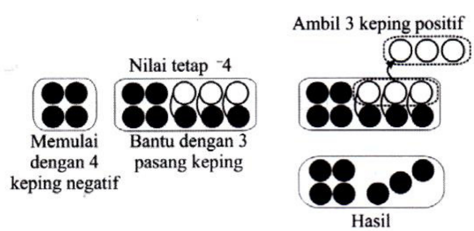


Contoh 5.4

Sebuah suhu freezer -4°C. Jika saya mengubah suhu turun tiga derajat, berapa suhu freezer yang bar. tersebut?

Penyelesaian

Model Keping untuk -4 - 3



Jadi, suhu freezer yang baru -7°C

Model garis bilangan untuk -4 - 3 diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

5.4 Sifat Penjuntlahan Bilangan Bulat

Sifat Tertutup

Sifat ini menunjukkan bahwa setiap penjumlahan dua bilangan bulat selalu menghasilkan bilangan bulat. Misal *a, b*, dan *c* merupakan bilangan bulat, maka $a + b = c$ merupakan bilangan bulat. Sebagai contoh, -5 + -2 = -7.

Sifat Identitas

Sembarang bilangan bulat dijumlahkan dengan 0 sama dengan bilangan bulat itu sendiri. Jadi, 0 merupakan bilangan tunggal sebagai identitas terhadap penjumlahan. Misal *a* bilangan bulat, maka $a + 0 = a = 0 + a$ untuk semua *a*.

Komutatif

Penjumlahan dua bilangan bulat menghasilkan basil yang sama rneskipun bilangan tersebut ditukar posisinya. Misal a dan b merupakan bilangan bulat, maka $a + b = b + a$. Sebagai contoh,

(-3)+2=2+(-3)

-1=-1

Assosiatif

Misal $a, b,$ dan c merupakan bilangan bulat, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Sebagai contoh, diketahui -2, -5, dan -7 bilangan bulat, mak. berlaku

(-2 + -5) + -7 = -2 +(-5 + -7)

-7 + -7 = -2 + -12

-14 = -14

Invers Aditif untuk Penjumlahan

Setiap a bilangan bulat memiliki bilangan tunggal yakni $-a$, yang jika dijumlahkan menghasilkan identitas.

$$a + -a = 0,$$

dengan $-a$ disebut sebagai inyers aditif dari a.

Sifat invers aditif menyatakan bahwa setiap bilangan bulat dijumlahkan dengan lawannya menghasilkan nol. Akibatnya, sifat ini akan melahirkan sebuah teorema yang disebut dengan *additive cancellation*, yakni menghilangkan penjumlah yang sama.

Teorema
Misal $a, b,$ dan c sembarang bilangan bulat. Jika $a + c = b + c$, maka $a = b$

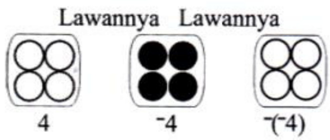
Teorema di atas dapat dibuktikan sebagai berikut.

Misal $a + b = b + c$, maka

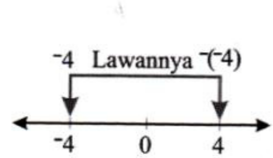
$(a + c) + -c$	$= (b + c) + -c$	
$a + (c + -c)$	$= b + (c + -c)$	*asosiatif*
$a + 0$	$= b + 0$	*invers aditif*
a	$= b$	*identitas*

jadi, jika $a + b = b + c$, maka $a = b$

Di depan telah dibahas bahwa setiap bilangan bulat memiliki lawan (kebalikan, inyers). Sebagai contoh, -4 berlawanan dengan 4, atau dapat ditulis dengan -(-4) = 4. Hal ini dapat diyisualisasikan dalain gambar berikut.



Gambar 5.15



Gambar 5.16

Teorema
Missal b sembarang bilangan bulat, maka -b(-b) = b.

Contoh 5.5

Gunakan sifat-sifat yang berlaku dalam penjumlahan bilangan bulat untuk melakukan komputasi mental dari operasi berikut.

a. 13 -15

b. -(-7) -14

Penyelesaian

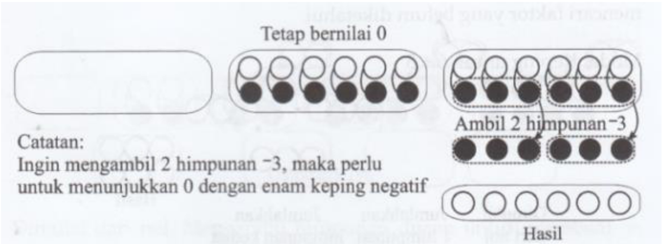
a. 13 -15 = 13 +(-13 + -2) = (13 + -13) + -2 = 0 + -2 = -2

b. - (-7) -14 = 7 - (7 + 7) = (7 - 7) + 7 = 0 + 7=7

5.5. Perkalian dan Pembagian Bilangan Bulat

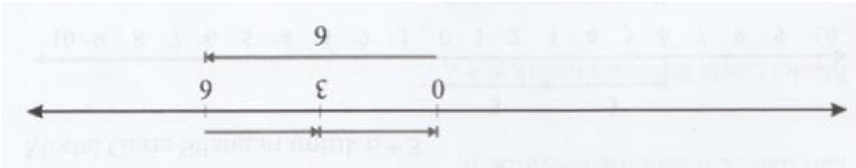
Konsep perkalian bilangan bulat merupakan perluasan dari perkalian untuk bilangan cacah. Seperti perkalian bilangan bilangan cacah, perkalian bilangan bulat dapat diartikan sebagai penjumlahan berulang. Factor pertama menunjukkan berapa banyak himpunan/kumpulan yang ada atau berapa banyak yang ditambahkan ke 0. Ini berarti untuk perkalian bilangan bulat cukup mudah ketika faktor pertama adalah positif Sebagai contoh, 2 x -3 atau 2 himpunan dari -3 dapat diartikan sebagai membuat 2 himpunan dari -3 atau menjumlahkan kedua himpunan -3 ke nol.

Model Keping untuk 2 x -3



Gambar 5.18

Model Keping untuk -2 x 3



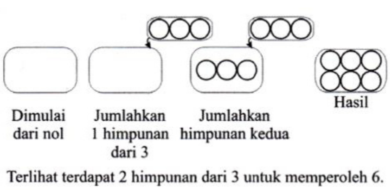
Gambar 5.18

Mundur dari 0 dengan dua arah negatif 3. Hasilnya ditunjukkan oleh arah dari 0 sampai akhir. Jadi, hasil dari -2 x -3 = -6

Berdasarkan dua permasalahan yang dimodelkan di atas memungkinkan anak untuk menyimpulkan aturan sederhana dalam perkalian bilangan bulat. Bimbing mereka untuk menyimpulkan bahwa perkalian dengan tanda yang sama menghasilkan hasil kali positif dan tanda yang berbeda menghasilkan hasil kali negatif.

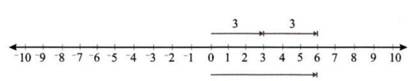
Ketika pertama kali membelajarkan pembagian bilangan bulat mulailah dengan pembagian bilangan cacah. Sebagai contoh, 6 ÷ 3 memiliki dua kemungkinan makna. Pertama, tiga himpunan apa yang membuat jadi 6, ditulis 3 , = 6. Kedua, berapa banyak dari tigaan untuk membuat 6, ditulis ? x 3 = 6. Dua makna ini dapat membangun pemahaman tentang penjurnlahan berulang untuk mencari faktor yang belum diketahui.

Model Keping untuk 6 ÷ 3



Gambar 5.19a

Model Garis Bilangan untuk 6 ÷ 3

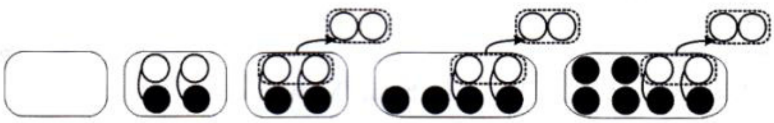


Gambar 5.19b

Tambahkan 3 yang pertama, tambahkan 3 yang kedua, dan berhenti di 6. Hasilnya ditunjukkan berapa banyak 3-an sampai ke 6. Jadi, hasil dari 6 ÷ 3 = 2.

Seperti pembagian bilangan cacah, pembagian yang melibatkan bilangan negatif dapat diartikan sebagai pengurangan berulang. Sebagai contoh, -6 ÷ 2 dapat diartikan berapa himpunan dua-an akan membentuk -6. Menainbahkan $^{+}2$ ke nol sejumlah positif kali akan menghasilkan bilangan positif. Namun, jika $^{+}2$ dijumlahkan ke nol sejumlah negatif kali (pengurangan berulang) akan menghasilkan bilangan negatif.

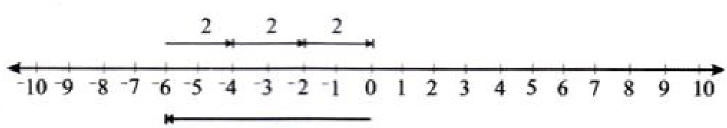
Model keping untuk -6 ÷ 2



Gambar 5.20

Dimulai dari nol. Mengambil himpunan duaan untuk membuat -6, yakni dengan mengubah model dengan menempatkan dua pasangan netral. Ambil 1 himpunan dari 2. Tempatkan kembali dua pasangan netral. Ambil himpunan kedua dari 2. Tempatkan kembali dua pasangan netral. Ambil himpunan ketiga dari 2. Sehingga, terdapat -3 kali dari $^{+}2$untuk membentuk -6.

Model Garis Bilangan untuk -6 ÷ 2



Gambar 5.21

Mengurangi secara berulang dua-an dari -6. Hasilnya ditunjukkan oleh arah 2-an dikurangi sebanyak 3 kali atau dijumlahkan sebanyak -3 kali. Jadi, hasil dari -6 ÷ 2 = -3.

Memahaini pembagian bilangan bulat bersandar pada konsep yang baik dari faktor pertama perkalian yang negatif dan pengetahuan tentang hubungan antara perkalian dan pembagian (Van de Walle, 2010).

5.6 Sifat Perkalian Bilangan Bulat

Sifat tertutup

Sifat ini menunjukkan bahwa setiap perkalian dua bilangan bulat selalu menghasilkan bilangan bulat. Misal *a* dan *b* bilangan bulat, maka *a* x *b* = *c*, dengan *c* pasti bilangan bulat.

Komutatif

Perkalian dua bilangan bulat menghasilkan hasil yang sama meskipun bilangan tersebut ditukar posisinya. Misal *a* dan *b* bilangan bulat, maka *a* x *b*= *b* x *a*.

Sifat Identitas

Sembarang bilangan bulat dikalikan dengan 1 sama dengan bilangan bulat itu sendiri. jadi, 1 merupakan bilangan tunggal sebagai identitas terhadap perkalian. Misal, *a* sembarang bilangan bulat, maka *a* x 1 = *a* = 1 x *a*.

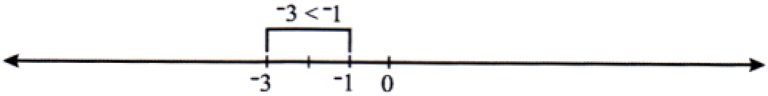
Assosiatif

Misal *a*, *b*, dan *c* bilangan bulat, maka berlaku (a x b) x c = a x (b x c).
Sebagai contoh, diketahui -2,-5 dan -7 bilangan bulat, maka berlaku
(-2 x -5) x -7 = -2 x (-5 x -7)
10 x -7 =-2 x 35
-70 = -70

Sifat Distributif terhadap Penjumlahan

Misal *a*, *b*, dan *c* bilangan bulat, maka berlaku *a* x (*b* + *c*) = *ab* + *ac*.
Sebagai contoh diketahui 2,-3, dan -5 bilangan bulat, maka berlaku
2 x (-3 + -5) = (2 x -3) + (2 x -5)
2 x -8 = -6 + -10
-16 = -16
5.7. Mengurutkan Bilangan Bulat

Konsep urutan bilangan bulat merupakan perluasan dari urutan bilangan cacah. Konsep lebih dari atau kurang dari pada bilangan dapat direpresentasikan ke dalam garis bilangan dengan bilangan yang lebih kecil berada di sebelah kiri bilangan yang lain dan begitupun sebaliknya. Sebagai contoh, -3 < -1 karena untuk menjadi -1 membutuhkan 2 lagi dari -3. Pada garis bilangan letak -3 di sebelah kiri dari -1.



