LANDASAN MATEMATIKA
Handout 5
(Penarikan Kesimpulan)

Tatik Retno Murniasih, S.Si., M.Pd.

tretnom@unikama.ac.id / tatikretno@gmail.com

Penarikan Kesimpulan

Argumen : serangkaian pernyataan yang mempunyai ungkapan penarikan kesimpulan.

Argumen terdiri : premis dan konklusi

Ada 3 dasar penarikan kesimpulan

1. Modus Ponens
2. Modus Tollens
3. Silogisme

Modus Ponens

Premis 1 : $p \Rightarrow q$
Premis 2 : $\underline{p \qquad\qquad}$
Konklusi : q

Coba beri contohnya!

Modus Tollens

Premis 1 : $p \Rightarrow q$
Premis 2 : $\underline{\sim q \quad\quad}$
Konklusi : $\sim p$

Coba beri contohnya!

Silogisme

Premis 1 : $p \Rightarrow q$
Premis 2 : $q \Rightarrow r$
Konklusi : $p \Rightarrow r$

Coba beri contohnya!

Penyusunan Bukti

1. Bukti Langsung
2. Bukti Tak Langsung
3. Induksi Matematika

Bukti Langsung

Soal

Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat n, jika n adalah bilangan bulat ganjil, maka n^2 adalah bilangan bulat ganjil !

Jawab

Misalnya : p : n adalah bilangan bulat ganjil

q : n^2 adalah bilangan bulat ganjil

Akan dibuktikan p => q benar.

Karena n ganjil, yaitu $n = 2k + 1, k \in Z$

Maka $n^2 = (2k + 1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$, misal $m = 2k^2 + 2k$

$= 2m + 1$

Dengan $m = 2k^2 + 2k$, yang berarti n^2 adalah bilangan bulat ganjil

Jadi, terbukti p=>q benar.

Apakah ada cara lain?

Bukti Tak Langsung

a. Bukti Dengan Kontraposisi

Untuk membutikan (p=>q) benar, maka kontraposisinya (-q => -p) adalah benar.

Jawab

Jika n^2 adalah bilangan ganjil maka n adalah bilangan ganjil

Misalnya p : n^2 adalah bilangan ganjil

q : n adalah bilangan ganjil

kemudian misalnya –q benar yang berarti n adalah bilangan genap, yaitu $n = 2k$

sehingga $n^2 = (2k)^2$

$= 4k^2$

$= 2(2k^2)$

$= 2m$ dengan $m = 2k^2$

Yang berarti n^2 adalah bilangan genap.

Dengan demikian, -p : n^2 adalah bilangan genap

-q : n adalah bilangan genap

Dan karena –q => -p adalah benar dan p => q ≡ -q => -p

Maka terbukti p => q adalah benar.

Jadi, terbukti bahwa jika n^2 adalah bilangan ganjil, maka n adalah bilangan ganjil.

Bukti Tak Langsung

b. Pembuktian Kontradiksi

Untuk membuktikan (p => q) benar, dapat dilakukan dengan mengandaikan –q benar. Dari –q benar kita tunjukan suatu kontradiksi dengan p benar atau dengan pernyataan benar lainnya.

Jawab

Misalnya n adalah bilangan genap, yaitu $n = 2k, k \in Z$

Karena $n = 2k$

Maka $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

$= 2m$ dengan $m = 2k^2$

Sehingga n^2 adalah bilangan genap, kontradiksi dengan n^2 adalah bilangan ganjil.

Jadi, terbukti bahwa jika n^2 adalah bilangan ganjil, maka n adalah bilangan ganjil.

Induksi Matematika

Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Jawab

(i) Basis Induksi: Untuk $n = 1$, Perhatikan $1 = 1^2$ (Benar).
(ii) Langkah Induksi: Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan:
$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$ adalah suatu yang benar.

Misalkan rumus Sn berlaku untuk n = k, yaitu:

$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2}$

Akan dibuktikan Sn berlaku untuk n = k + 1

$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) &= [1 + 3 + \ldots + (2k-1)] + (2k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Untuk S_{k+1} terbukti

Created by Tatik Retno Murniasih

Buktikan $N^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 berlaku untuk $n = 1$ dan berlaku kelipatan 3 untuk setiap bilangan bulat postitif n

Jawab

Untuk n = 1 akan diperoleh: $1^3 + 2(1) = 3$ yg merupakan kelipatan 3 (Berlaku)

Misalkan untuk n = k asumsikan $k^3 + 2k = 3x$

Untuk n = k + 1 berlaku $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ adalah kelipatan 3

$(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 2k + 2$

$(k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$

$(k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$

Induksi $3x + 3(k^2 + k + 1)$

$3(x + k^2 + k + 1)$

Kesimpulan : $N^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 untuk setiap bilangan bulat positif n (Berlaku kelipatan 3).