APLIKASI ALJABAR MAX-PLUS PADA SISTEM PRODUKSI TIPE ASSEMBLY

Pohet Bintoto

Program Studi Pendidikan Matematika FST Universitas Kanjuruhan Malang
pohet.bintoto@gmail.com

ABSTRAK. Efektivitas penggunaan waktu sangat dibutuhkan dalam kegiatan produksi. Sehingga diperlukan adanya suatu metode yang dapat mengoptimalkan waktu dalam suatu sistem produksi. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memodelkan dan mengoptimalkan waktu dalam suatu sistem produksi yaitu aljabar max-plus. Aljabar max-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max} = (R_\varepsilon, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ dengan $\varepsilon = -\infty$, $e = 0$, dan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real. Pada makalah ini dibahas aplikasi aljabar max-plus pada sistem produksi. Sistem produksi dibagi menjadi sistem produksi tipe serial, paralel, dan tipe *assembly*. Tapi dalam penelitian ini hanya dibahas aplikasi aljabar max-plus pada sistem produksi dengan tipe *merging line*. Hasil dari penelitian ini yaitu persamaan linear aljabar max-plus untuk sistem produksi tipe *assembly* yang kemudian digunakan untuk menentukan waktu mulai yang baik dan lama waktu produksi yang optimal.

Kata Kunci: Aljabar Max-Plus, *Merging Line*, Sistem produksi.

PENDAHULUAN

Kegiatan produksi dalam suatu perusahaan erat kaitannya dengan efektivitas penggunaan waktu. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode yang dapat mengoptimalkan waktu produksi. Sistem produksi termasuk dalam kategori *Discrete Event Dynamic System* (DEDS). Sistem seperti ini dapat dimodelkan dengan automata, Petri nets, *Marcov-chains*, *queuing network*, simulasi dan aljabar max-plus. Jika menggunakan aljabar konvensional maka umumnya model matematika yang diperoleh dari masalah DEDS berupa sistem persamaan nonlinear yang tidak mudah untuk diselesaikan. Tapi jika menggunakan aljabar max-plus, maka dapat diperoleh suatu model matematika dalam bentuk persamaan linear, sehingga mudah untuk diselesaikan.

Schutter (1996) mengatakan bahwa terdapat kesamaan antara aljabar max-plus dan aljabar konvensional, sehingga beberapa teori dalam aljabar konvensional juga berlaku dalam aljabar max-plus. Kesamaan antara aljabar max-plus dan aljabar konvensional yang dimaksud adalah operasi yang dimiliki keduanya sangat mirip sehingga sifat-sifat yang berlaku pada keduanya hampir sama. Subiono (2014) menjelaskan bahwa aljabar konvensional memiliki sifat sebagai *field* atau lapangan sedangkan aljabar max-plus ($\mathbb{R}_{max}$) memiliki sifat semifield idempoten. Semifield idempoten adalah semiring komutatif yang idempoten dengan setiap elemen $x \neq \varepsilon$ mempunyai invers $-x$ terhadap operasi $\otimes$. Salah satu teori yang berlaku dalam aljabar konvensional dan aljabar max-plus adalah terdapat penentuan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari suatu matriks persegi.

Aljabar max-plus dapat digunakan untuk mengaplikasikan secara aljabar beberapa aplikasi dari DEDS, salah satunya adalah sistem produksi. Pada penelitian Schutter (1996) yang menjelaskan aplikasi aljabar max-plus pada sistem produksi, diperoleh bahwa tidak hanya terdapat sistem produksi sederhana, tapi juga terdapat sistem produksi lain yang lebih kompleks. Penelitian yang dilakukan oleh Schutter (1996) membahas tentang sistem produksi sederhana yang selanjutnya dikembangkan menjadi lime tipe sistem produksi yaitu tipe *serial, assembly, splitting,* dan *flexible* dengan aktivitas barisan tertentu. Kelima tipe sistem produksi tersebut, semuanya dapat dikerjakan sama halnya seperti pada sistem produksi sederhana. Sejalan dengan penelitian tersebut, penelitian ini dilakukan untuk menentukan bentuk persamaan suatu sistem produksi tipe *assembly* dengan menggunakan operasi aljabar max-plus. Disamping itu diberikan contoh penerapannya hingga didapatkan waktu mulai yang baik agar sistem produksi berlangsung secara periodik.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku, skripsi, jurnal, maupun artikel mengenai aljabar max-plus dan penerapannya pada sistem produksi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