Gambar 5.22

Definisi Ketaksamaan Bilangan Bulat
Untuk a dan b sembarang bilangan bulat, dengan a kurang dari b,ditulis $a < b$, jika terdapat bilangan bulat positif k sehingga
$A + k = b$.
a+k=b.

Contoh 5.6
Urutkan bilangan berikut dari yang terkecil.
3, 0, -5, -3, 5, -8

Penyelesaian
-8 < -5 karena -8 + 3 = -5
-5 < -3 karena -5 + 2 = -3.
Jadi, urutan dari yang terkecil adalah -8, -5, -3, 0, 3, 5.

Sifat Urutan Bilangan Bulat

Misal a, b, dan c sembarang bilangan bulat, m bilangan bulat positif, dan n bilangan bulat negatif, maka berlaku sifat-sifat berikut.

Sifat Transitif untuk Kurang Dari

Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
Sebagai contoh, -3 < -1 dan -1 < 0 maka -3 < 0.
Sifat Kurang Dari dan Penjumlahan Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$.
Sebagai contoh, -3 < -1, maka
-3 + 3 < -1 + 3
0 < 2

Sifat Kurang Dari dan Perkalian dengan Bilangan Bulat Positif

jika $a < b$ maka $am < bm$. Sebagai contoh, -3 < -1, maka
-3 x 3 < -1 x 3
-9 < -3

Sifat Kurang Dari dan Perkalian dengan Bilangan Bulat Negatif

Jika $a < b$, maka $an > bn$. Sebagai contoh, -3 -1, maka
-3 x -3 < -1 x -3
9 < 3

Contoh 5.7

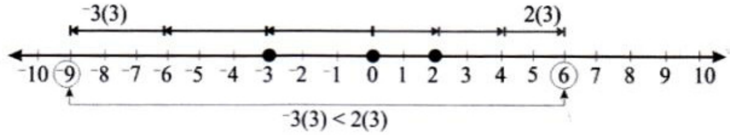
Tunjukkan dengan garis bilangan sedemikian sehingga pernyataan berikut benar.

a. -3 < 2dan, 3 > 0,maka-3 . 3 < 2 . 3.

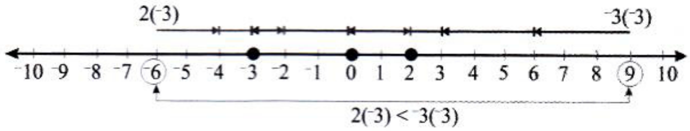
b. -3 < 2 dan -3 < 0, maka -3 . -3 < 2 . -3.

Penyelesaian

a. Dengan sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan bulat positif dapat diilustrasikan seperti berikut.



b. Dengan sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan bulat negative dapat diilustrasikan seperti berikut.



Latihan Soal

1. Tentukan benar atau salah
   a. 10 – 3 + 2 = 10 – 2 + 3
   b. 8 + (5 – 2) = 8 + 5 – 2
   c. 8 – (5 – 2) = (8 – 5) – 2
2. Suhu hari ini di benua Eropa rata-rata 8^{o}C, sedangkan di benua Asia tiga kali lebih tinggi. Berapa rata-rata suhu hari ini di benua Asia? Nyatakan permasalahan ini ke dalam kalimat matematika dan gunakan model keping dan garis bilangan untuk menjawabnya.
3. Buat model keping dan garis bilangan dari penjumlahan dan pengurangan berikut.
   a. 8 + (-5)
   b. -8 – 5
   c. – 8 – (-5)
4. Buat model keping dan garis bilangan dari penjumlahan dan pengurangan berikut.
   a. 12 : (-4)
   b. -3 x (-4)
   c. -12 : (-4)
5. Urutkan bilangan berikut dari yang terkecil hingga yang terbesar.
   a. -3, 3, 1, -1, 0, 2, -2
   b. 11, -5, -7, 3, -6, 4
   c. -9, 8, -7, 6, -5, 4, -3, 2, -1, 0

BAB VI
BILANGAN PECAHAN

- A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi
- B. Gambaran Umum Materi
- C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja
- D. Materi

BAB VI

BILANGAN PECAHAN

A. Kompetensi dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Pada bab ini kompetensi yang harus dimiliki mahasiswa adalah menjelaskan bilangan pecahan dan operasi hitung pecahan. Kompetensi tersebut terbagi menjadi beberapa indikator sebagai berikut:

- Menjelaskan pengertian pecahan
- Menjelaskan konsep pecahan
- Menjelaskan pecahan senilai
- Membandingkan dan mengurutkan pecahan
- Mengubah bentuk pecahan yang satu ke bentuk yang lain
- Menjelaskan operasi pada pecahan
- Menerapkan perhitungan dengan menggunakan pecahan
- Menjelaskan pecahan sebagai perbandingan (rasio)

B. Gambaran Umum Materi

Bab ini mengkaji tentang bilangan pecahan yang meliputi pecahan senilai, pecahan campuran dan operasi hitung pecahan berserta contoh penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Diharapkan dari penjelasan tentang materi ini, mahasiswa dapat memahami konsep pecahan dan operasi hitung pecahan serta dapat menerapkannya dalam pembelajaran di Sekolah Dasar.

C. Relevansi terhadap pengetahuan mahasiswa dan bidang kerja

Pengetahuan tentang pecahan menyajikan konsep pecahan, pecahan senilai, membandingkan dan mengurutkan pecahan, mengubah bentuk pecahan, operasi hitung pecahan dan pecahan sebagai perbandinagan serta menerapkan perhitungan dengan menggunakan pecahan. Diharapkan dari penjelasan tentang materi ini, mahasiswa dapat memahami konsep pecahan dan operasi hitung pecahan serta dapat menerapkannya dalam pembelajaran di Sekolah Dasar.

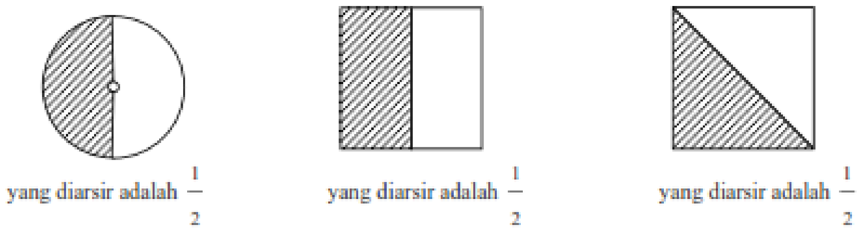
D. Materi

6.1 Pengertian Pecahan

Pecahan yang dipelajari anak ketika di SD, sebetulnya merupakan bagian dari bilangan rasional yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan bilangan bulat dan b tidak sama dengan nol. Secara simbolik pecahan dapat dinyata-kan sebagai salah satu dari: (1) pecahan biasa, (2) pecahan desimal, (3) pecahan persen, dan (4) pecahan campuran. Begitu pula pecahan dapat dinyatakan menurut kelas ekuivalensi yang tak terhingga banyaknya: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\ldots$ Pecahan biasa menurut Kennedy (1994: 425 - 427) adalah lambang bilangan yang dipergunakan untuk melam-bangkan bilangan pecah dan rasio (perbandingan).

6.2 Mengenal Konsep Pecahan

Kegiatan mengenal konsep pecahan akan lebih berarti bila didahului dengan soal cerita yang menggunakan obyek-obyek nyata misalnya buah : apel, sawo, tomat, atau kue: cake, apem, dan lain-lain. Peraga selanjutnya dapat berupa daerah-daerah bangun datar beraturan misalnya persegi, persegipanjang, atau lingkaran yang akan sangat membantu dalam memperagakan konsep pecahan.

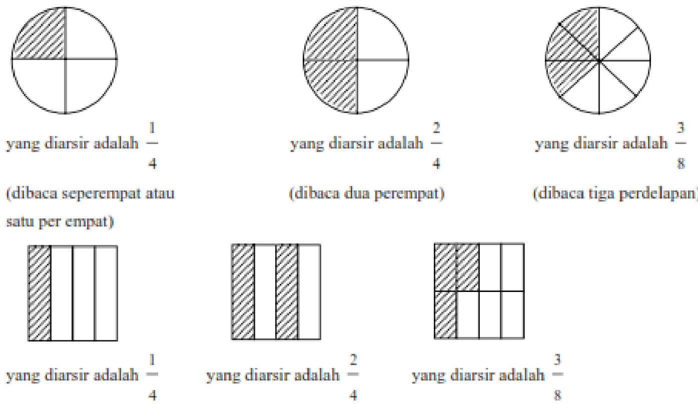


Gambar 6.1

Pecahan $\frac{1}{2}$ dapat diperagakan dengan cara melipat kertas berbentuk lingkaran atau persegi, sehingga lipatannya tepat menutupi satu sama lain. Selanjutnya bagian yang dilipat dibuka dan diarsir sesuai bagian yang dikehendaki, sehingga akan didapatkan gambar daerah yang diarsir seperti di bawah ini.

Pecahan $\frac{1}{2}$ dibaca setengah atau satu per dua atau seperdua. "1" disebut pembilang yaitu merupakan bagian pengambilan atau 1 bagian yang diperhatikan dari keselu-ruhan bagian yang sama. "2" disebut penyebut yaitu merupakan 2 bagian yang sama dari keseluruhan.

Peragaan tersebut di atas dapat dilanjutkan untuk pecahan $\frac{1}{4}$ an, $\frac{1}{8}$ an dan sebagainya, seperti gambar di bawah ini.

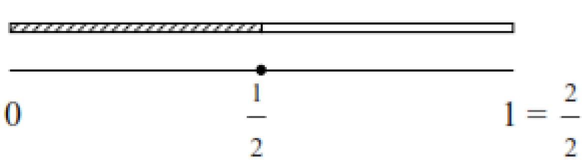


Gambar 6.2

Pecahan $\frac{3}{8}$ dibaca tiga per delapan. "3" disebut pembilang yaitu merupakan 3 bagian_ yang diambil atau 3 bagian yang diperhatikan dari keseluruhan bagian yang sama. "8" disebut penyebut yaitu merupakan 8 bagian yang sama dari keseluruhan.

Selain melipat dan mengarsir pada kertas, peragaan dapat pula menggunakan pita atau tongkat yang dipotong dengan pendekatan pengukuran panjang, yang dapat pula untuk mengenalkan letak pecahan pada garis bilangan.

Pita dipotong menjadi 2 bagian sama panjang untuk memperagakan pecahan $\frac{1}{2}$.



Pengenalan letak pecahan pada garis bilangan tersebut sangat bermanfaat untuk mecari pecahan yang senilai.

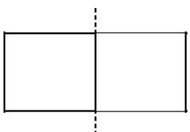
6.3 Pecahan Senilai

Pecahan senilai biasanya disebut juga pecahan ekivalen. Untuk menentukan pecahan yang senilai dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.

1. Peragaan dengan benda kongkret.

Kita akan menunjukkan contoh bahwa $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ dengan menggunakan 3 lembar kertas yang berbentuk persegi panjang. Anggap selembar kertas itu sebagai 1 bagian utuh. Satu lembar kertas dilipat menjadi 2 bagian yang sama sehingga diperoleh $\frac{1}{2}$. Kemudian 1 lembar yang lain dilipat menjadi 2 bagian yang sama, kemudian dilipat lagi menjadi 2, sehingga diperoleh $\frac{2}{4}$ bila digambarkan lipatan-lipatan tersebut sebagai berikut.

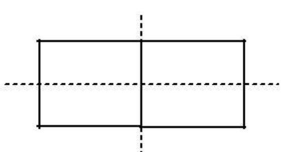
1 lembar kertas yang ke 1



yang di arsir $\frac{1}{2}$

Dilipat menjadi 2 bagian yang sama

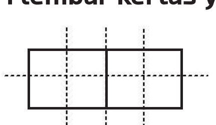
1 lembar kertas yang ke 2



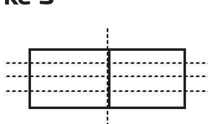
yang di arsir $\frac{2}{4}$

Dari lipatan pertama dilipat lagi menjadi 2 bagian sama.

1 lembar kertas yang ke 3



atau



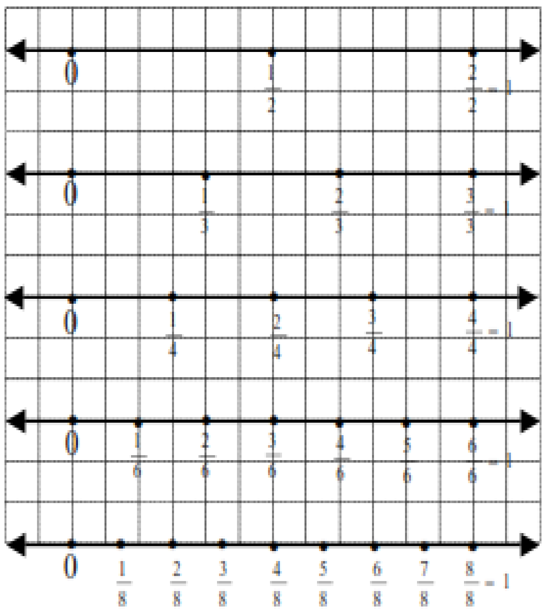
Dari lipatan yang kedua dilipat lagi menjadi 2 bagian yang sama.

yang diarsir $\frac{4}{8}$ yang diarsir $\frac{4}{8}$

Dari gambar di atas jelas bahwa $\frac{1}{2}$ senilai dengan $\frac{2}{4}$ dan $\frac{4}{8}$ atau $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$.

Peragaan dilanjutkan untuk pecahan-pecahan yang lain sehingga akan tampak pola hubungan kelipatan atau pembagian yang sama antara pembilang dan penyebut.

2. Peragaan dengan garis bilangan



Gambar 6.3

Pecahan senilai dapat pula ditunjukkan dengan menggunakan alat peraga garis bilangan. Berikut ini ditunjukkan beberapa pecahan senilai dengan menggunakan garis bilangan, yang digambarkan pada kertas berpetak.

Dengan menggunakan penggaris dapatlah diurutkan dari atas ke bawah dan ditemukan bahwa

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8} \qquad \frac{1}{4}=\frac{2}{8}, \frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}, \frac{2}{3}=\frac{4}{6} \qquad 1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{6}{6}=\frac{8}{8}$$

dan seterusnya

3. Dengan memperluas pecahan.

Pecahan yang senilai dengan $\frac{1}{4}$ dapat diperoleh dengan jalan memperluas dari pecahan $\frac{1}{4}$ menjadi $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{8}$ dan seterusnya, dengan menggunakan alat peraga tabel pecahan senilai yang diperoleh dari tabel perkalian.

Tabel pecahan senilai

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Gambar 6.4

Dengan memperhatikan tabel di atas kita akan mencari

$$= \frac{\cdots}{12} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} \quad \frac{1}{4}$$

Ternyata terlihat bahwa $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{7}{28}$ dan sebagainya.

Dari peragaan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk mencari pecahan yang senilai dapat dilakukan dengan cara mengalikan/membagi pembilang dan penyebutnya dengan bilangan yang sama, tapi tidak nol.

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$ atau sebaliknya $\frac{3}{12} = \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$

Secara umum dapat ditulis $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a : d}{b : d}}$

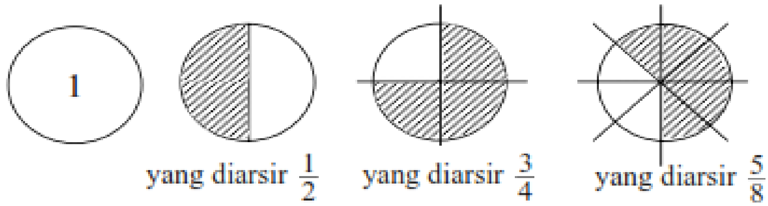
X6.4 Membandingkan dan Mengurutkan Pecahan

Pada saat anak belajar membandingkan dan kemudian mengurutkan pecahan, mereka perlu pengalaman-pengalaman sehingga menghasilkan temuan-temuan khusus. Berikut disajikan alternatif pembelajaran dari kegiatan membandingkan dan mengurutkan pecahan.

1. *Penanaman konsep*

a. Peragaan dengan menggunakan bangun-bangun geometri

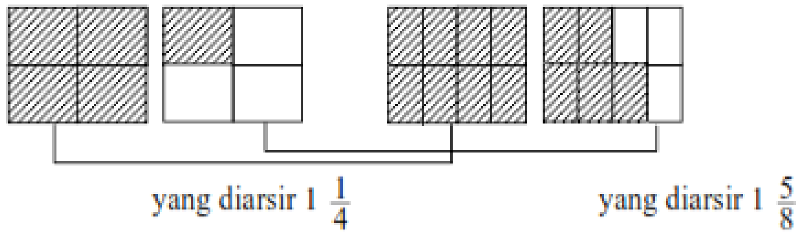
Bangun-bangun geometri dapat dimanfaatkan sebagai alat untuk membandingkan dan mengurutkan pecahan biasa dan pecahan campuran. Bahan yang digunakan harus mudah dilipat, diwarnai atau dipotong-potong untuk mengu-rutkan luasan dari bangun-bangun tersebut sehingga dapat dilihat urutan dari luasan bangun yang mewakili urutan dari bilangannya.



Gambar 6.5

Dari peragaan dapat diketahui bahwa bila bangun dipotong dan dibanding-bandingkan luasannya akan tampak bahwa $\frac{3}{4} < 1; \frac{3}{4} > \frac{5}{8}; \frac{1}{2} < \frac{3}{4}; \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$ dan sebagainya.

Tentukan tanda (<,=,>) yang tepat untuk mengisin titik-titik dari $1\frac{1}{4} \ldots 1\frac{5}{8}$

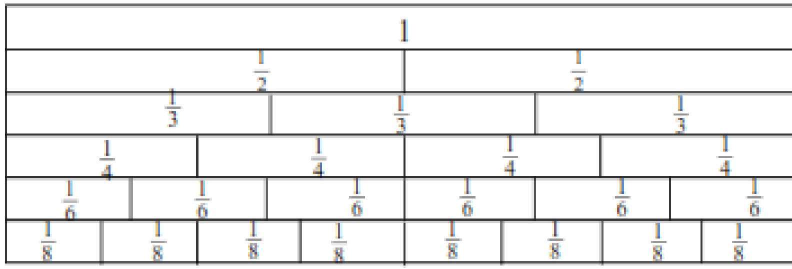


Gambar 6.6

Yang utuh sudah sama, sehingga yang dibandingkan tinggal yang tidak utuh $\frac{1}{4} \ldots \frac{5}{8}$, dari gambar terlihat bahwa $\frac{1}{4} < \frac{5}{8}$, $jadi 1\frac{1}{4} < 1\frac{5}{8}$.

b. Dengan peragaan pita atau kepingan-kepingan pecahan

Kepingan pecahan berguna untuk membandingkan pecahan biasa.



Gambar 6.7

Dari peragaan dan gambar siswa akan dapat membandingkan dan sekaligus mengurutkan bilangan –bilangan pecahan yang diinginkan.

c. Dengan menyamakan penyebutnya

Kita bandingkan $\frac{2}{3} dan \frac{3}{4}$, dengan cara menyamakan penyebutnya atau menentukan pecahan senilainya lebih dulu. Kegiatan ini akan lancar dilakukan oleh siswa bila penanaman konsep pecahan senilai pada bagian **C** dipahami dan dan telah dilatihkan keterampilannya oleh guru, yaitu menentukan $\frac{9}{12} = \frac{8}{12}; \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$. Setelah penyebutnya sama kita bandingkan pembilangnya. Karena 9 > 8 maka $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}, jadi \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ Apabila siswa sudah mengenal KPK, maka dapat ditunjukkan bahwa 12 adalah KPK dari penyebut 3 dan 4.

2. Keterampilan/teknik cepat

Setelah penanaman konsep dipahami oleh siswa, maka kegiatan keterampilan/teknik cepat perlu pula dilatihkan. Ada beberapa teknik cepat yang biasa dilakukan.

a. Bila pembilangnya sama.

Dari pengalaman-pengalaman peragaan luasan maupun kepingan pecahan dapat dilihat bahwa $\frac{3}{4} > \frac{3}{6} > \frac{3}{8} > \frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{6} > \frac{2}{8}$. Sehingga dapatlah ditentukan bahwa pada pecahan positip, bila pembilangnya sama, maka pecahan yang lebih dari adalah pecahan yang penyebutnya angkanya bernilai lebih kecil. Sedangkan pada pecahan negatif akan sebaliknya.

b. Bila penyebutnya sama

Pecahan yang penyebutnya sama mudah dibandingkan melalui peragaan-pera-gaan luasan maupun kepingan-kepingan pecahan.

Contoh : $\frac{3}{7}\,dengan\,\frac{5}{7}$.

Pada pecahan positip, bila penyebutnya sama, maka pecahan yang lebih dari adalah pecahan yang pembilangnya angkanya lebih dari yang lain.

c. Bila pembilang dan penyebutnya tidak sama.

Bila pembilang dan penyebutnya tidak sama, maka guru sering kali mengguna-kan cara silang. Hal ini dapat dibenarkan bila guru telah memberikan konsep atau nalarnya, sehingga siswa mengetahui alasan dari perkalian silang tersebut. Meskipun demikian perkalian silang ini semata-mata hanya teknik supaya siswa cepat dapat menentukan hasil.

$\frac{3}{4}\ldots\frac{2}{5} \rightarrow \frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$ *berarti* $\frac{15}{20}\ldots\frac{8}{20}$ *sehingga* 15 … 8, tanda yang tepat adalah “>”, maka $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$

6.5 Mengubah Bentuk Pecahan Yang Satu ke Bentuk Yang Lain

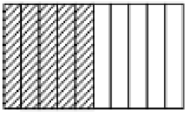
1. Mengubah pecahan biasa menjadi pecahan desimal

Untuk mengubah pecahan biasa menjadi pecahan desimal, dicari dahulu pecahan senilainya yang penyebutnya berbasis sepuluh (persepuluhan, perseratusan, perseribuan dan sebagainya).

Contoh.

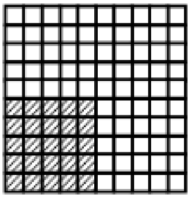
melihat peragaan gambar

a. $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{1\times 5}{2\times 5} = 0{,}5$ (dibaca nol koma lima)



b. $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{1\times 25}{4\times 25} = 0{,}25$ (dibaca nol koma dua lima)

melihat gambar



c. $\frac{3}{8} = \frac{3\times 125}{8\times 125} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$ (dibaca nol koma tiga tujuh lima).

2. Mengubah pecahan biasa menjadi persen atau sebaliknya

Persen artinya perseratus, sehingga nama pecahan biasa yang penyebutnya seratus dapat diartikan dengan nama persen dengan lambangnya untuk persen adalah %. Dengan demikian untuk mengubah pecahan biasa menjadi persen, dicari lebih dahulu pecahan senilainya yang penyebutnya 100.

Contoh:

a. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 75\%$

b. $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100} = 40\%$

Sebaliknya untuk mengubah persen menjadi pecahan biasa, dapat dilakukan dengan mengubah persen menjadi perseratus, yang selanjutnya disederhanakan.