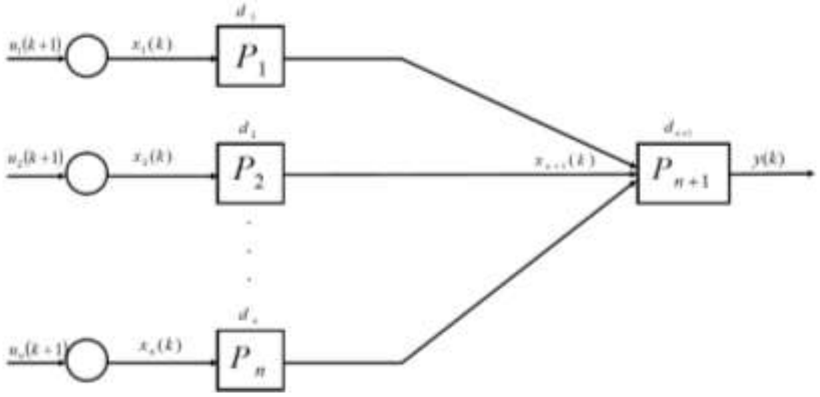
1. memahami aljabar max-plus;
2. menentukan asumsi-asumsi yang digunakan pada sistem produksi tipe *assembly*;
3. memahami aljabar max-plus pada sistem produksi tipe *assembly*;
4. memahami bentuk persamaan sistem produksi tipe *assembly* dengan menggunakan operasi aljabar max-plus;
5. menentukan aplikasi aljabar max-plus pada contoh sistem produksi tipe *assembly*; dan
6. menentukan waktu mulai yang baik agar sistem produksi tipe *assembly* berlangsung secara periodik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas mengenai bentuk persamaan aljabar max-plus tipe *assembly* dan contoh penerapannya pada sistem produksi.

1. Bentuk Persamaan Umum Sistem Produksi Tipe *Assembly*

Pada bagian ini dibahas sistem produksi tipe *assembly* yang dikutip dari Schutter (1996). Pada sistem produksi tersebut terdapat $n+1$ unit pemroses. Unit pemroses (P_n) merupakan unit pemroses yang menampung beberapa *output* dari unit pemroses ke-1 sampai dengan unit pemroses ke-$(n-1)$ $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$.



Gambar 1. Sistem produksi tipe *assembly*

Dari Gambar 1 untuk semua $k \in \mathbb{N}_0$ dapat didefinisikan:

1. $u_i(k+1)$ merupakan waktu ketika bahan baku ke-i dimasukkan ke sistem untuk proses yang ke-$(k+1)$, dengan $i = 1,2, \dots, n$;
2. $x_j(k)$ merupakan waktu ketika pemroses ke-j memulai proses yang ke-k dengan $j = 1,2, \dots, (n+1)$; dan
3. $y(k)$ merupakan waktu ketika bahan-bahan selesai diproses dan produk meninggalkan sistem saat yang ke-k.

Dalam kasus ini diasumsikan bahwa semua pemroses memiliki unit penampung (*buffer*) yang tidak terbatas. Sehingga tidak akan pernah terjadi penumpukan dan *overflow* pada sistem.

Selanjutnya akan ditentukan waktu untuk memulai proses pada P_1. P_1 dapat memulai proses yang ke-$(k+1)$ jika input yang ke-$(k+1)$ untuk P_1 yaitu $u_1(k+1)$ telah tersedia dan P_1 telah menyelesaikan proses yang sebelumnya, yaitu proses yang ke-k. Waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses di P_1 adalah d_1 satuan waktu. Sehingga bahan setengah jadi yang diproses di P_1 akan meninggalkan P_1 pada saat $x_1(k)+d_1$. Sehingga bisa diperoleh waktu ketika P_1 memulai proses yang ke-$(k+1)$ sebagai berikut:

$$x_1(k+1) = \max(u_1(k+1), x_1(k) + d_1) \quad (1)$$

P_2 dapat memulai proses yang ke-$(k+1)$ jika input yang ke-$(k+1)$ untuk P_2 yaitu $u_2(k+1)$ telah tersedia dan P_2 telah menyelesaikan proses yang sebelumnya, yaitu proses yang ke-k. Waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses di P_2 adalah d_2 satuan waktu. Sehingga bahan setengah jadi yang diproses di P_2 akan meninggalkan P_2 pada saat $x_2(k)+d_2$. Sehingga bisa diperoleh waktu ketika P_2 memulai proses yang ke-$(k+1)$ sebagai berikut:

$$x_2(k+1) = \max(u_2(k+1), x_2(k) + d_1) \quad (2)$$

Demikian juga untuk P_n. P_n dapat memulai proses yang ke-$(k+1)$ jika input yang ke-$(k+1)$ untuk P_n yaitu $u_n(k+1)$ telah tersedia dan P_n telah menyelesaikan proses yang sebelumnya, yaitu proses yang ke-k. Waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses di P_n adalah d_n satuan waktu. Sehingga bahan setengah jadi yang diproses di P_n akan meninggalkan P_n pada saat $x_n(k)+d_n$. Sehingga bisa diperoleh waktu ketika P_n memulai proses yang ke-$(k+1)$ sebagai berikut:

$$x_n(k+1) = \max(u_n(k+1), x_n(k) + d_1) \quad (3)$$

Sedangkan untuk P_{n+1}. P_{n+1} dapat memulai proses yang ke-$(k+1)$ jika *output* yang ke-$(k+1)$ dari P_1, P_2, sampai dengan P_n telah sampai di P_{n+1}. Dengan kata lain input yang ke-$(k+1)$ untuk P_{n+1} telah tersedia. Karena waktu yan dibutuhkan untuk menyelesaikan proses pada P_1, P_2, sampai dengan P_n berturut-urut adalah d_1, d_2, dan d_n. Sedangkan waktu yang dibutuhkan untuk transportasi atau perjalanan antar pemroses diasumsikan sama dengan nol. Sehingga produk setengah jadi atau *output* dari P_1 akan sampai di P_{n+1} pada waktu $x_1(k+1)+d_1$, produk setengah jadi atau *output* dari P_2 akan sampai di P_{n+1} pada waktu $x_2(k+1)+d_2$, dan produk setengah jadi atau *output* dari P_n akan sampai di P_{n+1} pada waktu $x_n(k+1)+d_n$. Akan tetapi P_{n+1} hanya bisa mulai mulai bekerja jika telah menyelesaikan proses yang sebelumnya yaitu proses yang ke-k. Karena waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan proses di P_{n+1} adalah d_{n+1} satuan waktu, produk di P_{n+1} akan meninggalkan P_{n+1} pada saat $x_{n+1}(k)+d_{n+1}$. Sehingga bisa diperoleh waktu ketika P_{n+1} memulai proses yang ke-$(k+1)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(k+1) = \max(&x_1(k+1)+d_1, x_2(k+1)+d_2, \dots, x_n(k+1)+d_n, x_{n+1}(k) \\ &+ d_{n+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

Selain itu juga dapat diperoleh waktu ketika produk yang sudah jadi meninggalkan sistem saat yang ke-k yaitu sebagai berikut

$$y(k) = x_{n+1}(k) + d_{n+1} \quad (5)$$

Dengan menggunakan notasi aljabar max-plus pada persamaan (1), (2), (3), (4), dan (5) dapat ditulis sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
&x_1(k+1) = x_1(k) \otimes d_1 \oplus u_1(k+1)\\
&x_2(k+1) = x_2(k) \otimes d_2 \oplus u_2(k+1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&x_n(k+1) = x_n(k) \otimes d_n \oplus u_n(k+1)\\
&x_{n+1}(k+1)\\
&\qquad\qquad = x_1(k+1) \otimes d_1 \oplus x_2(k+1) \otimes d_2 \oplus \ldots \oplus x_n(k+1) \otimes d_n\\
&\qquad\qquad \oplus x_{n+1}(k) \otimes d_{n+1}\\
&\qquad\qquad = x_1(k) \otimes d_1^{\otimes 2} \oplus u_1(k+1) \oplus x_2(k) \otimes d_2^{\otimes 2} \oplus u_2(k+1)\\
&\qquad\qquad \oplus \ldots \oplus x_n(k) \otimes d_n^{\otimes 2} \oplus u_n(k+1) \oplus x_{n+1}(k) \otimes d_{n+1}\\
&y(k) = x_{n+1}(k) + d_{n+1}
\end{aligned}
$$

Jika persamaan-persamaan di atas ditulis dalam bentuk matrik aljabar max-plus, maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)\\
y(k) &= C \otimes x(k)
\end{aligned} \tag{5}
$$

dengan $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n+1 \times n+1}$ dan $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{1 \times n+1}$sebagai berikut

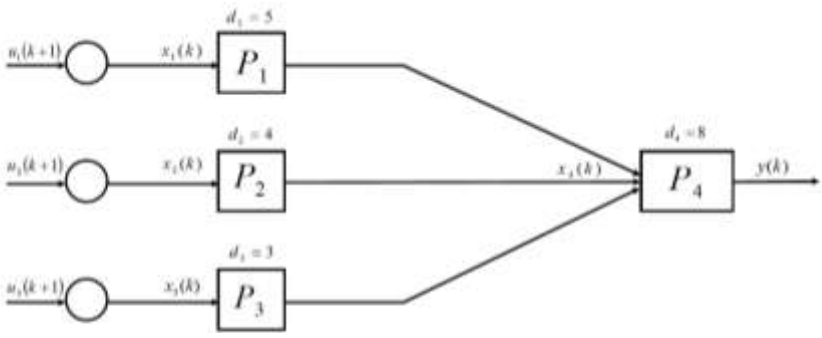
$$
A = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \Lambda & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \Lambda & \mathrm{M} & \varepsilon \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \varepsilon & \mathrm{M} \\ \varepsilon & \varepsilon & \Lambda & d_n & \varepsilon \\ d_1^{\otimes 2} & d_2^{\otimes 2} & \Lambda & d_n^{\otimes 2} & d_{n+1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \Lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathrm{O} & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathrm{M} & \Lambda & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \Lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \Lambda & \varepsilon & d_{n+1} \end{bmatrix}
$$