Contoh:

a. $25\% = \frac{25}{100} = \frac{25:25}{100:25} = \frac{1}{4}$

Apabila siswa sudah mengenal FPB, dapat diterapkan kegunannya untuk me-nyederhanakan pecahan

Contoh.

b. $12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = \frac{12{,}5:12{,}5}{100:12{,}5} = \frac{1}{8}$

3. Mengubah pecahan biasa menjadi pecahan campuran dan sebaliknya.

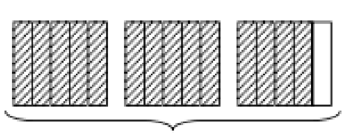
Mengubah pecahan biasa (yang pembilangnya lebih dari penyebutnya) men-jadi pecahan campuran dilakukan dengan cara peragaan dan pembagian bersusun sehingga didapat hasil bagi dan sisa

Contoh.

Ubahlah pecahan $\frac{14}{5}$ menjadi pecahan campuran

Jawab :

Dengan peragaan



$\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$

Hasil bagi (14:5) = 2, sisanya

Sehingga $\frac{4}{5}$ 2=$\frac{14}{5}$

Untuk mengubah pecahan biasa menjadi pecahan campuran dapat juga dengan cara pembagian bersusun sebagai berikut.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5\overline{)14} \\ \underline{10}\;- \\ 4 \end{array}$$

Sehingga diperoleh $\frac{4}{5}$ 2 $= \frac{14}{5}$ Secara umum dapat

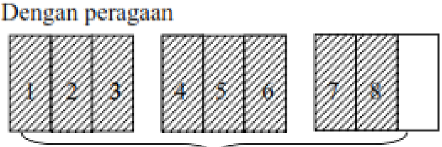
$$\boxed{\frac{a}{b} = \text{hasil bagi } (a:b) + \frac{\text{sisa}}{b}; a > b.}$$

Bila mengubah pecahan campuran menjadi pecahan biasa maka langkahnya merupakan kebalikan dari mengubah pecahan biasa menjadi pecahan campuran yaitu dengan cara mengalikan.

Contoh:

Ubahlah $2\frac{2}{3}$ menjadi pecahan biasa.

Dengan peragaan



$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Secara teknik: $2\frac{2}{3} = (1+1) + \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{3}+\frac{3}{3}\right)+\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = \left(2\times\frac{3}{3}\right)+\frac{2}{3} = \frac{6}{3}+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

atau

$$= \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

atau $2\frac{2}{3} = \frac{(2\times 3)+2}{3} = \frac{8}{3}$

6.6 Operasi Pada Pecahan

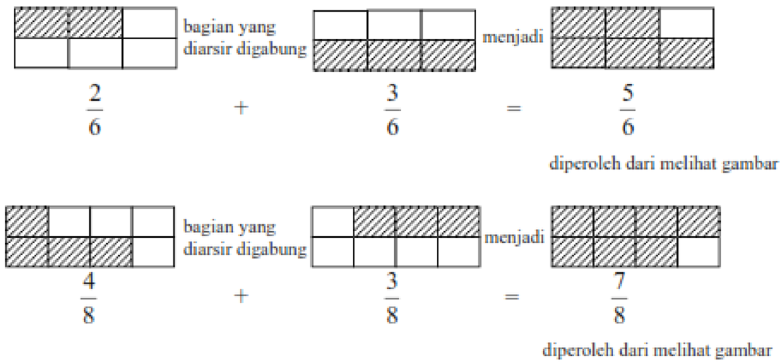
1. Penjumlahan

Penjumlahan pecahan dapat diperagakan dengan model kongkret (mengguna-kan kertas yang dilipat atau gambar).

a. Penjumlahan pecahan yang penyebutnya sama.

Missal : $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \ldots$

1) Dengan luas daerah



Peragaan dilanjutkan dengan penjumlahan pecahan-pecahan yang lain. Dapatlah dilihat bahwa: ada pola hubungan yaitu pembilangnya dijumlah se-dangkan penyebutnya tetap.

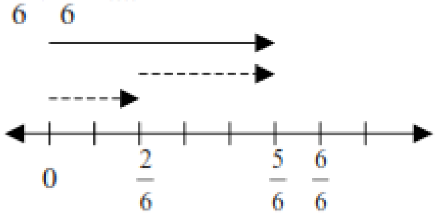
$$\frac{2+3}{6} = \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$

$$\frac{4+3}{8} = \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8}$$ Dan seterusnya

Kesimpulan: Penjumlahan pecahan yang berpenyebut sama dapat dilakukan dengan men-jumlah pembilangnya, sedangkan penyebutnya tetap.

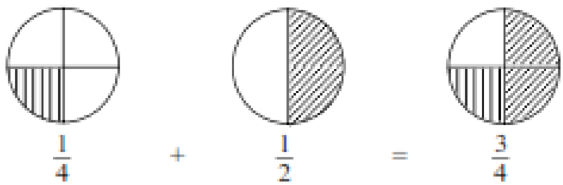
2. Dengan memanfaatkan garis bilangan

$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = ...$



Mulai dari nol (0) kekanan menuju $\frac{2}{6}$ dan dilanjutkan $\frac{3}{6}$ lagi, sehingga menjadi $\frac{5}{6}$ atau $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$. Garis tebal menggambarkan hasil akhir. Peragaan dapat dilanjutkan untuk pecahan-pecahan yang lain.

b. Menjumlahkan pecahan yang penyebutnya tidak sama. Saat anak harus mempelajari materi ini, maka mereka harus diberikan pe-ngalaman-pengalaman dalam ilustrasi kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh dapat dikemukakan cerita berikut ini. Adik mempunyai $\frac{1}{4}$ bagian dari cakenya di atas meja. Kemudian ibu memberinya sepotong lagi yang besarnya $\frac{1}{2}$ bagian. Berapa kue sekarang ?



Dari peragaan ini tampak bahwa hasil akhir adalah = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ 1 = $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$

Tampak pula bahwa $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ sehingga $\frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$. $\frac{2}{4} =+ \frac{1}{4}$ = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ Bila peragaan ini diulang untuk pecahan –pecahan yang lain dimana penyebut dari pecahan yang dijumlah merupakan kelipatan dari penyebut – penyebut lain, maka anak akan mempunyai pengalaman bahwa bila menjumlah pecahan dengan mnyebut tidak sama, supaya dapat memperoleh hasil maka penyebutnya harus disamakan terlebih dahulu, yaitu dengan cara mencari pecahan senilainya.

Peragaan dan soal di atas masih mudah, karena penyebut yang satu merupa-kan kelipatan dari yang lain. Bila permasalahan berkembang menjadi $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$ maka anak harus mencari penyebut persekutuan. Kendala timbul bila anak belum belajar tentang KPK. Satu cara untuk membantu menentukan penyebut persekutuan adalah dengan mendaftar pecahan-pecahan yang senilai untuk setiap pecahan. Sehingga anak mempunyai pengalaman untuk memperoleh penyebut yang nilainya paling kecil yang tepat untuk diambil

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{9}{24} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \frac{18}{48} = \frac{21}{56}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \frac{5}{30} = \frac{6}{36} = \frac{7}{42} = \frac{8}{48}$$

Ketika siswa memeriksa kedua daftar tersebut, mereka menemukan bahwa beberapa pecahan mempunyai penyebut yang sama (dilingkari). Hal ini akan membantu anak menyadari bahwa terdapat lebih dari satu pasang penyebut persekutuan untuk kedua pecahan. Salah satu pasangan yang penyebutnya nilainya kecil (ternyata penyebutnya merupakan KPK dari kedua penyebut) dapat digunakan untuk menjumlah atau mengurangi pasangan pecahan yang tidak sama penyebutnya.
Bila KPK sudah dipelajari maka selanjutnya model abstrak dapat dilakukan.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 2}{2\times 2}+\frac{1\times 1}{4\times 1}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

KPK dari 4 adalah 4. Maka penyebutnya adalah 4

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{1\times 3}{5\times 3}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$$

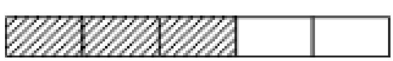
KPK dari 3 dan 5 adalah 15. Maka penyebutnya adalah 15

2. Pengurangan

Pengurangan pecahan dapat juga diragakan dengan model kongkret.

a. Dengan menggunakan luas daerah

luas daerah yang diarsir semula adalah $\frac{3}{5}$



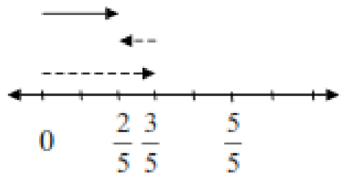
Dihapus arsirannya $\frac{1}{5}$ menjadi

jadi $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}$

Contoh peragaan diperluas sehingga anak mempunyai pengalaman-pengalaman yang banyak.

Dari peragaan-peragaan dapatlah disimpulkan bahwa pengurangan pecahan yang berpenyebut sama dapat dilakukan dengan mengurangkan pembilangnya, sedangkan penyebutnya tetap.

a. Dengan menggunakan garis bilangan



$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = \frac{3-1}{5}$.

Catatan

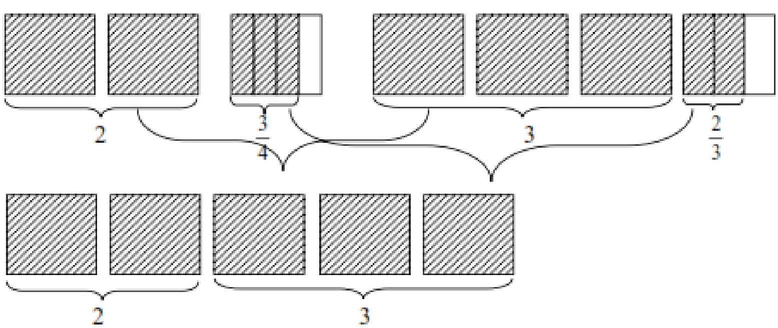
Garis tebal menggambarkan hasil akhir.

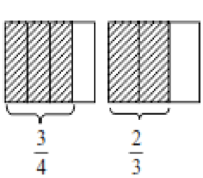
Untuk pecahan yang penyebutnya tidak sama, dengan cara disamakan penye-butnya lebih dahulu, seperti pada operasi penjumlahan

3. **Penjumlahan dan pengurangan pada pecahan campuran**

Materi ini dapat diperagakan dengan menggunakan bangun geometri seperti contoh-contoh berikut ini.

a. $2\frac{3}{4} + 3\frac{2}{3} = ...$



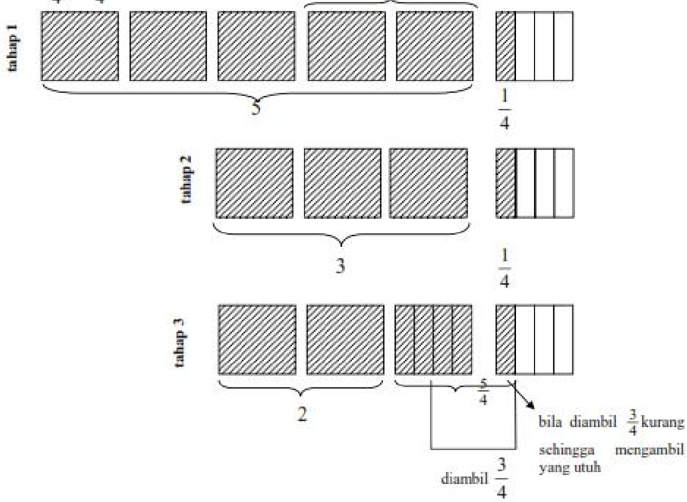


Bagian yang diarsir digunting dan digabung, kemudian dibandingkan dengan yang satu utuh, maka akan dapat diketahui hasilnya lebih dari 1. Selanjutnya proses pen-jumlahan dari $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ seperti pada penjumlahan 2 pecahan yang berbeda penyebut.

Jadi $23\frac{2}{3} = (2+3) + (\frac{3}{4} + \frac{2}{3}) = 5 + (\frac{9}{12} + \frac{8}{12}) = 5 + \frac{17}{12} + \frac{3}{4}$

$= 5 + \frac{12+5}{12} = 5 + \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = 6 + \frac{5}{12} = 6\frac{5}{12}$

b. $5\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}=\ldots$



Jadi $5\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}=(5-2)+(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})=3+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$ Kurang $\rightarrow$ mengambil yang utuh

$$=2+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=2+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=2+\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}$$

c. $5\frac{1}{3}-2\frac{3}{4}=\ldots$

$$5\frac{1}{3}-2\frac{3}{4}=(5-2)+(\frac{1}{3}-\frac{3}{4})=3+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=3+\underbrace{\frac{4}{12}-\frac{9}{12}}_{\text{kurang}\,\rightarrow\,\text{mengambil yang utuh}}$$

$$=2+\frac{12}{12}+\frac{4}{12}-\frac{9}{12}$$

$$=2+\frac{16}{12}-\frac{9}{12}=2+\frac{7}{12}=2\frac{7}{12}.$$

4. Pembelajaran Perkalian Pecahan yang Berorientasi pada PAKTEM

a. Perkalian Bilangan Asli dengan Pecahan

Contoh.

1. Kelompok 1 dengan alat pita dan menyelesaikan masalah sebagai berikut. Siswa A, B, dan C akan membuat bunga dengan masing-masing siswa memerlukan $\frac{1}{5}$ meter pita. Berapa meter pita yang diperlukan?

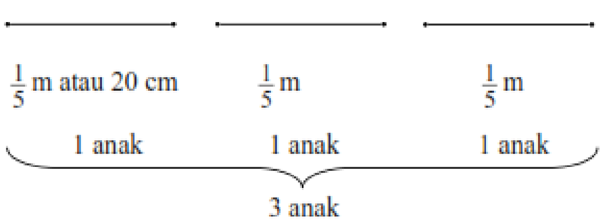
Kalimat matematika yang diperoleh adalah $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ atau $3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=\frac{3\times 1}{5}$

2. Kelompok 2 dengan alat pita. Siswa A, B, dan C akan membuat bunga masing-masing memerlukan $\frac{2}{5}$ m pita. Berapa meter pita yang diperlukan?

   Kalimat matematika yang bersesuaian adalah $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2+2+2}{5}=\frac{6}{5}$ atau $3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=\frac{3\times 2}{5}$ dan seterusnya.

   Masing-masing kelompok diberi kesempatan untuk memperagakan obyek dan mengemukakan hasil dari penyelesaian soal. Guru dapat membantu kelompok pada saat mengemukakan hasil dan merangkumnya atau memperjelas materi yang dibahas dengan menggunakan chart yang telah disiapkan seperti contoh di bawah ini. Rangkuman untuk memperjelas materi yang telah dibahas adalah sebagai berikut.

   Contoh 1.
   Bila masing-masing anak memerlukan $\frac{1}{5}$ m pita, maka 3 anak akan memerlukan ... m pita.



   Dengan menggunakan konsep penjumlahan berulang akan didapat konsep perkalian sebagai berikut

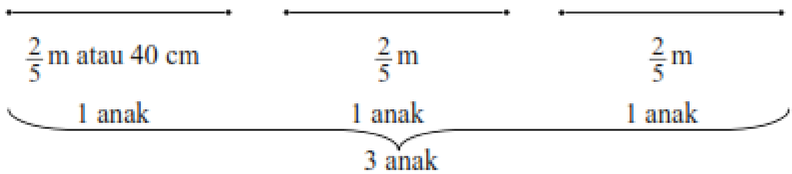
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1+1+1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=3\times\frac{1}{5}=\frac{3\times 1}{5}$$

   Dalam hal ini guru dapat pula memberi pengalaman kepada siswa unruk mengukur pita yang panjangnya $\frac{1}{5}$ m sama dengan 20 cm dan $\frac{3}{5}$ m sama dengan 60 cm.

Contoh 2.

Bila masing-masing anak memerlukan $\frac{2}{5}$ m pita, maka 3 anak memerlukan ... m pita.



Dengan menggunakan konsep penjumlahan berulang akan didapat konsep perkalian sebagai berikut.

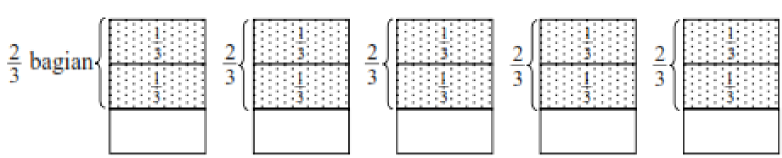
$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5}$$

Bila guru menginginkan hasil akhir dari $\frac{6}{5}$ merupakan pecahan campuran, maka hasil tersebut dapat diubah menjadi pecahan campuran $1\frac{1}{5}$ yaitu setelah siswa diminta untuk membandingkan dengan pita yang panjangnya 1 meter ternyata lebih panjang. Tepatnya adalah $1\frac{1}{5}$ meter dan setelah diukur hasilnya adalah 1 meter lebih 20 cm. Hal ini dimaksudkan agar siswa mempunyai keterampilan pula dalam hal pengukuran.

Contoh 5.

Bila masing-masing anak memerlukan $^{2}{}_{3}$ bagian dari kertas folio berwarna, maka 5 anak akan memerlukan ... bagian kertas folio.



$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2+2}{3} = \frac{10}{3} \text{ (ada 10 arsiran } \tfrac{1}{3}\text{-an)}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3}$$

Dari contoh 1 sampai dengan 5 guru bersama siswa membuat kesimpulan hasil dari pola yang terjadi sebagai berikut.

(1) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=\frac{3\times1}{5}$ atau $3\times\frac{1}{5}=\frac{3\times1}{5}$

(2) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=\frac{3\times2}{5}$ atau $3\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2}{5}$

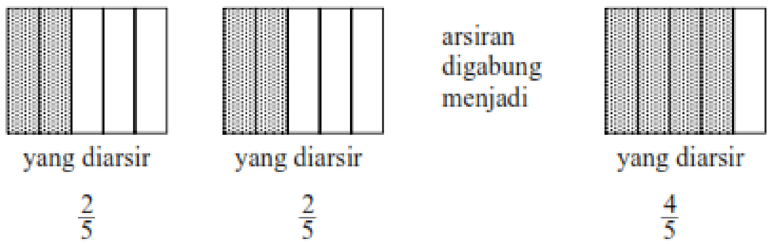
(3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{3\times1}{4}$ atau $3\times\frac{1}{4}=\frac{3\times1}{4}$

(4) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}=\frac{2\times2}{5}$ atau $2\times\frac{2}{5}=\frac{2\times2}{5}$

(5) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=\frac{5\times2}{3}$ atau $5\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{3}$

Dalam kalimat sederhana dapat dinyatakan bahwa: **"Bilangan asli dikalikan pecahan hasilnya adalah bilangan asli dikalikan pembilangnya, sedangkan penyebutnya tetap" atau dalam bentuk umum** $a\ x\ \frac{b}{c}=\frac{a\ x\ b}{c}$

Pada pertemuan berikutnya guru dapat memberikan alternatif pembelajaran dengan media gambar seperti contoh berikut ini. 2 x $\frac{2}{5}$ = ... Artinya ada 2 satuan $\frac{2}{5}$ -an. Berapa nilai setelah digabung?

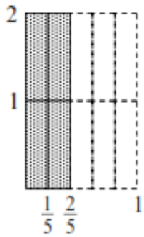


$2\ x\ \frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

Dari memperhatikan gambarterlihat $2\ x\ \frac{2}{5}=\frac{2\ x\ 2}{5}$ atau dapat dinyatakan sebagai

Gambar dapat pula dalam bentuk luas daerah seperti contoh berikut

Gambar dapat pula dalam bentuk luas daerah seperti contoh berikut.



Cara menggambar.

Keatas kita ambil 2 bagian sesuai dengan bilangan asli yang digunakan (suku ke-1), sedangkan kekanan adalah $\frac{2}{5}$ sesuai dengan pecahannya (suku ke-2). Setiap petak mewakili $\frac{1}{5}$ yaitu sesuai dengan $\frac{1}{5}$ bagian dari 1. Jadi dari gambar terlihat bahwa gabungan 2 satuan $\frac{2}{5}$-an adalah 4 petak $\frac{1}{5}$an atau $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

Contoh-contoh tersebut dapat dilanjutkan untuk perkalian-perkalian yang lain sehingga siswa memahami perkalian bilangan asli dengan pecahan dan terampil dalam menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan.

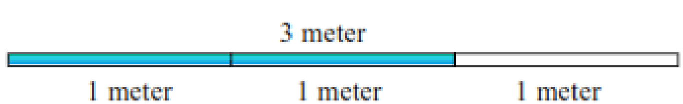
b. Perkalian Bilangan Asli

Permasalahan perkalian pecahan dengan bilangan asli ada dalam kehidupan sehari-hari dengan contoh-contoh sebagai berikut.

- Dita mempunyai pita yang panjangnya 3 meter, dan $\frac{2}{3}$ bagian dari pita tersebut akan dibuat bunga. Berapa meter pita yang dibuat bunga?
- Dinda mempunyai tali yang panjangnya 5 meter, dan $\frac{3}{5}$ bagian dari tali dipakai untuk mengikat kardus. Berapa panjang tali yang digunakan untuk mengikat?
- Luas tanah Dika adalah 200 m^2, dan $\frac{1}{4}$ bagian dari tanah tersebut akan dibangun rumah. Berapa luas tanah bangunan rumah Dika?
- Luas kebun Diar adalah 500 m^2, dan $\frac{2}{5}$ bagiannya akan ditanami lombok. Berapa luas kebun yang ditanami lombok?

Contoh 1.

Dita mempunyai pita yang panjangnya 3 meter, dan $\frac{2}{3}$ bagian dari pita tersebut akan dibuat bunga. Berapa meter pita yang dibuat bunga?



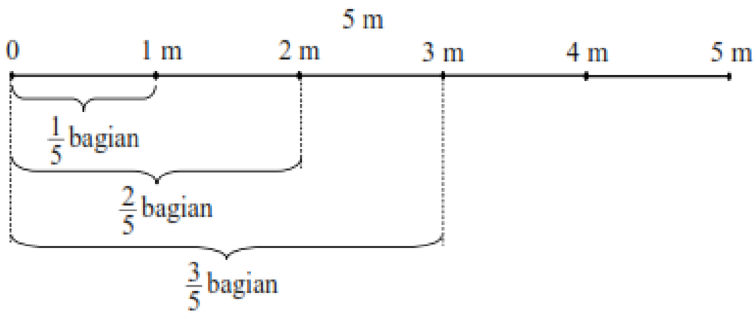
Dari gambar terlihat bahwa $\frac{2}{3} dari 3m$ adalah 2 m atau $\frac{2}{3}$ x 3 = 2 atau $\frac{2}{3} \times 3 = 2 = \frac{2 \times 3}{3} = \frac{6}{3}$

Contoh 2 :

Dinda mempunyai tali yang panjangnya 5 meter, dan $\frac{3}{5}$ bagian dari tali dipakai untuk mengikat kardus. Berapa panjang tali yang digunakan untuk mengikat?

Guru menyuruh siswa mengukur tali yang panjangnya 5 meter dengan memberi tanda setiap 1 meter

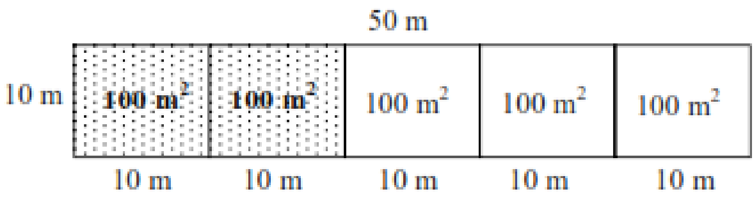
Tali dibagi menjadi 5 bagian yaitu berdasar penyebut dari pecahan yang digunakan dan menentukan $\frac{3}{5}$ bagiannya serta menetapkan hasilnya yaitu 3 m.