sedangkan $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \mathrm{M} \\ x_n(k) \\ x_{n+1}(k) \end{bmatrix}$ dan $u(k+1) = \begin{bmatrix} u_1(k+1) \\ u_2(k+1) \\ \mathrm{M} \\ u_n(k+1) \end{bmatrix}$.

Sistem persamaan (5) merupakan bentuk persamaan umum untuk sistem produksi tipe *assembly*.

2. Contoh Aplikasi Aljabar Max-Plus Pada Sistem Produksi Tipe *Assembly*

Berikut ini diberikan contoh sistem produksi tipe *assembly*. Dari gambar 6 ini dapat diperoleh persamaan aljabar max-plus dari sistem produksi tersebut yang dapat digunakan untuk mendapatkan waktu memulai proses pada masing-masing pemroses.



Gambar 2. Contoh sistem produksi tipe *assembly*

Pada Gambar 2 terlihat bahwa waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada setiap pemroses yaitu $d_1 = 5$, $d_2 = 4$, $d_3 = 3$, dan $d_4 = 8$ satuan waktu. Sehingga berdasarkan persamaan (5) diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned} \tag{5}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 10 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \text{dan } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan program Scilab 5.5.1 maka diperoleh waktu untuk memulai proses pada setiap pemroses untuk periode proses yang ke-k sebagai berikut.

$$x = \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 0 & 10 & 18 & 26 & 34 & 42 & 50 & 58 & 66 & 74 & 82 \\ x(0) & x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & x(6) & x(7) & x(8) & x(9) & x(10) \end{array}$$

$$y = 8 \quad 18 \quad 26 \quad 34 \quad 42 \quad 50 \quad 58 \quad 66 \quad 74 \quad 82 \quad 90$$

Pada hasil x di atas terlihat bahwa mulai $x(1)$ waktu mulai proses pada masing-masing pemroses sudah mempunyai periode yang tetap. Untuk pemroses ke-1 (P_1) mempunyai periode 5 satuan waktu, pemroses ke-2 (P_2) mempunyai periode 4 satuan waktu, pemroses ke-3 (P_3) mempunyai periode 3 satuan waktu, dan pemroses ke-4 (P_4) mempunyai periode 8 satuan waktu. Sehingga salah satu yang baik untuk mengawali sistem produksi yaitu $x(0) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}^T$. Untuk $x(0)$ tersebut berarti bahwa waktu memulai proses untuk pemroses P_1 adalah pada satuan waktu ke-5, P_2 pada satuan waktu ke-4, P_3 pada satuan waktu ke-3, dan P_4 pada satuan waktu ke-10. Untuk berikutnya yaitu untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ setiap pemroses bekerja secara periodik sesuai dengan periodenya masing-masing. Sedangkan $y(k)$ menyatakan waktu selesainya proses untuk periode ke-k atau saat ketika produk yang sudah jadi meniggalkan sistem saat yang ke-k.

PENUTUP

1. Kesimpulan

Dari pembahasan dan hasil yang diperoleh maka dapat diambil kesimpulan bahwa sistem persamaan (5) merupakan bentuk persamaan aljabar max-plus secara umum dari suatu sistem produksi tipe *assembly*. Selanjutnya sistem persamaan tersebut dapat digunakan untuk menentukan waktu memulai proses pada suatu pemroses sistem produksi. Berdasarkan hasil yang diperoleh untuk periode proses selanjutnya akan berlangsung secara periodik.

2. Saran

Pada penelitian ini keperiodikan sistem dilihat dari hasil simulasi. Untuk itu diharapkan untuk penelitian berikutnya agar menyempurnakan penelitian ini dengan melakukan analisis yang lebih mendalam tentang keperiodikan dan karakteristik dari sistem $x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)$ yang berkaitan dengan sistem produksi tipe *assembly*. Selain itu bisa dikembangkan juga dengan menambahkan *finite buffer* pada beberapa pemroses.

DAFTAR RUJUKAN

Schutter, B. D. 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. Katholieke Universiteit Leuven.

Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya.* Bahan Kuliah: Aljabar Min-Max Plus. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.

Heidergott, B.. Olsder, G.J.. Woude, Jacob van der. 2006. *Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Application.* New Jersey: Princeton University Press.