Untuk kalimat matematikanya dapat dituliskan $\frac{3}{5} \times 5 = 3 = \frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{5}$

Contoh 3 :

Luas kebun Diar adalah 500 m^{2,} dan $\frac{2}{5}$ bagiannya akan ditanami Lombok. Berapakah luas kebun yang ditanami Lombok ?



Dari gambar terlihat bahwa luas kebun yang akan ditanami lombok adalah 200 m^2

Atau $\frac{2}{5} \times 500 = 200 = \frac{2 \times 500}{5} = \frac{1000}{5}$

Rangkuman dari contoh 1 sampai dengan 4 adalah sebagai berikut.

(1) $\frac{2}{3} \times 3 = 2 = \frac{2 \times 3}{3} = \frac{6}{3}$ atau $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{2 \times 3}{3}$

(2) $\frac{3}{5} \times 5 = 3 = \frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{5}$ atau $\frac{3}{5} \times 5 = \frac{3 \times 5}{5}$

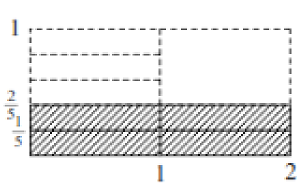
(3) $\frac{1}{4} \times 200 = 50 = \frac{1 \times 200}{4} = \frac{200}{4}$ atau $\frac{1}{4} \times 200 = \frac{1 \times 200}{4}$

(4) $\frac{2}{5} \times 500 = 200 = \frac{2 \times 500}{5} = \frac{1.000}{5}$ atau $\frac{2}{5} \times 500 = \frac{2 \times 500}{5}$

Dalam kalimat sederhana dapat dinyatakan bahwa: **”pecahan biasa dikalikan bilangan asli hasilnya adalah pembilang dikalikan bilangan asli, sedangkan penyebutnya tetap”**

$$\frac{a}{b} x\, c = \frac{a\ x\ c}{b}$$

Pada pertemuan berikutnya guru dapat pula memberikan alternatif pembelajaran dengan media gambar seperti contoh berikut. $\frac{2}{5}$ x 2 = ... Artinya $\frac{2}{5}$ dari 2. Dengan menggunakan luas daerah diperoleh gambar sebagai berikut.



Setiap petak mewakili $\frac{1}{5}$ bagian dari 1. Jadi dari gambar terlihat bahwa ada 4 petak $\frac{1}{5}$an atau dalam kalimat matematika adalah $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5} = \frac{2 \times 2}{5}$.

Contoh dapat diulang untuk mendapatkan bentuk perkalian yang lain sehingga menambah pemahaman siswa tentang materi yang disajikan. Pada tahap berikutnya pembahasan sudah dalam bentuk abstrak yaitu berupa soal yang harus dikerjakan siswa baik dalam bentuk soal cerita maupun soal bukan cerita

c. Perkalian Pecahan Dengan Pecahan

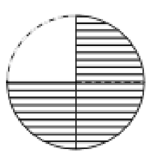
Permasalahan perkalian pecahan dengan pecahan ada dalam kehidupan nyata sehari-hari dengan contoh-contoh sebagai berikut,

- Ibu mempunyai $\frac{3}{4}$ bagian dari kue cake. Jika ibu menghidangkan $\frac{3}{4}$ nya untuk tamu, maka berapa bagian yang ibu hidangkan tersebut?
- Satu resep kue roti membutuhkan $\frac{3}{5}$ bagian coklat batangan. Jika kakak membuat $\frac{1}{2}$ resep maka coklat yang dibutuhkan ..... bagian.

Dalam pelaksanaan pembelajaran guru dapat menyiapkan LK berupa gambar sebagai pengganti dari benda konkret untuk dikerjakan siswa secara kelompok. Sebelum masuk pada kegiatan inti guru mengulang materi prasyarat yaitu meliputi perkalian bilangan asli dengan pecahan; perkalian pecahan dengan bilangan asli; pecahan senilai; dan pecahan campuran. Guru dapat membantu kelompok saat berdiskusi maupun presentasi hasil. Pada akhir kegiatan guru bersama siswa merangkum atau memperjelas materi yang dibahas dengan menggunakan chart yang telah disiapkan seperti contoh di bawah ini.

Contoh 1

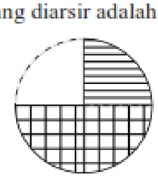
Ibu mempunyai $\frac{3}{4}$ bagian dari kue cake. Jika ibu menghidangkan $\frac{2}{3}$ nya, maka yang dihidangkan = ... bagian.



yang diarsir adalah $\frac{3}{4}$

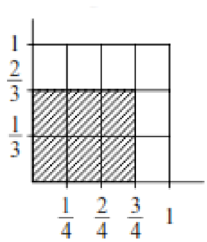
Permasalahan tersebut dapat dinyatakan dalam kalimat matematika $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ artinya $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \ldots$

Dari gambar terlihat bahwa hasil dari $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ (yang diarsir dobel) atau $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$



yang diarsir dobel menunjukkan $\frac{2}{3}$ dari $\frac{3}{4}$ atau $\frac{1}{2}$

Atau dengan model luas daerah didapat gambar sebagai berikut.



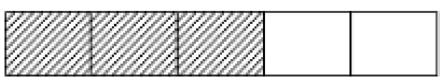
Setiap petak mewakili $\frac{1}{12}$. Dari gambar dapat dilihat bahwa ada 6 petak $\frac{1}{12}$an atau dalam kalimat matematika adalah $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ atau $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$

Contoh 2 :

Satu resep roti membutuhkan $\frac{3}{5}$ bagian coklat batangan. Jika kakak membuat $\frac{1}{2}$ resep maka coklat yang dibutuhkan ... bagian.Untuk mengkongkretkan masalah di atas dapat digunakan media kertas yang mudah dilipat sebagai media individual.

Tahap 1.

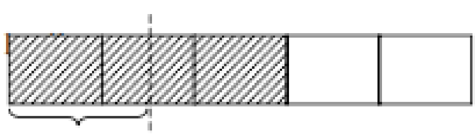
Kertas dilipat menjadi 5 bagian yang sama sesuai dengan penyebut dari pecahan yang digunakan pada coklat batangan. Arsir 3 bagian dari lipatan untuk membentuk pecahan $\frac{3}{5}$.



yang diarsir $\frac{3}{5}$

Tahap 2.

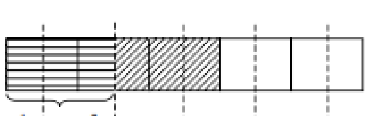
Lipat $\frac{3}{5}$ menjadi 2 bagian sama atau $\frac{1}{2}$ dari $\frac{3}{5}$, maka akan terbentuk lipatan



$\frac{1}{2}$ dari $\frac{3}{5}$

Tahap 3.

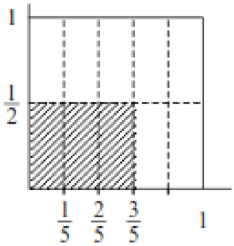
Ikuti lipatan kecil tersebut sampai seluruh kertas membentuk lipatan kecil yang sama. Maka akan terbentuk 10 lipatan kecil, dan $\frac{1}{2}$ dari $\frac{3}{5}$ tersebut ternyata sama dengan 3 lipatan kecil dari 10 lipatan atau $\frac{3}{10}$ (yang diarsir dobel).

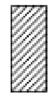


$\frac{1}{2}$ dari $\frac{3}{5}$

Jadi $\frac{1}{2}$ dari $\frac{3}{5}$ adalah $\frac{3}{10}$ atau $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5}$

Atau dengan model luas daerah didapat gambar sebagai berikut.



Setiap petak  mewakili $\frac{1}{10}$. Dari gambar dapat dilihat bahwa ada 3 petak $\frac{1}{10}$ atau dalam kalimat matematika adalah $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ atau $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5}$.

Dalam kalimat dapat disimpulkan bahwa: **”pecahan dikalikan pecahan hasilnya adalah pembilang dikalikan pembilang dan penyebut dikalikan penyebut”atau dalam bentuk umum** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \times \frac{a}{b}$.

d. *Perkalian Pecahan Campuran*

1) $3 \times 4\frac{1}{5} = \ldots$

Dengan prinsip perkalian sebagai penjumlahan berulang.

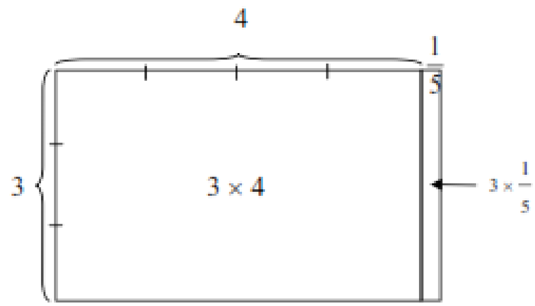
$$3 \times 4\frac{1}{5} = 4\frac{1}{5} + 4\frac{1}{5} + 4\frac{1}{5} = \underbrace{(4+4+4)}_{3 \times 4} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}_{3 \times \frac{1}{5}} = 12 + \frac{3}{5} = 12\frac{3}{5}$$

atau

$$3 \times 4\frac{1}{5} = 3 \times \left(4 + \frac{1}{5}\right) = (3 \times 4) + \left(3 \times \frac{1}{5}\right) = 12 + \frac{3}{5} = 12\frac{3}{5}$$

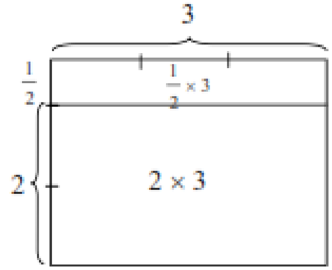
Jadi $3 \times 4\frac{1}{5} = 12\frac{3}{5}$.

Dengan peragaan luasan.



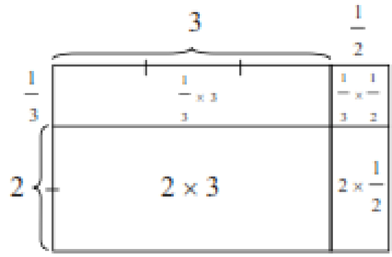
Jadi $3 \times 4\frac{1}{5} = 3 \times (4 + \frac{1}{5}) = (3 \times 4) + \left(3 \times \frac{1}{5}\right) = 12 + \frac{3}{5} = 12\frac{3}{5}$

2) $2\frac{1}{2} \times 3 = ...$



$2\frac{1}{2} \times 3 = (2 + \frac{1}{2}) \times 3 = (2 \times 3) + (\frac{1}{2} \times 3) = 6 + \frac{3}{2} = 6 + 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

3) $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2} = ...$



$$2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2} = (2 + \frac{1}{3}) \times (3 + \frac{1}{2}) = (2 \times 3) + (\frac{1}{3} \times 3) + (2 \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} \times \frac{1}{2})$$

$$= 6 + \frac{3}{3} + \frac{2}{2} + \frac{1}{6} = 6 + 1 + 1 + \frac{1}{6} = 8\frac{1}{6}$$

5. Pembelajaran Pembagian Pecahan Biasa yang Berorientasi pada PAKEM

a. Pembagian bilangan asli dengan pecahan biasa.

Permasalahan pembagian bilangan asli dengan pecahan ada dalam kehidupan nyata sehari-hari dengan contoh sebagai berikut.

- Kakak mempunyai 2 meter pita dan akan dibuat bunga. Masing-masing bunga memerlukan pita $\frac{1}{3}$ m. Berapa bunga yang dapat dibuat? Bagaimana bila masing-masing bunga memerlukan pita $\frac{2}{3}$ m. Berapa bunga yang dapat dibuat?
- Adik mau mengecat kayu panjangnya 4 meter. Setiap jam adik hanya dapat mengecat $\frac{3}{4}$ m. Berapa jam adik menyelesaikan pekerjaannya? Bagaimana bila 1 jam hanya mampu mengecat $\frac{2}{5}$ m. Berapa jam adik menyelesaikan pekerjaannya?

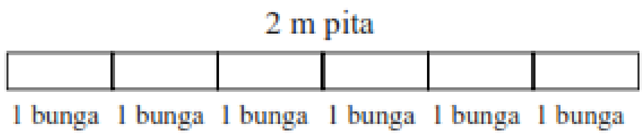
Contoh 1

Kakak mempunyai 2 m pita dan akan dibuat bunga. Masing-masing bunga memerlukan pita $\frac{1}{3}$ m. Berapa bunga yang dapat dibuat?

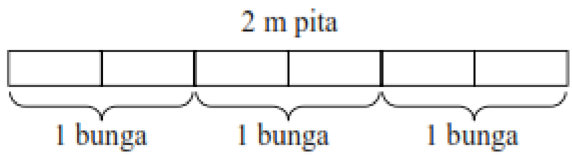
Untuk menjawab permasalahan di atas, kita gunakan media gambar dari pita. Ada 2 m pita yang dibuat bunga. Setiap kali membuat bunga berarti kita

Mengurang $\frac{1}{3}$ m dari 2 m yang ada sampai pita habis dibuat bunga.

Atau 2 - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$. Dalam kalimat pembagian menjadi 2: $\frac{1}{3}$

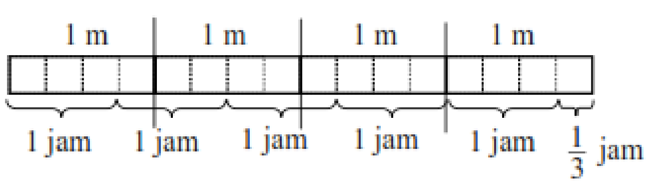


Ternyata terlihat bahwa ada 6 bunga yang dapat dibuat dari 2 m pita tersebut.
Atau dalam kalimat matematika adalah 2 : 6 = $\frac{1}{3}$
Bagaimana bila setiap bunga memerlukan $\frac{2}{3}$ m ?



Jadi ada 3 bunga yang dapat dibuat. Atau dalam kalimat matematika adalah 2 : 3 = $\frac{2}{3}$

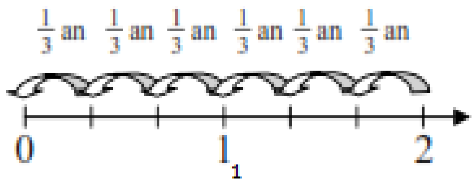
Contoh 2 :
Adik mau mengecat kayu yang panjangnya 4 meter. Setiap jam adik hanya dapat mengecat $\frac{3}{4}$ m. Kayu tercat semua dalam ... jam.



3 kotak atau $\frac{3}{4}$ m kayu memerlukan waktu 1 jam, maka 1 kotak memerlukan waktu $\frac{1}{3}$ jam. Ternyata terlihat bahwa ada 5 jam lebih $\frac{1}{3}$ jam atau 5 $\frac{1}{3}$ jam. Jadi 4 : $\frac{16}{3}$ = $\frac{1}{3}$ 5 = $\frac{3}{4}$.

Contoh 3.

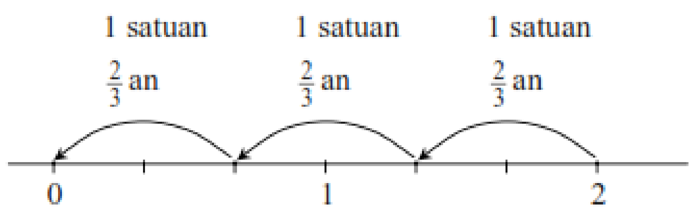
2 : $\frac{1}{3}$ = ... dapat diartikan sebagai ada berapa $\frac{1}{3}$ an dalam 2.



Tampak dalam 2 ada $\frac{1}{3}$ an sebanyak 6, maka $2 : \frac{1}{3} = 6$

Contoh 4:

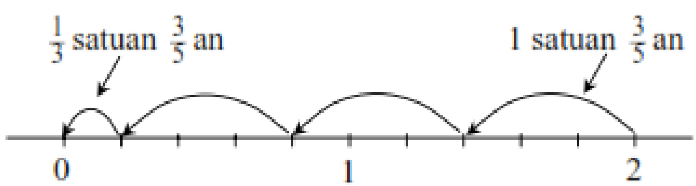
2 : $\frac{2}{3}$ = ...



Dari garis bilangan tampak bahwa dalam 2 ada $\frac{2}{3}$ an sebanyak 3 atau 2 : 3 $\frac{2}{3}$ =

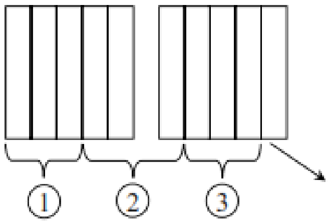
Contoh 5 :

2 : $\frac{3}{5}$ = ...



Dari garis bilangan tampak bahwa dalam 2 ada 3 satuan $\frac{3}{5}$ an dan $\frac{1}{3}$ satuan $\frac{3}{5}$ an atau 3 $\frac{1}{3}$ satuan $\frac{3}{5}$ an. Sehingga 2 : $\frac{10}{3}$ = $\frac{1}{3}$ 3 = $\frac{3}{5}$.

Atau dengan luasan sebagai berikut.:



sisa $\frac{1}{3}$ dari $\frac{3}{5}$an atau $2 : \frac{3}{5} = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Dari peragaan-peragaan tersebut ternyata ada pola hubungan sebagai berikut

$$2 : \frac{1}{3} = 6 = \frac{2 \times 3}{1} = 2 \times \frac{3}{1}$$

$$2 : \frac{2}{3} = 3 = \frac{2 \times 3}{2} = 2 \times \frac{3}{2}$$

$$2 : \frac{3}{5} = \frac{10}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = 2 \times \frac{5}{3} \text{ dan seterusnya.}$$

Pola hubungan yang terbentuk itu perlu diberikan sebagai kata kuncinya kepada siswa yaitu: **”apabila bilangan asli dibagi dengan pecahan biasa maka pembagian berubah menjadi perkalian tetapi pecahannya dibalik (penyebut menjadi pembilang dan pembilang menjadi penyebut)” atau dalam bentuk umum** $a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{d}$.

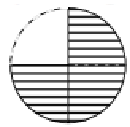
b. Pembagian pecahan biasa dengan bilangan asli

Permasalahan pembagian pecahan dengan bilangan asli dapat dimuncul-kan dari contoh sehari-hari sebagai berikut :

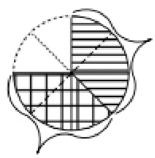
- Ibu mempunyai $\frac{3}{4}$ roti yang akan diberikan kepada 2 anaknya sehingga masing-masing mendapat bagian sama, maka masing-masing anak akan mendapat roti … bagian.
- Adik mempunyai $\frac{1}{2}$ batang coklat yang akan diberikan kepada 3 teman-nya sehingga masing-masing mendapat bagian sama. Maka masing-masing temannya akan mendapat coklat … bagian.

Contoh 1 :

Ibu mempunyai $\frac{3}{4}$ kue yang akan diberikan kepada 2 anaknya. Masing-masing mendapat … bagian.



yang diarsir menunjukkan $\frac{3}{4}$

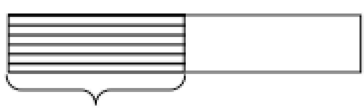


bagian dari masing-masing anak

Permasalahan di atas dalam kalimat matematika = $\frac{3}{4} : 2 = \ldots$

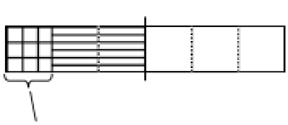
Dari gambar tampak bahwa bagian dari masing-masing anak adalah $\frac{3}{8}$ atau $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

Contoh 2 :
Adik mempunyai $\frac{1}{2}$ batang coklat yang akan diberikan kepada 3 temannya.
Masing-masing mendapat coklat ... bagian.
Guru dapat menggunakan kertas yang dapat dilipat-lipat untuk memperagakan batangan coklat yang dimaksud dalam soal dan beri arsir.



yang diarsir $\frac{1}{2}$ batang coklat.

Lipat $\frac{1}{2}$ bagian tadi menjadi 3 bagian lagi dan teruskan lipat untuk 1 bagian.



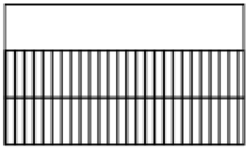
bagian masing-masing anak

utuh, sehingga terlihat bahwa $\frac{1}{3}$ bagian dari $\frac{1}{2}$ adalah $\frac{1}{6}$, atau yang diarsir dobel.

Permasalahan di atas dalam kalimat matematika adalah $\frac{1}{2} : 3 = \ldots.$

Pada gambar tampak bahwa bagian dari masing-masing anak adalah $\frac{1}{6}$ atau $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Contoh 3.
5 : $\frac{2}{3}$ = ...
Dapat diperagakan sebagai berikut.



yang diarsir $\frac{2}{3}$ dilipat menjadi 5 bagian

Pada gambar terlihat bahwa $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$ (yang diarsir dobel)

Dari contoh 1, 2, dan 3 ternyata terdapat pola hubungan sebagai berikut.

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8} = \frac{3}{4 \times 2}$$

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$$

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15} = \frac{2}{3 \times 5}$$

$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \times c}$Kunci dari pola hubungan tersebut adalah: **"apabila pecahan biasa dibagi dengan bilangan asli maka pembilang dari pecahan tersebut tetap sedangkan penyebutnya dikalikan dengan bilangan aslinya". Atau dalam bentuk umum**

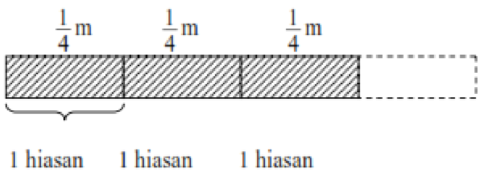
c. Pembagian pecahan biasa dengan pecahan biasa.

Permasalahan pembagian pecahan dengan pecahan dapat dicontohkan dalam kenyataan sehari-hari sebagai berikut.

- Kakak mempunyai $\frac{3}{4}$ m pita yang akan dibuat hiasan. Masing-masing hiasan memer-lukan pita $\frac{1}{4}$ m. Berapa hiasan yang dapat dibuat?
- Ibu mempunyai gula $\frac{3}{4}$ kg yang akan dibuat kue. Satu resep kue memer- lukan $\frac{1}{2}$ kg gula. Berapa resep yang dapat dibuat ibu?

Contoh 1.

Kakak mempunyai $\frac{3}{4}$ m pita yang akan dibuat hiasan, dan masing-masing hiasan memerlukan $\frac{1}{4}$ m pita.



Dalam kalimat matematika adalah

$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \ldots$

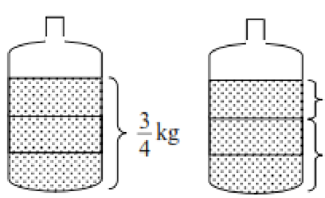
Dari gambar tampak bahwa ada 3 hiasan yang dapat dibuat dari $\frac{3}{4}$

Contoh 2.

Ibu mempunyai gula $\frac{3}{4}$ kg yang akan dibuat kue. Satu resep memerlukan $\frac{1}{2}$ kg gula. Banyaknya resep yang dapat dibuat ....

Gula yang ada digambarkan ditempatkan pada kantong sebagai berikut.

Kalimat matematika dari soal di atas adalah $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \ldots$



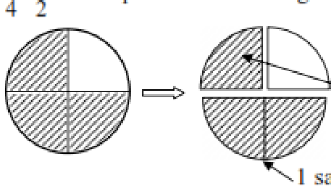
$\frac{1}{4}$ kg dapat dibuat $\frac{1}{2}$ resep

$\frac{1}{2}$ kg dapat dibuat 1 resep

Jadi dari gambar terlihat bahwa $\frac{3}{4}$ kg gula dapat dibuat $1\frac{1}{2}$ resep, dan kalimat matematika yang bersesuaian adalah $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Soal di atas dapat pula digambarkan dengan menggunakan luas daerah sebagai berikut.

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \ldots$ dapat diartikan sebagai ada berapa $\frac{1}{2}$an pada bilangan $\frac{3}{4}$.



$\frac{1}{2}$ satuan dari pengambilan $\frac{1}{2}$ an.

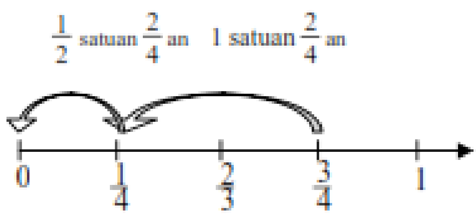
1 satuan dari pengambilan $\frac{1}{2}$ an.

Jadi hasil dari $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Cara yang lain untuk mendapatkan hasil pembagian pecahan dengan pecahan adalah dengan menyamakan penyebutnya. Karena pada hakekatnya pembagian merupakan pengurangan berulang dengan penyebut yang sama. Agar hasil bagi langsung menunjuk ke bentuk paling sederhana penyamaan penyebut dapat melalui perhitungan KPK.

$\frac{1}{2}$: $\frac{3}{4}$ = ... KPK dari penyebutnya adalah KPK (4, 2) = 4.

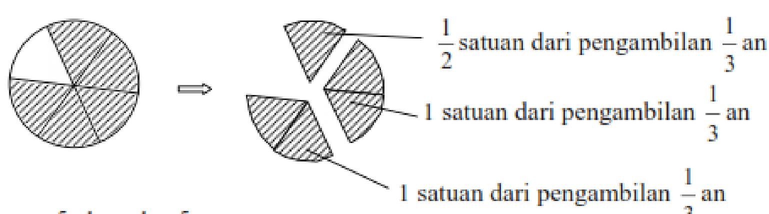
Sehingga $\frac{2}{4}$: $\frac{3}{4}$ = $\frac{1}{2}$: $\frac{3}{4}$. Dengan peragaan garis bilangan akan dapat ditemukan hasilnya.



Jadi $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} 1 = \frac{2}{4} : \frac{3}{4}$

Contoh 2.

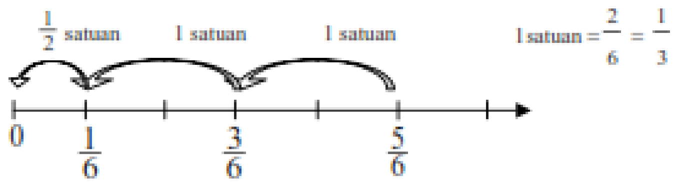
$\frac{1}{3}$: $\frac{5}{6}$ =... dapat diartikan sebagai ada berapa $\frac{1}{3}$ an pada bilangan $\frac{5}{6}$



Jadi $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

$\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ = ... KPK dari penyebutnya = KPK (6, 3) = 6

Sehingga $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6} : \frac{2}{6}$



Dari kedua contoh diatas diperoleh :

Dari kedua contoh di atas diperoleh:

1. hasil pembagian $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
   dilain pihak $\frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
   sehingga $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$

2. hasil pembagian $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$
   dilain pihak $\frac{5}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$
   sehingga $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{1}$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan secara umum bahwa: $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$.

6.7 Terapan Perhitungan Dengan Menggunakan Pecahan

Perhitungan dengan menggunakan pecahan banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh.

1. Pak Toha bekerja sebagai pembuat tongkat. Untuk membuat sebatang tongkat diperlukan kayu yang panjangnya $\frac{3}{4}$ m. Jika Pak Toha mempunyai kayu yang panjangnya 3 m, berapa batang tongkat yang dapat dibuat?
   Jawab.

   $$3 : \frac{3}{4} = 3 \times \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

2. Ani akan membuat hiasan bingkisan lebaran dari pita. Setiap bingkisan memer-lukan pita yang panjangnya $2\frac{1}{2}$ m. Berapa m pita yang diperlukan untuk membuat hiasan 5 bingkisan? Jawab.

   $$\left(5 \times 2\frac{1}{2}\right)\text{m} = \left\{5 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)\right\}\text{m} = \left\{(5 \times 2) + \left(5 \times \frac{1}{2}\right)\right\}\text{m} = \left(10 + 2\frac{1}{2}\right)\text{m} = 12\frac{1}{2}\text{ m.}$$

   Jadi pita yang diperlukan $12\frac{1}{2}$ m.

3. Pak Tohar dapat menyelesaikan pembuatan sebuah lemari dalam waktu 6 hari. Jika pekerjaan itu dikerjakan secara bersama-sama dengan Pak Karyo, ternyata dapat diselesaikan dalam waktu 2 hari. Seandainya pekerjaan itu diselesaikan oleh Pak Karyo sendiri, berapa hari akan selesai?
   Jawab.

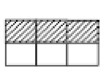
   Pak Tohar menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 6 hari.

   Jadi dalam 1 hari selesai $\frac{1}{6}$ bagian.

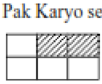
   

   Pak Tohar dan Pak Karyo menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 2 hari.

   Jadi dalam 1 hari selesai $\frac{1}{2}$ bagian.

   Pak Karyo sendiri, dalam 1 hari selesai = $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   Pak Karyo dalam 1 hari selesai $\frac{1}{3}$ bagian.

   Jadi pekerjaan itu dapat diselesaikan Pak Karyo dalam waktu = $\left(1 : \frac{1}{3}\right)$ hari =

   $\left(1 \times \frac{3}{1}\right)$ hari = 3 hari.

6.8 Pecahan Sebagai Perbandingan (Rasio)

Sebuah pecahan yang menunjukkan rasio tidak sama dengan pecahan yang mewakili bagian dari keseluruhan (utuh). Bila pecahan biasa digunakan untuk menunjukkan rasio akan mempunyai interpretasi yang berbeda dibandingkan pecahan sebagai bagian yang utuh. Sebagai contoh: pembilang dari sebuah pecahan sebagai rasio mungkin menyatakan jumlah obyek dalam kumpulan obyek. Oleh karena itu konsep pecahan sebagai rasio harus jelas bagi anak. Untuk memahami mengapa pecahan merupakan perbandingan (rasio) dapat dipikirkan dalam situasi seperti ini.

Contoh 1.

"Dinda dan Dita membagi tanggungjawab mengelola toko kelontong. Dinda dalam 1 minggu menjaga toko selama 4 hari, sedangkan Dita 3 hari. Apabila Dinda telah menjaga toko selama 20 hari, berapa harikah Dita telah menjaga tokonya".

Rasio untuk masalah di atas adalah 4 : 3 (dibaca 4 dibanding 3). Sebuah pernyataan dapat digunakan untuk memecahkan masalah itu.

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{n} \quad \text{dengan perkalian akan didapat:}$$

$$\frac{4}{3} \times 3 = \frac{20}{n} \times 3$$

$$4 = \frac{20}{n} \times 3$$

$$4 \times n = \frac{20}{n} \times 3 \times n$$

$$4n = 60$$

$$4n : 4 = 60 : 4$$

$$n = 15$$

Apabila anak telah berlatih beberapa kali dengan permasalahan yang sejenis dan telah memahaminya maka perkalian silang dan teknik menghitung cepat dapat dilatihkan.

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{n}$$
$$4 \times n = 20 \times 3$$
$$4n = 60$$
$$n = \frac{60}{4} = 15$$

Jadi Dita telah menjaga tokonya selama 15 hari.

Contoh 2.

Tinggi badan Dhiar dan Dhika masing-masing 150 cm dan 180 cm. Maka perban-dingan tinggi Dhiar dan Dhika adalah 150 : 180 atau 5 : 6 dengan masing-masing dibagi 30 yang dikatakan sebagai pembanding. Sehingga dapat dikatakan bahwa tinggi Dhiar : tinggi Dhika = 5 : 6 (baca 5 dibanding 6) atau tinggi Dhiar adalah $\frac{5}{6}$ (baca 5 per enam) tinggi Dhika.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa perbandingan 5 : 6 dapat dinyatakan sebagai pecahan $\frac{5}{6}$, dan perbandingan 6 : 5 dapat dinyatakan sebagai pecahan $\frac{5}{6}$.

Contoh 3.

Panjang dan lebar suatu persegipanjang mempunyai perbandingan 5 : 3. Jika luas persegipanjang itu 240 cm^2, maka tentukan ukuran panjang dan lebar dari persegi-panjang itu.

Penyelesaian. Diketahui: p : l = 5 : 3

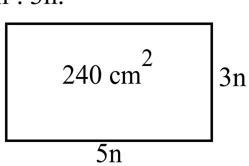
Luas pp = 240 cm^2.

Jawab.

Luas pp = 240 cm^2

Misal pembandingnya n maka panjang dan lebar dari persegipanjang itu adalah

5n : 3n.



Luas persegipanjang = p × l = 240 cm^2

$$\text{Jadi } 5n \times 3n = 240$$
$$15n^2 = 240$$
$$15n^2 : 15 = 240 : 15$$
$$n^2 = 16$$
$$n = \sqrt{16} = 4$$

Jadi panjang = 5n = (5 × 4)cm = 20 cm lebar = 3n = (3 × 4)cm = 12 cm.

Latihan Soal

1. Pak Kantun dapat menyelesaikan pengecetan tembok dari sebuah bangunan dalam waktu 6 hari. Sedangkan pak Marsono dapat menyelesaikan pekerjaan yang sama dalam waktu 3 hari. Jika mereka bekerja bersama-sama, maka dalam waktu berapa hari pekerjaan tersebut dapat diselesaikan?
2. Lima tahun yang lalu umur Ana 2 kali umur Rani. Sedangkan 15 tahun yang akan datang umur Ana $1\frac{1}{3}$ kali umur Rani. Berapa umur Ana dan Rani sekarang?
3. Perbandingan uang Arif dengan uang Feri adalah 4 : 7. Jumlah uang mereka Rp 55.000,00. Berapa selisih uang mereka?
4. Tiga liter bensin dapat untuk menempuh jarak 60 km. Bila 8 liter bensin, berapa jarak yang dapat ditempuh?
5. Perbandingan panjang dan lebar pada suatu persegipanjang adalah 5 : 3.
   a. Jika luas persegipanjang adalah 240 cm^2, maka tentukan ukuran dari panjang, lebar dan kelilingnya.
   b. Jika kelilingnya 160 cm, tentukan ukuran dari panjang, lebar dan luasnya.

Daftar Rujukan

Baroody, A.J., & Wilkins, J. L. M. 1999. *The Development of Informal Counting, Number, and Arithmetic Skills and Concepts.* In J. Copeley (Ed)*, Mathematics in the Early Years, Birth to five* (Hal. 48-65), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematiscs

Bennett, A. B. Jr. Burton, L. J., & Nelson, L. T. 2012. *Mathematics for Elementary Teachers: A Concentual Approach, Ninth Edition*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Burkhart, J. 2009. *Building Number from Prime. Mathematics Teaching in the Middle school*, 15(3), 157-167.

D'Augustine, Charks. 1992. *Teaching Elementary School Mathematics*. New York: Harper Collins Publishers.

Fuson, K. 2003. *Developing Mathematical Power in Whole Number Operations*. Dalam J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds), *A research companion to Priciples and Standardsnin School Mathematics* (Hal. 68-94). Reston, VA: NCTM.

Kennedy, Leonard. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. California: Wadsworth Publishing Company.

Kurz, T. L & Garcia, J. 2012. *Moving beyond Factor Trees Mathematics Teaching in The Middle School,* 18(1), 52-56.

Musser, G. L. Burger, W.F., & Peterson. 2011. *Mathematics of Elementary Teachers: A Contemporary Approach, Ninth Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Sonnabend, T. 2010. *Mathematics for Teachers: An Interactive Approach for Grades K-8, Fourt Edition*. Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Troutman, Andria. 1991. *Mathematics: A Good Beginning, Strategies for Teaching Children*. California: Brooks/Cole Publishing Company.